

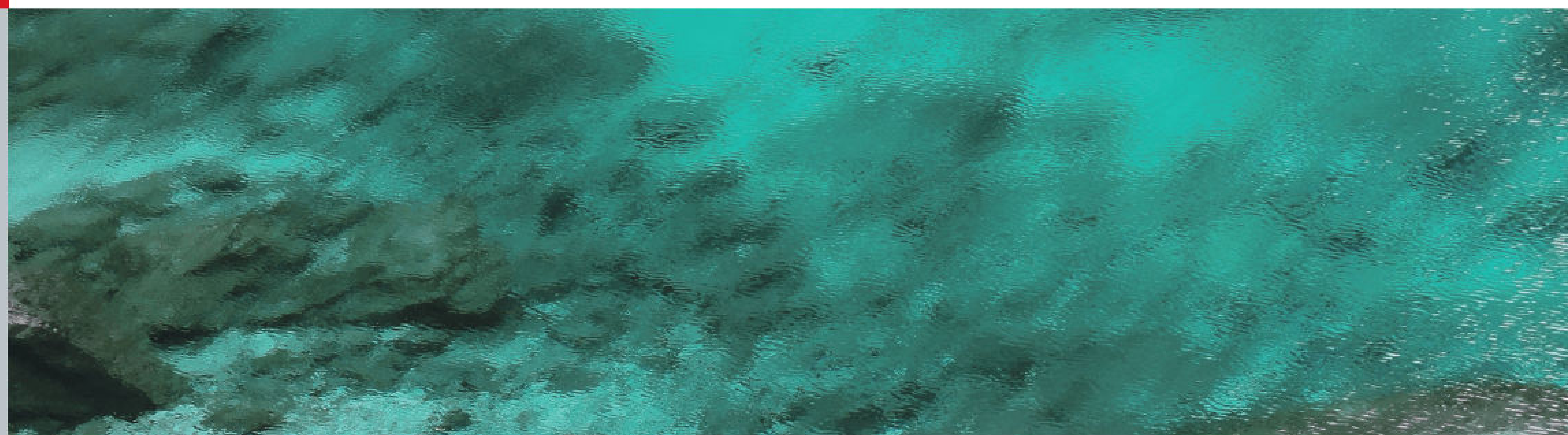
“十三五”江苏省高等学校重点教材
国家特色专业、江苏省品牌专业自动化精品教材

全国普通高校自动化类专业规划教材



# Modern Control Theory

# 现代控制理论



丁　锋 ◎著
Ding Feng

清華大学出版社

“十三五”江苏省高等学校重点教材
国家特色专业、江苏省品牌专业自动化精品教材
全国普通高校自动化类专业规划教材

# Modern Control Theory

# 现代控制理论

丁　锋　著
**Ding Feng**

**清华大学出版社**
北　京

## 内 容 简 介

现代控制理论是自动化专业的一门基础课程. 本书是作者在清华大学、江南大学从事现代控制理论相关课程的教学和科研创新经验的结晶, 介绍现代控制理论的基础知识: 动态系统的状态空间描述、线性系统的运动分析、能控性、能观测性、状态反馈和观测器等, 以及非线性系统的李雅普诺夫稳定性分析, 还介绍作者在现代控制理论方面的一些最新研究成果: 连续系统离散化、Z–S变换、卡尔曼滤波和连续系统重构.

本书不仅传授知识, 而且还传授科学研究与创新的新思想和新方法, 特别是提出了一系列值得深入研究的课题, 将引导读者走上科学研究的道路. 书中一些 MATLAB 仿真例子为初学者快速上手提供了学习蓝本. 本书既可作为大学本科自动化专业 “现代控制理论” 课程的教材, 也可作为硕士和博士研究生 “线性系统” 课程的参考书, 还可供自动控制、电气自动化类及相关电类专业高校教师和科技人员选用.



**图书在版编目（CIP）数据**

现代控制理论/丁锋著. —北京: 清华大学出版社, 2018

(全国普通高校自动化类专业规划教材)

ISBN 978-7-302-48695-4

Ⅰ. ①现…　Ⅱ. ①丁…　Ⅲ. ①现代控制理论-高等学校-教材　Ⅳ. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 271392 号

责任编辑: 梁　颖　王冰飞
封面设计: 傅瑞学
责任校对: 梁　毅
责任印制: 宋　杰
出版发行: 清华大学出版社
　　网　址: http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
　　地　址: 北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　编: 100084
　　社 总 机: 010-62770175　　邮　购: 010-62786544
　　投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
　　课 件 下 载: http://www.tup.com.cn,010-62795954
印 刷 者: 三河市金元印装有限公司
装 订 者: 三河市金元印装有限公司
经　销: 全国新华书店
开　本: 185mm×260mm　　印　张: 26.75　　字　数: 651 千字
版　次: 2018 年 8 月第 1 版　　印　次: 2018 年 8 月第 1 次印刷
定　价: 59.00 元

---

产品编号: 076827-01

# 作者简介
# ABOUT THE AUTHOR



丁锋, 男, 系统辨识专家、控制科学家、数学家. 湖北广水人 (应山县人), 清华大学博士、University of Alberta 博士后、教授、博士生导师.

**教育与工作经历如下:**

- 自 2004 年 10 月至今, 江南大学 “太湖学者” 特聘教授, 博士生导师、学科带头人.
- 1980 年 9 月 —1988 年 8 月, 湖北工业大学学士学位、湖北制药厂变配电技术员.
- 1988 年 9 月 —2002 年 6 月, 清华大学硕士学位、博士学位 (优秀博士学位论文)、讲师、副教授, 系统工程研究所副所长.
- 2002 年 7 月 —2005 年 10 月，加拿大阿尔伯塔大学 (University of Alberta, 埃德蒙顿) 博士后、研究员.
- 2006 年 3—5 月，香港科技大学研究员.
- 2006 年 12 月 —2007 年 2 月、2008 年 5—12 月，加拿大卡尔顿大学 (Carleton University, 渥太华) 访问教授.
- 2009 年 1—10 月，加拿大瑞尔森大学 (Ryerson University，多伦多) 研究员 (包括国家公派访问学者半年).

**主要学术成就如下:**

- 《系统辨识——系统辨识新论》. 北京: 科学出版社，2013. 65.3 万字.
- 《系统辨识——辨识方法性能分析》. 北京: 科学出版社，2014. 80 万字.
- 《系统辨识——辅助模型辨识思想与方法》. 北京: 科学出版社, 2017. 60 万字.
- 《系统辨识——多新息辨识理论与方法》. 北京: 科学出版社, 2016. 65 万字.
- 发表学术论文 512 篇，其中 SCI 收录论文 256 篇，*Automatica* 和 *IEEE Transactions* 23 篇、*SIAM Journals* 2 篇, 被 SCI 期刊他引 7000 余次.
- 44 篇 SCI 论文入选 2006—2016 年 11 年期间 ESI (Essential Science Indicators) 高被引论文全球前 1%, 其中作为第一作者发表 24 篇.
- 入选汤森路透 (Thomson Reuters) 2014 年全球高被引科学家 (工程与计算机科学两个领域).
- 入选汤森路透 (Thomson Reuters) 2015 年全球高被引科学家 (工程与计算机科学两个领域).
- 入选汤森路透 (Thomson Reuters) 2016 年全球高被引科学家 (工程与数学两个领域).
- 2 篇第一作者 SCI 论文入选 “2011 年中国百篇最具影响国际学术论文”.
- 1 篇第一作者 SCI 论文入选 “2012 年中国百篇最具影响国际学术论文”.

- 1 篇第一作者 SCI 论文入选 “2013 年中国百篇最具影响国际学术论文”.
- 1 篇第一作者 SCI 论文入选 “2014 年中国百篇最具影响国际学术论文”.
- 1 篇第二作者 SCI 论文入选 “2011 年中国百篇最具影响国际学术论文” 和 “2014 年欧洲信号处理协会 3 篇最佳论文奖之一”.
- 发表在 *IET Control Theory and Applications* 2013 年第 2 期上的 SCI 论文 “Gradient-based and least-squares-based iterative algorithms for Hammerstein systems using the hierarchical identification principle” 获得 2015 年 IET Journals 杂志的最佳论文奖 “Premium (Best Paper) Awards”. 该奖是 *IET Control Theory and Applications* 杂志每年从前两年发表论文中评选出的唯一一篇最佳论文.
- 2008 年入选江苏省 “青蓝工程” 中青年学术带头人培养对象 (2012 年 12 月考核颁发证书).
- 2012 年 5 月被授予 “无锡市有突出贡献中青年专家” 称号.

他是 Z–S 变换、鞅超收敛定理、辅助模型辨识思想、多新息辨识理论、递阶辨识原理、耦合辨识概念、滤波辨识理念等的缔造者. 在现代控制理论、辅助模型辨识、多新息辨识、递阶辨识、耦合辨识、迭代辨识、滤波辨识领域做出了杰出贡献, 提出了连续时间系统与离散时间系统间的 Z–S 变换、时变增益最优观测器设计方法、鲁棒观测器—控制器设计方法、连续时间系统重构方法、非均匀采样数据系统参数与状态递阶估计方法, 提出了用于时变离散时间系统递推辨识方法与自适应控制方法有界收敛性判定工具——“鞅超收敛定理”, 研究和提出了一系列辨识新方法. 尤其在 Z–S 变换、辨识新方法、辨识方法性能分析等方面所作的贡献, 具有前瞻性和开创性, 在国内外都处于领先地位. 正在出版《系统辨识学术专著丛书》8 部, 每部 60 万字以上, 各分册名称如下.

第 1 分册《系统辨识——系统辨识新论》(已出版)
第 2 分册《系统辨识——系统辨识方法论》
第 3 分册《系统辨识——辨识方法性能分析》(已出版)
第 4 分册《系统辨识——辅助模型辨识思想与方法》(已出版)
第 5 分册《系统辨识——迭代搜索原理与辨识方法》
第 6 分册《系统辨识——多新息辨识理论与方法》(已出版)
第 7 分册《系统辨识——递阶辨识原理与方法》
第 8 分册《系统辨识——耦合辨识概念与方法》

# 前言
# PREFACE

江南大学自动化专业是国家特色专业, 也是江苏省品牌专业. “现代控制理论” 是自动化专业的主干课程, 经过多年的建设, 现代控制理论作为自动化专业精品教材, 得到 “十三五” 江苏省高等学校重点教材立项资助.

现代控制理论是自动控制理论的一个重要组成部分. 相对于经典控制理论, 现代控制理论所能处理的控制问题要广泛得多, 如非线性系统、时变系统等. 现代控制理论方法是自适应控制、最优控制、鲁棒控制、预测控制等先进控制的理论基础. 鉴于现代控制理论的特点, 我们针对自动化特色专业和品牌专业编写一部具有研究特色的精品教材.

本书是 20 多年来作者给清华大学、江南大学自动化专业本科生讲授现代控制理论相关课程教学经验、科学研究经验, 以及 5 年海外研究经历的结晶. 《现代控制理论》是在作者讲稿、讲义的基础上, 根据教学过程中学生的反馈以及作者的思考, 针对特色专业、品牌专业的特点, 对课堂讲义进行逐年修改、补充、完善写成, 同时汇集了作者在现代控制理论领域的一些最新研究成果.

在教学过程中, 鉴于学生的理解能力, 在教材中融入了一些知识点的总结、方法和步骤的运用, 增加了一些创新思维模式的启发、一些有针对性的例题和值得深入思考的习题, 特别是纳入了现代控制理论的一些最新优秀成果, 如我们提出的连续时间系统与离散时间系统间的 Z–S 变换、时变增益最优观测器设计、鲁棒观测器—控制器设计、连续时间系统重构、非均匀采样数据系统参数与状态递阶估计, 形成了富有特色专业、品牌专业气息的研究型教材. 该教材在江南大学 10 余年几十个班级试用, 反应效果良好. 本教材得到湖北工业大学、青岛科技大学、北京石油化工学院、北京工商大学、内蒙古科技大学、南京工业大学、常州工学院、上海海事大学、南通大学、南京邮电大学、青岛大学、青岛农业大学等兄弟院校授课教师的肯定和好评. 与国内外同类教材比较, 本书主要特色与创新如下.

(1) 该书组织结构清晰, 写作方法独特. 该书吸收了国内外许多教材的写作优点, 从控制论的产生, 到控制科学的形成, 揭示了控制方法与控制问题的机制特征.

(2) 该书内容新颖、创新性强. 该书吸纳了现代控制理论在国内外的一些最新研究成果, 如 Z–S 变换、时变增益最优观测器、鲁棒观测器—控制器、连续时间系统重构等.

(3) 本书不仅传授知识, 而且传授科学研究与创新的新思想和方法. 除重点介绍一些基础知识和基本方法外, 还提出了一系列开放性的研究课题, 使读者知晓现代控制理论中的研究难点和未来发展趋势.

(4) 本书出版是及时的, 使我国“现代控制理论”教材向研究型教材迈进了一大步.

本书既可作为我国自动化专业教材, 也可供电类专业、控制科学与工程学科教学与科研用书, 还可作为有关技术人员、工程师的参考书.

丁　锋

2018 年 5 月 19 日 2:15 于江南大学 C415 Office

# 主要符号说明
# DESCRIPTION OF MAIN SYMBOLS

**数集和数域**

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | 自然数集: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$. |
| $\mathbb{N}_0$ | 包括 0 的自然数集: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$. |
| $\mathbb{Z}$ | 整数集: $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$. |
| $\mathbb{Q}$ | 有理数集或有理数域. |
| $\mathbb{R}$ | 实数集或实数域, $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$. |
| $\mathbb{R}^n$ | $n$ 维实欧几里得 (Euclidean) 空间, $\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{n\times 1}$,<br>或 $n$ 维实数列向量集或实系数函数列向量集 (列向量空间). |
| $\mathbb{R}^{m\times n}$ | 所有 $m$ 行 $n$ 列矩阵构成的实空间或实系数函数空间. |
| $\mathbb{R}^{1\times n}$ | $n$ 维实数行向量集或实系数函数行向量集 (行向量空间). |
| $\mathbb{C}$ | 复数集或复数域; $\mathbb{F}$ 代表 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. |
| $\mathbb{C}^{m\times n}$ | $m\times n$ 复矩阵集或复系数函数矩阵集;<br>$\mathbb{F}^{m\times n}$ 代表 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 或 $\mathbb{C}^{m\times n}$. |
| $\mathbb{C}^n$ | $n$ 维复数列向量集或复系数函数列向量集, $\mathbb{C}^n := \mathbb{C}^{n\times 1}$;<br>$\mathbb{F}^{n\times 1} =: \mathbb{F}^n$ 代表 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$. |
| $\mathbb{C}^{1\times n}$ | $n$ 维复数行向量集或复系数函数行向量集. |
| $\mathbb{F}$ | 代表 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. |

**数向量和数矩阵**

| | |
|---|---|
| $\mathbf{0}$ | 适当维数的零向量或零矩阵. |
| $\mathbf{0}_{m\times n}$ | $m\times n$ 零矩阵. |
| $\mathbf{1}$ | 元均为 1 的适当维数矩阵. |
| $\mathbf{1}_{m\times n}$ | 元均为 1 的 $m\times n$ 矩阵. |
| $\mathbf{1}_n$ | 元均为 1 的 $n$ 维列向量, $\mathbf{1}_n := \mathbf{1}_{n\times 1}$. |
| $\boldsymbol{I}$ | 适当维数的单位阵, 其对角元均为 1, 其余元均为零. |
| $\boldsymbol{I}_n$ | $n$ 阶单位阵 $\boldsymbol{I}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 其对角元均为 1, 其余元均为零. |

**基本数学符号**

| | |
|---|---|
| $\mathrm{adj}[\boldsymbol{A}]$ | 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, $\mathrm{adj}[\boldsymbol{A}] = \det[\boldsymbol{A}]\boldsymbol{A}^{-1}$. |
| $\mathrm{col}[\boldsymbol{X}]$ | 将矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的列按次序排成的向量. 如<br>$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 那么<br>$\mathrm{col}[\boldsymbol{X}] := \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mn}$. 有的资料上用 vecX 代替 $\mathrm{col}[\boldsymbol{X}]$. |

| | |
|---|---|
| const | 常数. |
| cov | $\mathrm{cov}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$ 表示随机向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的协方差阵, 定义为 $\mathrm{cov}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]:=\mathrm{E}[(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{y}})^{\mathrm{T}}]$, $\bar{\boldsymbol{x}}:=\mathrm{E}[\boldsymbol{x}]$. |
| $\mathrm{D}[*]$ | $\mathrm{D}[x(t)]:=\mathrm{var}[x(t)]$ 表示随机变量 (过程) $x(t)$ 的方差. |
| $\det[\boldsymbol{X}]$ | 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的行列式, 即 $\det[\boldsymbol{X}]:=\lvert\boldsymbol{X}\rvert$. |
| $\mathrm{diag}[*,*,\cdots,*]$ | 对角矩阵. |
| $\dim\boldsymbol{\varphi}(t)$ | 表示向量 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的维数, 如 $\boldsymbol{\varphi}(t)\in\mathbb{R}^n$, 则 $\dim\boldsymbol{\varphi}(t)=n$. |
| $\mathrm{E}[*]$ | 数学期望 (均值). |
| $\mathrm{E}[*\lvert\mathcal{F}_t]$ | 对 $\mathcal{F}_t$ 的条件期望 (条件均值). |
| $\exp(x)$ | 指数函数, $\exp(x)=\mathrm{e}^x$. |
| for all | for all $t\geqslant 0$ 表示对所有 $t\geqslant 0$, 即 $t=0,1,2,\cdots$ |
| for any | for any $t>0$ 表示对每一个 $t>0$, 即 $t=1,2,3,\cdots$ |
| for large | for large $t$ 表示对大 $t$. |
| for some | for some $t>0$ 表示对某个 $t>0$, 如 $t=1,2,3,\cdots$ 中的一个. |
| $\mathrm{grad}[f(\boldsymbol{x})]$ | 标量函数 $f(\boldsymbol{x})$ 对向量自变量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 的梯度 (列向量). |
| $\mathrm{Im}[s]$ | $s$ 的虚部, 若 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$, $\sigma$ 和 $\omega$ 均为实数, 则 $\mathrm{Im}[s]=\omega$. |
| $\inf[*]$ | 下界. 例如, $f(x)=\exp(-x^2)$, 则 $\inf[f(x)]=0$. |
| j | 虚数单位, 即 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$. |
| lim | 极限符号. |
| lim sup | 上界极限符号. |
| $\ln[*]$ | 以 $\mathrm{e}=2.718281828459\cdots$ 为底的自然对数. |
| $\max[*,*,\cdots,*]$ | $(*,*,\cdots,*)$ 中最大者. |
| $\min[*,*,\cdots,*]$ | $(*,*,\cdots,*)$ 中最小者. |
| $\mathrm{Re}[s]$ | $s$ 的实部, 若 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$, $\sigma$ 和 $\omega$ 均为实数, 则 $\mathrm{Re}[s]=\sigma$. |
| $\mathrm{sgn}(x)$ | 符号函数, 即 $\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ |
| star ($\star$) | Star 积或 $\star$ 积或星积 (即块矩阵 $\star$ 积, 块矩阵内积). 例如, $$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_p\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{Y}_p\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}\star\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_p\end{pmatrix}\star\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{Y}_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{Y}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_p\boldsymbol{Y}_p\end{pmatrix}.$$ |
| sup | 上界. 例如, $f(x)=1-\exp(-x^2)$, 则 $\sup[f(x)]=1$. |
| T | 上标 T 表示矩阵转置. |
| $\mathrm{tr}[\boldsymbol{X}]$ | 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的迹, 即矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的对角元之和 (也等于 $\boldsymbol{X}$ 的特征值之和). |
| $\mathrm{var}[x(t)]$ | 随机过程 (变量) $x(t)$ 的方差, 即 $\mathrm{var}[x(t)]=\mathrm{E}\{[x(t)-\mathrm{E}(x(t))]^2\}$. |
| $\lvert x\rvert$ | $\lvert x\rvert:=\mathrm{abs}(x)$ 表示 $x$ 的绝对值. |
| $\lvert\boldsymbol{X}\rvert$ | $\lvert\boldsymbol{X}\rvert:=\det[\boldsymbol{X}]$ 表示方阵 $\boldsymbol{X}$ 的行列式. |

**变量和函数定义**

| | |
|---|---|
| $A=:X$ | $A$ 定义为 $X$. |

| | |
|---|---|
| $X := A$ | $A$ 定义为 $X$. |
| $1(t)$ | 单位阶跃函数: $1(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$ |
| $\|\boldsymbol{X}\|$ | 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的范数, 如定义为 $\|\boldsymbol{X}\|^2 := \mathrm{tr}[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]$ 或 $\|\boldsymbol{X}\|^2 := \lambda_{\max}[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]$. |
| $\boldsymbol{X}^{-1}$ | 方阵 $\boldsymbol{X}$ 的逆矩阵, 定义为 $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-1} = \boldsymbol{I}$, 或 $\boldsymbol{X}^{-1} = \mathrm{adj}[\boldsymbol{X}]/\det[\boldsymbol{X}]$. |
| $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$ | 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的转置. |
| $\boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}$ | 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 逆的转置: $\boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}} = [\boldsymbol{X}^{-1}]^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]^{-1}$. |
| $\boldsymbol{X}^*$ | (复) 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的共轭转置. |
| $z^{-1}$ | 单位后移算子, 如 $z^{-1}y(t) = y(t-1)$. |
| $f(t) = o(g(t))$ | 表示 $g(t) > 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{g(t)} = 0$. |
| $f(t) = O(g(t))$ | 表示 $g(t) \geqslant 0$, 存在常数 $\delta_1 > 0$ 和 $t_1$ 满足 $\|f(t)\| \leqslant \delta_1 g(t)$, $t \geqslant t_1$. |
| $\boldsymbol{P}(t)$ | 协方差矩阵. |
| $\delta$ | 相对参数估计误差 $\delta := \|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}\|/\|\boldsymbol{\theta}\|$ 或 $\delta := \|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}(t)\|/\|\boldsymbol{\theta}(t)\|$. |
| $\delta_a$ | 绝对参数估计误差 $\delta_a := \|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}\|$ 或 $\delta_a := \|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}(t)\|$. |
| $\delta_0$ | 均方参数估计初值偏差 $\delta_0 := \mathrm{E}[\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) - \boldsymbol{\theta}\|^2]$, 或 $\delta_0 := \mathrm{E}[\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) - \boldsymbol{\theta}(0)\|^2]$. |
| $\delta_{ij}$ | Kronecker delta 函数, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ |
| $\boldsymbol{\theta}$ 或 $\boldsymbol{\theta}(t)$ | 时不变或时变参数向量 (或参数矩阵). |
| $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ | 参数向量 (矩阵) $\boldsymbol{\theta}$ 或 $\boldsymbol{\theta}(t)$ 在时刻 $t$ 的估计. |
| $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)$ | 参数估计误差 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) := \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}$ 或 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) := \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}(t)$. |
| $\lambda$ | 遗忘因子: $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. |
| $\lambda[\boldsymbol{X}]$ | 方阵 $\boldsymbol{X}$ 的特征值. |
| $\lambda_i[\boldsymbol{X}]$ | 方阵 $\boldsymbol{X}$ 的第 $i$ 个特征值. |
| $\lambda_{\max}[\boldsymbol{X}]$ | 对称矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的最大特征值. |
| $\lambda_{\min}[\boldsymbol{X}]$ | 对称矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的最小特征值. |
| $\sigma[\boldsymbol{X}]$ | 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的非零奇异值 (不要求为方阵), 它定义为 $\sigma[\boldsymbol{X}] := \sqrt{\lambda[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]}$ 或 $\sigma[\boldsymbol{X}] := \sqrt{\lambda[\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}]}$. |
| $\sigma_i[\boldsymbol{X}]$ | 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的第 $i$ 个非零奇异值. |
| $\sigma_v^2(t)$ 或 $\sigma_v^2$ | 噪声 $\{v(t)\}$ 的方差. |
| $\otimes$ | Kronecker 积或直积, 若 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{p\times q}$, 则 $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = [a_{ij}\boldsymbol{B}] \in \mathbb{R}^{(mp)\times(nq)}$, 一般 $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{A}$. |
| $\star$ | Star 积或 $\star$ 积或星积 (即块矩阵 $\star$ 积, 块矩阵内积), 定义见上. |

$\circ$ Hadamard 积, 定义为两个矩阵对应元素相乘. 若 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$ 和 $\boldsymbol{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则 $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} = [a_{ij}] \circ [b_{ij}] = [a_{ij} b_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$.
Hadamard 积要求两个矩阵的维数相同.
两个矩阵的 Hadamard 积的例子如下,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{31} & a_{32}b_{32} \end{pmatrix}.$$

# 目 录
CONTENTS

# 插图目录
# LIST OF FIGURES

第1章
CHAPTER 1

# 绪　论

控制理论包含经典控制理论和现代控制理论, 进一步可分为线性控制理论与非线性控制理论. 与经典控制理论相关的教材有《自动控制理论》《自动控制原理》《控制工程》《自动控制系统》等, 与现代控制理论相关的教材有《现代控制理论》《线性系统》《线性系统理论》《非线性控制理论》《现代控制系统理论》等.

系统辨识、控制理论、状态估计是现代控制论的基本内容. 控制理论是研究基于动态系统数学模型的控制系统分析、综合与设计, 也就是说它是假设系统模型参数已知, 在分析系统动态行为的基础上, 为达到期望效果, 对系统进行反馈综合与控制器设计; 系统辨识是研究建立系统数学模型的理论与方法, 其最基本内容是利用系统的观测 (输入输出) 数据, 研究辨识方法估计系统模型的参数, 因此模型辨识是控制理论与状态估计的基础; 而状态估计或状态滤波是基于系统的状态空间模型, 假设模型参数已知, 考虑在噪声干扰环境下, 利用系统的观测输入输出数据, 估计系统的状态. 最近作者出版了 4 部系统辨识学术专著 [1–4].

## 1.1　控制论的产生和发展

自动控制思想渊源很早, 可以追溯到几千年前, 但真正形成控制理论这门学科还是在 20 世纪 20 年代的事情. 后来由于基于状态空间的现代控制理论的产生, 而把 20 世纪 60 年代前发展的控制理论称为经典控制理论, 把 20 世纪 60 年代后基于状态空间的控制理论称为现代控制理论. 经典控制理论的研究对象主要为线性时不变单输入单输出 (SISO) 系统, 其分析方法有时域法、根轨迹法、频域分析法等. 1788 年, 英国人**詹姆斯・瓦特** (James Watt, 1736—1819) 在他发明的蒸汽机上使用了离心调速器, 解决了蒸汽机的速度控制问题, 引起了人们对控制技术的重视. 然而在使用过程中发现在某些情况下, 蒸汽机的速度可能自发地产生剧烈的振荡. 实践中出现的问题, 促使科学家们从理论上进行探索研究. 1868 年, 英国物理学家**詹姆斯・克拉克・麦克斯韦** (James Clerk Maxwell, 1831—1879) 通过对调速系统线性常微分方程的建立和分析, 解释了瓦特蒸汽机速度控制系统中出现的剧烈振荡的不稳定问题, 提出了简单的稳定性代数判据, 开辟了用数学方法研究控制系统稳定性的途径.

此后, 英国数学家**爱德华・约翰・劳斯** (Edward John Routh, 1831—1907) 和德国数学家**阿道夫・胡尔维茨** (Adolf Hurwitz, 1859—1919) 把麦克斯韦的思想扩展到用高阶微分方程描述的更复杂的系统中, 分别在 1877 年和 1895 年各自提出了直接根据代数方程的系数判别系统稳定性的两个著名的 **稳定性判据——劳斯判据** 和 **胡尔维茨判据**. 这些方法奠定了经典控制理论中时域分析法的基础.

1932 年美国物理学家**哈利・奈奎斯特** (Harry Nyquist, 1889—1976) 提出了在频域内研究系统的 **频率响应法**, 建立了以频率特性为基础的稳定性判据, 为具有高质量的动态品质和

静态准确度的军用控制系统提供了所需的分析工具. 随后, **韦德・波德** (Hendrik Wade Bode, 1905—1982) 和**迈克・尼科尔斯** (Nathaniel B. Nichols, 1914—1997) 在 1930—1940 年进一步将频率响应法加以发展, 形成了经典控制理论的 **频域分析法**.

1948 年, **沃尔特・理查德・埃文斯** (Walter Richard Evans, 1920—1999) 提出了 **根轨迹法**, 用作图的方法表示特征方程的根与系统某一参数的变化关系, 当这一参数取特定值时, 对应的特征根可在上述关系图中找到, 并且在控制系统的分析与设计中得到了广泛的应用. 根轨迹法具有直观的特点, 利用系统的根轨迹可以分析结构和参数已知的闭环系统的稳定性和瞬态响应特性, 还可分析参数变化对系统性能的影响. 钱学森在他的《工程控制论》中用两节介绍这一方法, 现在几乎所有的自动控制理论、自动控制原理或控制工程的有关书籍都详细介绍了根轨迹方法.

1948 年美国数学家**诺伯特・维纳** (Norbert Wiener, 1894—1964) 把控制论引起的自动化技术同第二次产业革命联系起来, 出版了《控制论——关于在动物和机器中控制与通信的科学》, 书中论述了控制理论的一般方法, 推广了反馈的概念, 为控制理论这门学科的发展奠定了基础. 1954 年, 钱学森发表《工程控制论》, 并形成了控制科学在 20 世纪 50 年代和 60 年代的研究高潮. 这一时期的主要代表人物如下.

**詹姆斯・克拉克・麦克斯韦** (James Clerk Maxwell, 1831—1879), 英国理论物理学家和数学家. 经典电动力学的创始人, 统计物理学的奠基人之一. 麦克斯韦最伟大的成就是用数学公理化的方法把经典电磁学理论形式化、系统化, 把前人互不相关的观测、实验和电学、磁学、光学的方程, 融合成一个自洽的理论, 即 **麦克斯韦方程组**. 麦克斯韦在电磁学上取得的成就被誉为继**艾萨克・牛顿** (Isaac Newton, 1642—1726) 之后, "物理学的第二次大统一". 麦克斯韦被普遍认为是对 20 世纪最有影响力的 19 世纪物理学家. 他对基础自然科学的贡献仅次于艾萨克・牛顿、**艾尔伯特・爱因斯坦** (Albert Einstein, 1879—1955). 在自动控制领域, 他提出了简单的稳定性代数判据, 开辟了用数学方法研究控制系统的途径.

**哈利・奈奎斯特** (Harry Nyquist, 1889—1976), 美国物理学家, 通信工程师. 1914 年毕业于北达科他大学电气工程系, 获理学学士学位, 1915 年获理学硕士学位, 1917 年在耶鲁大学物理系获哲学博士学位. 1917—1919 年任美国电话电报公司工程部工程师, 1919—1934 年任开发研究部工程师. 1934—1954 年任贝尔电话实验研究所通信系统开发部咨询工程师. 奈奎斯特为近代信息理论做出了突出贡献. 他总结的 **奈奎斯特采样定理** 是信息论, 特别是通信与信号处理学科中的一个重要基本结论. 1928 年发现信道带宽和传输速率间的关系, 提出著名的奈奎斯特定理, 在现代通信工程中得到广泛的应用. 1932 年发现负反馈放大器的稳定性条件, 即著名的奈奎斯特稳定判据, 可用于各种线性反馈系统的设计.

**沃尔特・理查德・埃文斯** (Walter Richard Evans, 1920—1999), 著名的控制理论家和根轨迹方法的创立者, 1941 年于华盛顿大学获得电气工程学士学位, 于 1951 年加利福尼亚大学获得电气工程硕士学位. 曾在通用电气、洛克威尔国际公司以及福特航空公司工作, 主要代表著作是与 McGraw-Hill 合著的《控制系统动态》, 主要学术贡献是提出 **根轨迹方法** (Root Locus Method). 获得美国机械工程师学会 "Rufus Oldenburger Medal" 奖以及 1988 年美国自动控制委员会 "Richard E. Bellman Control Heritage Award" 奖.

**亨德里克・韦德・波德** (Hendrik Wade Bode, 1905—1982), 美国科学家, 1924 年于俄亥

俄州立大学获得学士学位, 1926 年在同一所大学获得数学硕士学位, 1935 年于哥伦比亚大学获得物理学博士学位. 曾任贝尔实验室的项目主管. 主要学术贡献是提出了控制系统频域的 **波德图**. 1979 年成为首位获得美国自动控制委员会 "The Richard E. Bellman Control Heritage Award" 奖.

**诺伯特・维纳** (Norbert Wiener, 1894—1964), 美国数学家, 控制论的创始人. 1894 年 11 月 26 日生于密苏里州的哥伦比亚, 在其 50 年的科学生涯中, 先后涉足哲学、数学、物理学和工程学, 最后转向生物学, 在各个领域中都取得了丰硕成果, 称得上是恩格斯颂扬过的、本世纪多才多艺和学识渊博的科学巨人. 他一生发表论文 240 多篇, 著作 14 本. 他的主要著作有《控制论》(1948 年)、《维纳选集》(1964 年) 和《维纳数学论文集》(1980 年). 维纳还有两本自传《昔日神童》和《我是一个数学家》.

**爱德华・约翰・劳斯** (Edward John Routh, 1831—1907), 1849 年在伦敦获得学士学位,1853 年获得硕士学位, 英国数学家, 主要学术贡献是提出了 **劳斯稳定判据**, 根据系统特征方程式来判断特征根在 $S$ 平面的位置, 从而决定系统的稳定性. 由于不必求解方程, 为系统的稳定性的判断带来了极大的便利.

**克劳德・艾尔伍德・香农** (Claude Elwood Shannon, 1916—2001), 美国数学家、电子工程师和密码学家, 被誉为信息论的创始人, 1916 年出生于密歇根州的 Petoskey, 1932 年进入密歇根大学学习, 1936 年毕业于密歇根大学并获得数学和电子工程学士学位, 1940 年获得麻省理工学院 (MIT) 数学博士学位和电子工程硕士学位, 1941 年加入贝尔实验室数学部, 工作到 1972 年. 1956 年成为麻省理工学院 (MIT) 客座教授, 并于 1958 年成为终身教授, 1978 年成为名誉教授. 香农对奈奎斯特采样定理加以明确地说明并正式作为定理引用, 因此在许多文献中又称为 **香农采样定理**, 这是不恰当的, 至少应该称为 **奈奎斯特—香农采样定理**[①].

**纳撒尼尔** B. **尼科尔斯** (Nathaniel B. Nichols, 1914—1997), 美国控制工程师, 在控制理论领域做出了杰出贡献. 1968 年担任 IEEE 控制系统社团主席 (IEEE Control Systems Society), 1974 年和 1975 担任美国自动控制委员会 (American Automatic Control Council) 会长, 1969 年获得 "Rufus Oldenburger Medal" 奖, 1980 年获得 "Richard E. Bellman Control Heritage Award" 奖. 主要贡献有控制系统的尼科尔斯图.

## 1.2 现代控制理论的分支

从 20 世纪 50 年代末开始, 随着科学技术的突飞猛进, 尤其是航空航天技术的飞速发展, 系统结构和完成的任务越来越复杂, 控制理论的研究对象由单输入单输出、线性、定常系统, 拓展为多输入多输出、非线性、时变系统. 对系统的控制性能要求也更高, 很多情况下要求系统的某些性能是最优的, 对环境的变化有一定的适应能力等. 这些新的控制性能用经典控制理论往往难以实现, 因此现代控制理论应运而生. 现代控制理论主要包括下面几个分支.

(1) **线性系统理论** (Linear System Theory). 线性系统理论是现代控制理论中应用最广泛

① 奈奎斯特—香农采样定理是信息论的基础, 采样信号频率是唯一恢复连续时间信号的条件. 它不是基于离散时间模型重构连续时间系统的条件, 连续时间系统离散化是模型的离散化, 不涉及信号采样. 对于连续时间系统从其离散模型重构问题, 我们总结出的条件称为 **扩展奈奎斯特—香农采样定理**. 最近的研究表明, 连续时间系统可以唯一从其离散模型重构的条件是连续系统有实极点, 或者任意两个采样周期比为无理数, 参见本书 8.2 节、第 9 章和文献 [5,6].

的分支, 也是现代控制理论的基础. 与经典控制理论不同, 线性系统理论采用的数学模型是状态方程或状态空间模型.

(2) **最优控制理论** (Optimal Control Theory). 最优控制理论是在多种约束条件下寻找使系统某个性能指标泛函取极值的控制规律. 以贝尔曼提出的 “动态规划” 和庞特里亚金提出的 “极大值原理” 为代表.

(3) **系统辨识** (System Identification). 系统辨识是研究建立系统数学模型的理论与方法. 由于控制理论是对基于对象的数学模型进行分析和控制, 因此系统辨识是现代控制理论的基础和重要研究内容之一. 辨识广泛应用于许多科学和工程领域, 如化工过程、电力系统、航空航天、社会经济系统、生物生态系统等.

(4) **自适应控制** (Adaptive Control). 系统模型参数未知是对基于已知参数数学模型的传统控制理论的挑战. 自适应控制是实时辨识系统的数学模型参数, 并按辨识获得的模型调整最优控制律. 自适应控制包括模型参考自适应控制 (Model Reference Adaptive Control) 和自校正控制 (Self-tuning Control). 自校正控制是基于参数估计的单步预测控制.

(5) **鲁棒控制** (Robust Control). 鲁棒控制理论主要解决模型参数的不确定性的控制问题, 在设计控制器时利用模型确定性信息 (即标称模型参数已知, 忽略不确定部分) 来设计一个控制器, 使得参数的不确定部分变化小时, 仍能满足系统性能指标要求. 鲁棒控制与系统辨识相结合便产生基于参数估计的鲁棒控制和自适应鲁棒控制.

(6) **预测控制** (Predictive Control). 预测控制理论是模型参数已知时的多步预测自校正控制. 预测控制包括基于模型的预测控制和基于脉冲响应和阶跃响应的预测控制. 预测控制是针对模型参数已知时, 极小化多步预测误差准则函数, 计算控制律. 预测控制与系统辨识相结合便产生基于参数估计的预测控制和自适应预测控制.

## 1.3 线性系统理论

线性系统理论是现代控制理论的基础, 用状态空间法描述诸变量之间的因果关系, 不但反映了系统的输入输出外部特性, 而且揭示了系统的内部结构特性. 线性系统理论包括动态系统的状态空间描述、状态方程的求解、能控性、能观测性和稳定性分析、状态反馈以及状态观测器设计等. 动力学系统稳定性与线性系统理论的主要代表人物如下.

**亚历山大・米哈伊洛维奇・李雅普诺夫** (Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, 1857—1918), 1857 年 6 月 6 日生于俄罗斯的雅罗斯拉夫尔, 1880 年圣彼得堡大学毕业, 1892 年获博士学位并成为教授. 1893 年起任哈尔科夫大学教授. 1916 年当选为巴黎科学院外籍院士. 李雅普诺夫是常微分方程运动稳定性理论的创始人, 1884 年他完成了 “论一个旋转液体平衡之椭球面形状的稳定性” 一文, 1888 年他发表了 “关于具有有限个自由度的力学系统的稳定性”. 特别是 1892 年的博士学位论文 *The General Problem of the Stability of Motion* (运动稳定性的一般问题) 已经成为经典著作, 在其中开创性地提出求解非线性常微分方程的李雅普诺夫函数法, 也称直接法, 奠定了常微分方程稳定性理论的基础, 也是常微分方程定性理论的重要手段.

**鲁道夫・卡尔曼** (Rudolf Emil Kalman, 1930—2016), 匈牙利裔美国数学家, 1930 年出生于匈牙利首都布达佩斯. 1943 年移居到美国. 分别于 1953 年、1954 年在麻省理工学院获得

学士、硕士学位. 1957 年于哥伦比亚大学获得博士学位. 1964—1971 年担任斯坦福大学教授. 1971—1992 年任佛罗里达大学数学系统理论中心 (Center for Mathematical System Theory) 主任. 1972 起任瑞士苏黎世联邦理工学院数学系统理论中心主任直至退休. 2009 年获美国国家科学奖章. 主要学术贡献是提出了卡尔曼滤波理论.

**托马斯・凯拉斯** (Thomas Kailath, 1935— ), 1935 年 6 月 7 日生于印度浦那. 1956 年 6 月于浦那大学获得学士学位, 1959 年 6 月及 1961 年 6 月于麻省理工学院电气工程系获得硕士和博士学位. 美国斯坦福大学教授、世界著名的控制与系统科学专家、美国科学院和工程院院士、第三世界科学院院士和印度工程院院士、IEEE Fellow. 他的研究兴趣涉及信息理论、通信系统、计算、控制、线性系统、统计信号处理、大规模集成电路等. 凯拉斯在多个研究领域做出了伟大的贡献, 也是名著 *Linear Systems* (1980 年) [7] 以及 *Linear Estimation* (2000 年) 的作者, 于 1991 年获得了 IEEE 信号处理分会的最高分会奖, 在 2000 年获得了 IEEE 信息理论分会的香农奖等.

## 1.4 最优控制理论

最优控制理论是现代控制理论的重要组成部分, 它是在 20 世纪 50 年代中期在空间技术的推动下形成和发展起来的. 最优控制理论所研究的主要问题是: 对一个受控的动力学系统或运动过程, 根据已建立的被控对象的数学模型, 选择一个容许的控制律, 使得被控对象达到预定的目标, 并使给定的某一性能指标达到最优. 从数学上看, 最优控制问题就是求解一类带有约束条件的泛函极值问题.

解决最优控制问题的主要研究方法包括经典变分法、动态规划和极大值原理. 变分法是研究最优控制问题的很有力的数学工具之一, 但只能解决控制无约束, 即容许控制属于开集的一类优化控制问题, 而工程实践中遇到更多的是有约束的控制问题, 因此现代变分理论发展起来, 其中动态规划和极大值原理是最常用的两种方法. “动态规划” 是美国学者**贝尔曼** (R. Bellman) 在 1953—1957 年逐步创立的. 他依据最优性原理, 发展了变分学中的哈密顿–雅可比理论, 构成了 “动态规划”. 极大值原理是苏联学者庞特里亚金等人在力学哈密顿原理的启发下提出的. 动态规划和极大值原理能够很好地解决控制有闭集约束的变分问题.

最优控制在航空、航天及工业过程控制等许多领域都有广泛的应用, 如确定一个最优控制规律使飞行器由一个轨道转换到另一轨道过程中燃料消耗最少. 如今, 最优控制理论的研究无论在深度上, 还是在广度上都有了很大的发展, 如对分布参数系统、随机系统、大系统的最优控制理论的研究等. 最优控制领域主要代表人物如下.

**列夫・庞特里亚金** (Lev Semenovich Pontryagin, 1908—1988), 前苏联数学家, 1908 年生于莫斯科, 14 岁时因万用油炉爆炸而失明. 1924 年进入莫斯科国立大学, 1928 年毕业, 1935 获得同校数学、物理博士学位. 虽然双目失明, 母亲 Tatyana Andreevna 为他阅读数学书籍, 成为数学家. 他的研究领域涉及拓扑学、代数、控制论等. 1950 年开始研究振动理论和最优控制理论, 以庞特里亚金的极值原理著称于世.

**贝尔曼** (Richard Ernest Bellman, 1920—1984), 美国数学家、美国国家工程院院士 (1977 年)、美国国家科学院院士 (1983 年)、动态规划的创始人. 1941 年于布鲁克林学院获得数学学士学位, 后来于威斯康星大学获得硕士学位, 1946 年于普林斯顿大学获得博士学位. 他

是南加利福尼亚大学教授, 美国艺术与科学研究院成员 (1975 年). 1949 年贝尔曼在 RAND 公司工作, 并提出了动态规划, 因在研究多段决策过程中提出动态规划而闻名于世. 1957 年他的专著 *Dynamic Programming* (动态规划) 出版后, 被迅速译成俄文、日文、德文和法文, 对控制理论界和数学界有深远影响. 贝尔曼还把不变嵌入原理应用于理论物理和数学分析方面, 把两点边值问题化为初值问题, 简化了问题的分析和求解过程. 1955 年贝尔曼开始研究算法、计算机仿真和人工智能, 把建模与仿真等数学方法应用到工程、经济、社会和医学等方面, 取得许多成就. 贝尔曼对稳定性的矩阵理论、时滞系统、自适应控制过程、分岔理论、微分和积分不等式等方面都有过杰出的贡献.

## 1.5 系统辨识理论

控制科学铸造了时代的辉煌, 高集成度计算机芯片是自动化控制科学与技术的杰作. 控制科学跨越时空的伟大成就——电子设备计算能力和信息处理能力的提升、自动化设备和装备的出现、自动化电子产品的普及, 彻底改变了信息社会的生活方式, 美化了人们的生活. 在这背后, 我们不禁要问: 控制科学是什么, 控制科学的基础是什么?

控制科学就是在认识事物运动规律的基础上, 通过施加特定的、奇妙的控制作用 (控制律), 以改变事物的运动轨迹, 使其向着我们期望的方向发展. 事物的运动规律用方程描述就是数学模型. 数学模型是控制科学的基础, 在控制科学发展中起到了举足轻重的作用, 是一切自然科学的基础. 系统辨识是研究建立 (动态) 系统数学模型的理论与方法. 它是通过设计适当的输入信号, 利用实验的输入输出数据, 选择一类模型, 构造一个误差准则函数, 用优化方法确定与数据拟合得最好的一个模型 (这就是我们总结出的辨识四要素) [1]. 系统辨识包含系统结构辨识和参数估计. 系统结构辨识就是系统数学表达式的形式. 对线性单输入单输出系统而言, 模型结构就是系统的阶次: 对线性多变量系统而言, 模型结构就是系统的能控性结构指数或能观测性结构指数, 系统阶次等于系统的能控性结构指数之和或能观测性结构指数之和.

辨识广泛应用于许多工程领域, 如化工过程、电力系统、航空航天、社会经济系统、生物生态系统等. 凡是需要应用观测数据确定数学模型和估计参数的问题都要利用辨识技术. 自适应控制系统是辨识与控制结合的一个典范, 形成了**自校正控制** (Self-Tuning Control); 辨识与预测控制结合形成**自校正预测控制** (Self-tuning Predictive Control); 辨识与鲁棒控制结合形成**自校正鲁棒控制** (Self-tuning Robust Control) 等.

在系统建模、系统辨识领域, 各国科学家进行了大量的研究工作, 在理论与应用方面都取得了不少优秀成果, 发表了大量论文, 出版了许多著作. 系统辨识领域的代表人物和工作如下.

**托尔斯滕・索德斯特伦** (Torsten Söderström) 1945 年生于瑞典马尔默, 1969 年获得工程物理理学硕士学位, 1973 年获得自动控制博士学位, 均毕业于瑞典隆德理工学院. 他是 IEEE Fellow 及 IFAC Fellow. 1967—1974 年于隆德理工学院 (Lund Institute of Technology) 工作. 自 1974 年开始任瑞典乌普萨拉大学 (Uppsala University) 系统与控制学院自动控制教授. 他在系统辨识领域做出了卓越的贡献. 他的主要研究兴趣包括系统辨识、信号处理和控制. 主要代表著作包括 *Theory and Practice of Recursive Identification* (1983

年) [8], *Instrumental Variable Methods for System Identification* (1983 年), *System Identification* (1989 年), 以及*Discrete-Time Stochastic Systems: Estimation and Control* (2002 年).

**莱纳特・荣** (Lennart Ljung) 1946 年出生于瑞典马尔默, 1967 年获得学士学位, 1970 年获得工程物理硕士学位, 1974 年获得控制理论博士学位, 均毕业于瑞典隆德大学. 1974—1975 年任斯坦福大学 Research Associate 职位, 1970—1975 年任瑞典隆德大学控制理论专业 Teaching and Research Assistant 职位. 1975—1976 年任瑞典隆德大学控制理论专业的 Associate Professor 职位. 1976 年任瑞典 Linköping 大学教授. 曾任 Linköping 大学 MOVII 策略研究中心的主任. 他在系统辨识领域做出了卓越的贡献, 编写了 10 多部专著, 在国际期刊上发表 150 多篇论文, 在国际会议上发表 200 余篇论文, 并且开发了 MATLAB 商业软件包——系统辨识. 他在系统辨识领域的代表著作是*Theory and Practice of Recursive Identification* (1983 年) [8] 和 *System Identification: Theory for the User* (1999 年) [9].

在自适应控制与系统辨识领域, 我国学者陈翰馥院士、郭雷院士等做出了重要工作, 出版了著作 *Identifiation and Stochastic Adaptive Control* (1991 年) [10]. 本书作者的博士生导师清华大学方崇智教授 (1919—2012) 和作者的老师萧德云教授在工业系统辨识与应用方面做出了杰出贡献, 出版了著作《过程辨识》(1988 年) [11]、《系统辨识理论及应用》(2014 年) [12], 他们是我国系统辨识方法在工业应用中的代表. 本书作者在学术前辈研究成果基础上, 对系统辨识方法和辨识理论进行了长期深入的研究, 发表了 512 篇学术论文, 提出了一些原创性理论和方法, 如辅助模型辨识思想、多信息辨识理论、迭代辨识原理、递阶辨识原理、耦合辨识概念、滤波辨识理念、鞅超收敛定理等, 系列研究成果发表在控制领域国际权威期刊 *Automatica*、*IEEE Transactions*、*SIAM Journals*、*Systems & Control Letters* 等上, 且被广泛引用, 得到国内外同行的认可和高度评价. 应科学出版社邀请, 正在出版 "系统辨识学术专著丛书" 8 部, 其中已出版 4 部 [1–4].

## 1.6 自适应控制理论

自适应控制系统通过不断地测量系统的输入、状态、输出或性能参数, 根据所得的信息, 按照一定的准则和标准设计控制方案, 做出决策去更新控制器的结构和参数以适应环境的变化, 达到所要求的控制性能指标. 自适应控制系统应具有 3 个基本功能: ① 辨识对象的结构和参数, 以便精确地建立被控对象的数学模型; ② 给出一种控制律以使被控系统达到期望的性能指标; ③ 自动修正控制器的参数. 因此自适应控制系统主要用于过程模型未知或过程模型结构已知但参数未知的系统. 自适应控制系统的类型主要有自校正控制系统、模型参考自适应控制系统、自寻最优控制系统、学习控制系统等. 自适应控制领域的主要代表人物如下.

**伊万・朗道** (Ioan Doré Landau) 于 1968 年获维也纳发明博览会大金奖, 1982 年获国家科学研究中心银奖, 1981—1984 年获最佳综述论文奖, 2000 年获美国机械学会鲁弗斯・欧德堡奖. 他是鲁汶天主教大学名誉博士. 1991—1993 年任欧盟控制协会第一任主席, 欧洲控制杂志主编. 1992 年起历任加州大学伯克利分校机械工程系教授, 国立格勒诺布尔理工学院教授. 研究兴趣: 系统辨识、自适应控制、鲁棒数字控制和非线性系统. 共发表论文 200 多篇, 主要著作 *Adaptive Control—The Model Reference Appoach* (New York: Marcel Dekker, 1979), *System Identification and Control Design* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice–Hall, 1990),

*Adaptive Control – Theory and Practice* (Tokyo, Japan: Ohm, 1981, in Japanese). *Adaptive Control* (New York: Springer—Verlag, 1997).

**卡尔・约翰・阿斯特罗姆** (Karl Johan Aström) (1934 年—), 1934 年 8 月 5 日出生于瑞典 Östersund, 1957 年在瑞典皇家理工学院获得工程物理专业硕士学位, 1960 年在瑞典皇家理工学院获得自动控制与数学博士学位. Aström 是 IEEE Fellow, 瑞典皇家科学院成员, 瑞典皇家工程院副主席, 美国工程院外籍院士, 多次获得 IEEE 和 IFAC 的大奖. Aström 教授是国际自动控制界著名的学者之一, 是自校正控制学科的开拓者, 他在自动控制的众多领域, 特别是在系统辨识、自适应控制等方面做出了杰出贡献. 主要代表作包括 *Introduction to Stochastic Control* (1970 年)、*Adaptive Control* (1989 年)、*Advanced PID Control* (2005 年) 等.

**格雷厄姆・古德温** (Graham Goodwin) (1945 年—), 于 1945 年 4 月出生于新南威尔士州的小镇布罗肯希尔, 是澳大利亚电气工程师. 在新南威尔士大学获得学士、硕士和博士学位. 现为新南威尔士大学电气工程的荣誉教授, 纽卡斯尔大学复杂动态系统与控制研究中心主任. 主要代表著作包括 *Adaptive Filtering Prediction and Control* (1984 年) [13]、*Control System Design* (2001 年)、*Constrained Control and Estimation* (2005 年).

第 2 章
CHAPTER 2

# 预备知识

本章介绍线性代数和矩阵方面的基础知识, 包括矩阵运算、矩阵行列式、基本矩阵与特殊矩阵、矩阵特征值、特征多项式、特征向量、谱映射定理、矩阵秩、矩阵迹、相似变换、拉普拉斯变换等. 在思考题中将介绍一些著名而有趣的数学猜想: Hadamard 猜想、Goldbach (哥德巴赫) 猜想、Goormaghtigh 猜想等. 此外, 还将介绍在推导一般矩阵方程和耦合矩阵方程迭代解法时, 我们引进的一种新运算: 块矩阵运算的 **星积** (Star Product or $\star$ Product) 或称 D 积 (D Product) [1,14–17], 它能够大大简化迭代算法的表达形式, 有兴趣的读者可参见作者发表在国际期刊 *IEEE Transactions on Automatic Control* [14]、*Systems & Control Letters* [15]、*SIAM Journal on Control and Optimization* [16]、*Applied Mathematics and Computation* [17,18]、*Computers & Mathematics with Applications* [19,20]、*IET Control Theory and Applications* [21]、*Journal of the Franklin Institute*[22,23] 上求解矩阵方程的迭代方法论文.

## 2.1 矩阵与行列式

### 2.1.1 矩阵

**1. 矩阵的定义**

**矩阵** (Matrix) 是一个阵列或一定数目的方形网格. 一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有形式

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n},$$

它有 $m$ 行 $n$ 列, 其中 $a_{ij}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元或元素 (Element, Entry), 第 $i$ 行、第 $j$ 列的元是 $a_{ij}$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是用方括号 “[ ]” 把阵列围起来, 也有的书上使用圆括号 “( )”; 上面矩阵右下标 $m \times n$ 表示矩阵的 **维数** (Size, Dimension): $m$ 行 $n$ 列, 即 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m \times n$ 维矩阵, 记作 $(\boldsymbol{A})_{m\times n}$. 矩阵维数下标一般都省略. 对于 $m \times n$ 维实矩阵可记作 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 对于 $m \times n$ 维复矩阵可记作 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$. 元为 $a_{ij}$ 的 $m \times n$ 维实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可简单写作 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

**2. 方阵**

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数 $m$ 与列数 $n$ 相等, 就说 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n \times n$ 维方阵, 简称 $n$ 阶 **方阵** (Square Matrix). 例如

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}
$$

是一个方阵. 方阵 $A$ 中行号等于列号的元 $a_{ii}$ 称为对角元或对角元素, 对角元所在的位置称为对角线. $a_{11}$ 与 $a_{nn}$ 的连线称为 (主) 对角线, $a_{n1}$ 与 $a_{1n}$ 的连线称为副对角线.

当矩阵只有一列时, 就称为列矩阵, 简称 **列向量** (Column Vector); 当矩阵只有一行时, 就称为 **行向量** (Row Vector). 列向量与行向量统称为向量.

**3. 零矩阵**

矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$ 的所有元 $a_{ij}$ 都为零: $a_{ij} = 0$, 就称为 **零矩阵** (Zero Matrix), 即

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m \times n}
$$

为了方便, 特别在分块矩阵中, 经常把零矩阵 [illegible] 写为 0, 其维数通常能由上下文确定.

**4. 单位矩阵 或 单位阵**

单位阵 (Identity Matrix) 是一个方阵: 当 $i = j$ 时, 对角元 $a_{ij} = 1$; 当 $i \neq j$ 时, 非对角元 $a_{ij} = 0$ 的矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 称为 **单位阵**, 简称 $n$ 阶单位阵. 也就是, 单位阵对角元都为 1, 非对角元都为 0. 本书中单位阵用符号 $I$ 表示: $I$ 表示适当维数单位阵 (其维数通常能由上下文确定), $I_n$ 表示 $n$ 阶单位阵, 即 $n \times n$ 单位阵. 单位阵具有下列形式:

$$
I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}
$$

单位阵中含许多 0 元, 在不至于混淆的情况下, 有时省略这些 0 元, 这种省略, 经常发生在分块矩阵和 **稀疏矩阵** (Sparse Matrix) 中 (含非零元为零的矩阵称为稀疏矩阵). 单位阵也可简写为

$$
I = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \text{ 或 } I = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1)
$$

### 1.1.2　矩阵运算

**1. 矩阵加减法**

矩阵加 (减) 法 (Matrix Addition and Subtraction) 定义为两个矩阵对应元相加 (减), 只适用于维数相同的两个矩阵. 设 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则有

$$
A \pm B = [a_{ij}] \pm [b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}
$$

两个 $2\times 3$ 矩阵的加法例子如下,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}.$$

**矩阵加减法的性质**:

(1) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 是适当维数的矩阵, 则有

① $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}$;

② $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

③ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots,\boldsymbol{C}$ 是相同维数的矩阵, 则矩阵加法范数的三角不等式成立:

① $\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|+\|\boldsymbol{B}\|$ (矩阵加法范数三角不等式);

② $\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\cdots+\boldsymbol{C}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|+\|\boldsymbol{B}\|+\cdots+\|\boldsymbol{C}\|$.

(3) 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 **可交换矩阵**, 即满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 的矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的矩阵指数等于它们矩阵指数之积, 即

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}, \text{或}\ \exp(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\exp(\boldsymbol{A})\exp(\boldsymbol{B}).$$

在一般情况下, $\exp(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\neq\exp(\boldsymbol{A})\exp(\boldsymbol{B})$.

**2. 矩阵乘法**

就像向量运算有 **点积** (Dot Product) 与 **叉积** (Cross Product) 一样, 矩阵乘法 (Matrix Multiplication) 有多种. 如果像矩阵加减法那样, 定义矩阵乘法为两个矩阵对应元相乘, 这就是 **Hadamard 积** (Hadamard product). 通常的 **矩阵乘法** 定义为一个矩阵的列 (向量) 乘以另一个矩阵的行 (向量) 的积作为乘积矩阵的一个元, 这要求被乘矩阵的列数等于相乘矩阵的行数, 这种矩阵乘法用途最广泛, 用数学语言叙述如下. 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]\in\mathbb{F}^{n\times r}$, 它们的积 $\boldsymbol{AB}$ 是一个 $m\times r$ 维矩阵. 令 $\boldsymbol{C}:=\boldsymbol{AB}=[c_{ij}]\in\mathbb{F}^{m\times r}$, 有时直接把 $\boldsymbol{AB}$ 的第 $(i,j)$ 元写作 $(\boldsymbol{AB})_{ij}$, 那么有

$$(\boldsymbol{AB})_{ij}=c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\quad i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,r.$$

如果把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用行向量表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_m\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{m\times n},\ \boldsymbol{a}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\in\mathbb{F}^{1\times n},\quad i=1,2,\cdots,m,$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 用列向量表示为

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r)\in\mathbb{F}^{n\times r},\ \boldsymbol{b}_j=\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{n},\ j=1,2,\cdots,r,$$

那么矩阵乘法可以表示为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\\boldsymbol{a}_2\\\vdots\\\boldsymbol{a}_m\end{pmatrix}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r)$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_r\\\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_r\\\vdots & \vdots & & \vdots\\\boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_r\end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_j)\in\mathbb{F}^{m\times r}.$$

乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$, 要求 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数. 显然, 矩阵乘法不满足交换律: $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$, 因为 $\boldsymbol{BA}$ 不一定满足维数要求, 故不可相乘. 即使都是方阵 (满足维数要求), 矩阵乘法一般也不满足 **交换律** (Commutative Law).

一个 $2\times 3$ 矩阵与一个 $3\times 2$ 矩阵相乘的例子如下. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{2\times 3},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\\b_{31} & b_{32}\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{3\times 2},$$

它们的乘积为

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{2\times 2},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22} & b_{11}a_{13}+b_{12}a_{23}\\b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22} & b_{21}a_{13}+b_{22}a_{23}\\b_{31}a_{11}+b_{32}a_{21} & b_{31}a_{12}+b_{32}a_{22} & b_{31}a_{13}+b_{32}a_{23}\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{3\times 3}.$$

对于方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 如果等式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 成立, 就称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 **可交换矩阵**.

读者可能觉得: 矩阵乘法的这种定义很特别, 然而这种定义无论在线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 求解, 还是在线性变换中都非常有用.

**矩阵乘法的性质**

(1) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 是相同维数的矩阵, $c$ 是一标量, 则有

① $\boldsymbol{ABC}=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$; $\quad\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$;

③ $\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{A}$;

④ $c\boldsymbol{AB}=c(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(c\boldsymbol{B})=(c\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$;

⑤ $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{k-1}=\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I}$, 其中 $k$ 为正整数.

(2) 矩阵数乘行列式与矩阵积的行列式. 如果 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 是方阵, $c$ 是一标量, 则有

① $\det[c\boldsymbol{A}]=c^n\det[\boldsymbol{A}]$;

② $\det[\boldsymbol{AB}]=\det[\boldsymbol{A}]\det[\boldsymbol{B}]$;

③ $\det[\boldsymbol{ABC}]=\det[\boldsymbol{A}]\det[\boldsymbol{B}]\det[\boldsymbol{C}]$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{F}^{n\times m}$, 则有

① $\det[\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{AB}]=\det[\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{BA}]$;

② $\det[\lambda \boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{AB}] = \lambda^{m-n} \det[\lambda \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{BA}]$.

(4) 矩阵乘积的范数不等式. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{C}$ 是适当维数的矩阵, $\det[\boldsymbol{X}] := |\boldsymbol{X}|$ 表示方阵 $\boldsymbol{X}$ 的行列式, 则有

① $\|\boldsymbol{AB}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$;

② $\|\boldsymbol{AB}\cdots\boldsymbol{C}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|\cdots\|\boldsymbol{C}\|$.

**柯西—施瓦茨不等式** (Cauchy-Schwarz Inequality)

定义矩阵 2- 范数 $\|\boldsymbol{A}\|_2 := \sqrt{\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}]}$ ($\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{X}$ 的转置矩阵), 即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素平方和开方, 也可以记作 $\|\boldsymbol{A}\|^2 := \mathrm{tr}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}]$. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都为实对角阵, 即

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}[a_1, a_2, \cdots, a_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \boldsymbol{B} = \mathrm{diag}[b_1, b_2, \cdots, b_n] \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

利用矩阵乘积的范数不等式, 我们可以得到 **柯西—施瓦茨不等式**:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2),$$

对于所有 $i$, 如果比值 $a_i : b_i$ 相同, 则不等式取等号. 同理, 可以推得实数域上的一般不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \cdots c_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \cdots \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

这是本书作者首次给出的不等式, 且把它称为 **广义柯西—施瓦茨不等式**. 如果不等式中每项都用模代替, 则该不等式在复数域也成立, 即

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \cdots c_i\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \cdots \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2.$$

**3. 逆矩阵**

如果方阵 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 与 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 满足关系 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_n$, 那么矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 **逆矩阵** (Inverse Matrix). 根据矩阵乘法, 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 则有 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的逆, 那么 $\boldsymbol{B}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的逆.

逆矩阵只是对于方阵存在, 对于非方阵, 稍后定义左逆和右逆.

逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在的前提条件是其行列式不等于零: $\det[\boldsymbol{A}] \neq 0$; 在这个条件下称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的, 或 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, 或 $\boldsymbol{A}$ 是 **非奇异矩阵** (Nonsingular Matrix).

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆可通过下式计算,

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\mathrm{adj}[\boldsymbol{A}]}{\det[\boldsymbol{A}]},$$

其中 $\mathrm{adj}[\boldsymbol{A}]$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 **伴随矩阵** (Adjoint Matrix). 这说明逆矩阵存在时, 其行列式不为零.

一种手工计算矩阵逆的方法是构造 **增广矩阵** (Augmented Matrix) $[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}]$, 然后使用 **高斯消元法** (Gaussian Elimination), 把它左半部分变换成单位阵 $\boldsymbol{I}$, 那么变换后增广矩阵的右半部分就是 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 也就是最后的矩阵为 $[\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{A}^{-1}]$. 这种方法实际上是用高斯消元法求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I}_n$, 因为解为 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

**例 2.1.1** 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 都可逆.

**解** 由给定的条件可得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{A}\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}}{2}=\boldsymbol{I}$. 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}).$$

同理, 有 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})+4\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 或

$$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\left[-\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\right]=\boldsymbol{I}.$$

故 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 可逆, 且

$$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}=-\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}).$$

**可逆矩阵的性质**

① 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是唯一的; $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$; $\det[\boldsymbol{A}^{-1}]=\{\det[\boldsymbol{A}]\}^{-1}$.

② 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

③ 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $c$ 为非零常数, 则 $c\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $(c\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{c}\boldsymbol{A}^{-1}$.

④ 方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都可逆, 则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆, 且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

⑤ 当方阵 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_m$ 都可逆时, 乘积矩阵 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m$ 也可逆, 且

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_{m-1}\boldsymbol{A}_m)^{-1}=\boldsymbol{A}_m^{-1}\boldsymbol{A}_{m-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

**4. 行初等变换求逆矩阵**

**定理 2.1.1** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵, 下列叙述等价:

① $\boldsymbol{A}$ 是可逆阵;

② $\boldsymbol{A}$ 等价于单位阵 $\boldsymbol{I}_n$;

③ $\boldsymbol{A}$ 可表示为一些初等矩阵的乘积.

当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 可用矩阵的逆求解矩阵方程: $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶可逆阵, $\boldsymbol{X}\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 则对 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 有 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 由于 $\boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=[\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}]$, 而 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可表示为一些初等矩阵的乘积, 因此把分块矩阵 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$ 进行行初等变换时, 在把子块 $\boldsymbol{A}$ 变为 $\boldsymbol{I}_n$ 的同时, 子块 $\boldsymbol{B}$ 也就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$, 这就是要求的 $\boldsymbol{X}$. 当然也可以由 $\boldsymbol{A}$ 先求出 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 再作矩阵乘法 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

在解矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 时, 则要右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$. 或者通过解方程 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$, 先求出 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$, 然后就可以求出 $\boldsymbol{X}$.

**5. 矩阵广义逆**

如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 与其逆满足关系 $\boldsymbol{AA}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$, 这种矩阵逆称为矩阵常规逆, 它要求 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异方阵. 当 $\boldsymbol{A}$ 是长方阵或奇异矩阵时, 我们把方阵的逆进行推广. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 把满足关系 $\boldsymbol{AA}^{-}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}^{-}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 **广义逆** (Generalized Inverse). 它是一个 $n\times m$ 维矩阵.

**例 2.1.2** 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

那么下列形式的矩阵,

$$A^- = \begin{pmatrix} 2 & -3 & a \\ -1 & 2 & b \\ c & d & e \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{C},$$

都是 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆. 这种广义逆是不唯一的.

在这个例子中, 如果 $a = b = c = d = e = 0$, 那么就得到 Moore-Penrose 广义逆的例子. **Moore–Penrose 广义逆** 是唯一的.

还是在这个例子中, 如果 $a = b = c = d = 0$, 但 $e$ 是任意的, 就得到 **Drazin 逆** (Drazin Inverse).

检验这个例子的 **MATLAB 程序** 如下.

```
1  %------------------------------------------------------------------------*
2  % Ding Feng (Feng Ding, F. Ding) 2008/03/23 Sunday                        *
3  % Filename: MCT_Generalized_Inverse01.m for generalized inverse           *
4  %------------------------------------------------------------------------*
5  %   Feng Ding (Ding Feng, F. Ding, Ding F.)                               *
6  %   School of Internent of Things Engineering                            *
7  %   Jiangnan University                                                  *
8  %   Wuxi, 214122, PR China                                               *
9  %   Email: fding@jiangnan.edu.cn                                         *
10 %   www.fding.org                                                        *
11 %   Copyright 2008-                                                      *
12 %   Revision Date:  2013/04/19  hh:mm:ss By Feng Ding                    *
13 %------------------------------------------------------------------------*
14  clear;             % Clear variables and functions from memory
15  format short g  % Set output format.
16  syms a b c d e real % Construct symbolic numbers, variables and objects
17  A=[2, 3, 0; 1, 2, 0; 0, 0, 0]
18  Ainv=[2, -3, a; -1, 2, b; c, d, e]  % Generalized inverse A^{-}
19  B=A*Ainv                                 % AA^-
20  C=A*Ainv*A                              % AA^-A
```

在 MATLAB 命令行输入上述程序, 或者把上述代码保存在一个扩展名为.m 的文本文件中, 如 MCT_Generalized_Inverse01.m, 在 MATLAB 中运行结果如下.

```
1  A =
2       2     3     0
3       1     2     0
4       0     0     0
5
6  Ainv =
7  [  2, -3,  a]
```

```
8  [ -1,  2,  b]
9  [  c,  d,  e]
10
11 B =
12 [         1,         0, 2*a+3*b]
13 [         0,         1,   a+2*b]
14 [         0,         0,       0]
15
16 C =
17 [ 2, 3, 0]
18 [ 1, 2, 0]
19 [ 0, 0, 0]
```

如果 $\boldsymbol{A}$ 是任一 $n \times n$ 实矩阵或复矩阵, 那么存在一个可逆矩阵 $\boldsymbol{B}$ 任意接近 $\boldsymbol{A}$, 即 $\|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\|$ 任意小. 这种接近距离是对于任意矩阵范数.

**6. Hadamard 积**

**Hadamard 积** 定义为两个矩阵对应元素相乘, 因此两个矩阵的维数必须相同. Hadamard 积用符号 "$\circ$" 表示. 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 那么它们的 Hadamard 积定义为

$$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=[a_{ij}]\circ[b_{ij}]=[a_{ij}b_{ij}]\in\mathbb{F}^{m\times n},$$

即 Hadamard 积矩阵的第 $(i,j)$ 元等于 $a_{ij}b_{ij}$. 两个 $2\times 3$ 矩阵的 Hadamard 积例子如下,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{13}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{23} \end{pmatrix}.$$

**Hadamard 积的性质**

(1) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 是相同维数的矩阵, $c$ 是一标量, 则有

① $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}$;

② $\boldsymbol{A}\circ(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{C}$;

③ $\boldsymbol{A}\circ(c\boldsymbol{B})=c(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})$.

(2) **Oppenheim 不等式** (Oppenheim Inequality): 如果 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正定矩阵, $a_{ii}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角线上元素, 那么 Hadamard 积的行列式满足不等式:

$$\det[\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}]\geqslant\det[\boldsymbol{B}]\prod_{i=1}^{n}a_{ii},$$

当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是一个对角阵, 不等式取等号.

两个 **幂级数** (Power Series) 的 Hadamard 积定义为它们的对应项相乘. 级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ix^i$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_ix^i$ 的 Hadamard 积定义为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ib_ix^i$. 这个定义用处不大.

**7. 直积**

**Kronecker 积** (Kronecker product) 用符号 "$\otimes$" 表示, 它不要求两个矩阵的维数相同. 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ 是 $r\times s$ 矩阵, 它们的 Kronecker 积是一个 $(mr)\times(ns)$

维矩阵:

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{2n}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{B} & a_{m2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mn}\boldsymbol{B} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{(mr)\times(ns)}.$$

根据定义, Kronecker 积不满足乘法交换律: $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A}$. Kronecker 积也称为 **直积** (Direct Product) 或 **张量积** (Tensor Product).

一个 $2\times 3$ 矩阵与一个 $3\times 2$ 矩阵的 Kronecker 积例子如下. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}.$$

则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}&=\begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & a_{13}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & a_{23}\boldsymbol{B} \end{pmatrix} \\ &=\left(\begin{array}{cc|cc|cc} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{13}b_{11} & a_{13}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{13}b_{21} & a_{13}b_{22} \\ a_{11}b_{31} & a_{11}b_{32} & a_{12}b_{31} & a_{12}b_{32} & a_{13}b_{31} & a_{13}b_{32} \\ \hline a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{23}b_{11} & a_{23}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{21} & a_{23}b_{22} \\ a_{21}b_{31} & a_{21}b_{32} & a_{22}b_{31} & a_{22}b_{32} & a_{23}b_{31} & a_{23}b_{32} \end{array}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A}&=\begin{pmatrix} b_{11}\boldsymbol{A} & b_{12}\boldsymbol{A} \\ b_{21}\boldsymbol{A} & b_{22}\boldsymbol{A} \\ b_{31}\boldsymbol{A} & b_{32}\boldsymbol{A} \end{pmatrix} \\ &=\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{11} & a_{13}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{12} & a_{13}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{11} & a_{23}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{12} & a_{23}b_{12} \\ \hline a_{11}b_{21} & a_{12}b_{21} & a_{13}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{22} & a_{13}b_{22} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{21} & a_{23}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{22} \\ \hline a_{11}b_{31} & a_{12}b_{31} & a_{13}b_{31} & a_{11}b_{32} & a_{12}b_{32} & a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{31} & a_{22}b_{31} & a_{23}b_{31} & a_{21}b_{32} & a_{22}b_{32} & a_{23}b_{32} \end{array}\right).\end{aligned}$$

**直积的性质**

(1) 设 $c$ 是一标量, $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 是适当维数的矩阵, 即满足加法、乘法等运算维数要求, 下列等式成立,

① $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,

② $\boldsymbol{A}\otimes(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}$,

③ $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\otimes\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{A}$,

④ $c(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=(c\boldsymbol{A})\otimes\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\otimes(c\boldsymbol{B})$,

⑤ $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\otimes(\boldsymbol{B}\boldsymbol{D})$,

⑥ $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})\otimes\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\otimes(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{C}$.

(2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵, 则有

$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\otimes\boldsymbol{B}^{-1}$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是 $m$ 和 $n$ 阶方阵, $\{\lambda_i,\ i=1,2,\cdots,m\}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\{\mu_j,\ j=1,2,\cdots,n\}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值, 那么 $\{\lambda_i\mu_j,\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n\}$ 是 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 的 $mn$ 个特征值, 且下列关系成立,

① $\det[\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}]=(\det[\boldsymbol{A}])^n(\det[\boldsymbol{B}])^m$,

② $\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}]=\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}]\mathrm{tr}[\boldsymbol{B}]$,

③ $\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}]=\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}]\mathrm{rank}[\boldsymbol{B}]$.

**8. Star 积 或 块矩阵内积**

**星积** (Star Product or $\star$ Product) 或称 D 积 (D Product), 是本书作者在推导一般矩阵迭代解法时, 引进的一种新的运算, 在简化迭代算法表达式时非常有用 [1, 15, 16]. 星积用符号 $\star$ 表示, 它不同于 Hadamard 积 (内积), 也不同于一般矩阵乘法. 令

$$\boldsymbol{X}:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\\boldsymbol{X}_2\\\vdots\\\boldsymbol{X}_p\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{(mp)\times n},\ \boldsymbol{Y}:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\\boldsymbol{Y}_2\\\vdots\\\boldsymbol{Y}_p\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{(np)\times m},$$

$$\boldsymbol{A}_i:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{1i}\\\boldsymbol{A}_{2i}\\\vdots\\\boldsymbol{A}_{pi}\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{(mp)\times m},\ \boldsymbol{F}:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}_1\\\boldsymbol{F}_2\\\vdots\\\boldsymbol{F}_p\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{(mp)\times n},$$

$$\boldsymbol{B}_i:=[\boldsymbol{B}_{1i},\boldsymbol{B}_{2i},\cdots,\boldsymbol{B}_{pi}]\in\mathbb{F}^{n\times(np)},$$

$$\boldsymbol{S}_A:=[\boldsymbol{A}_{ij}],\ \boldsymbol{S}_B:=[\boldsymbol{B}_{ij}],\ \boldsymbol{S}_{B^{\mathrm{T}}}:=[\boldsymbol{B}_{ij}^{\mathrm{T}}],\ \boldsymbol{S}_p:=[\boldsymbol{B}_{ij}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}_{ij}],\ i,\ j=1,2,\cdots,p.$$

**块矩阵星积** 定义为

$$\boldsymbol{X}\star\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\\boldsymbol{X}_2\\\vdots\\\boldsymbol{X}_p\end{pmatrix}\star\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\\boldsymbol{Y}_2\\\vdots\\\boldsymbol{Y}_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{Y}_1\\\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{Y}_2\\\vdots\\\boldsymbol{X}_p\boldsymbol{Y}_p\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_A\star\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{X}_1&\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{X}_2&\cdots&\boldsymbol{A}_{1p}\boldsymbol{X}_p\\\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{X}_1&\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{X}_2&\cdots&\boldsymbol{A}_{2p}\boldsymbol{X}_p\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{A}_{p1}\boldsymbol{X}_1&\boldsymbol{A}_{p2}\boldsymbol{X}_2&\cdots&\boldsymbol{A}_{pp}\boldsymbol{X}_p\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}\star\boldsymbol{S}_B=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}_{12}&\cdots&\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}_{1p}\\\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{B}_{22}&\cdots&\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{B}_{2p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{X}_p\boldsymbol{B}_{p1}&\boldsymbol{X}_p\boldsymbol{B}_{p2}&\cdots&\boldsymbol{X}_p\boldsymbol{B}_{pp}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_A\star\boldsymbol{S}_B=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1p}\boldsymbol{B}_{1p}\\\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2p}\boldsymbol{B}_{2p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{A}_{p1}\boldsymbol{B}_{p1}&\boldsymbol{A}_{p2}\boldsymbol{B}_{p2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{pp}\boldsymbol{B}_{pp}\end{pmatrix}.$$

**块矩阵星 Kronecker 积** (Block-Matrix Star Kronecker Product) 使用符号 “$\circledast$”, 定义为

$$\boldsymbol{S}_{B^{\mathrm{T}}} \circledast \boldsymbol{S}_A = \boldsymbol{S}_p.$$

星积运算优于矩阵乘法运算. 注意 $\boldsymbol{AB} \star \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \star \boldsymbol{C}) \neq (\boldsymbol{AB}) \star \boldsymbol{C}$. 一般 $\boldsymbol{A} \star \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \star \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} \star \boldsymbol{B} \star \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \star \boldsymbol{B}) \star \boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{A} \star (\boldsymbol{B} \star \boldsymbol{C})$.

**星积的性质**

令 $\boldsymbol{I}_{np\times n} = [\boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{I}_n, \cdots, \boldsymbol{I}_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{(np)\times n}$. 星积 (Star Product) 有下列性质.

① $\boldsymbol{I}_{np\times n}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X} \star \boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_p]\boldsymbol{Y} = \sum\limits_{i=1}^{p} \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{Y}_i.$

② $$\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{1i} \\ \boldsymbol{A}_{2i} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{pi} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{F}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{F}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{F}}_p \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{1i}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{B}_{2i}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_{pi}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{1i}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{B}_{1i} \\ \boldsymbol{A}_{2i}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{B}_{2i} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{pi}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{B}_{pi} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{F}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{F}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{F}}_p \end{pmatrix}\right\}.$$

③ $$\left\|(\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i)^{-1/2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{1i} \\ \boldsymbol{A}_{2i} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{pi} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{F}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{F}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{F}}_p \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{1i}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{B}_{2i}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_{pi}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}})^{-1/2}\right\|^2 \leqslant mn \left\|\begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{F}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{F}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{F}}_p \end{pmatrix}\right\|^2.$$

当块矩阵的维数都是一维, 则块矩阵星积退化 Hadamard 积. 使用块矩阵星积, 本书作者提出一般耦合矩阵 [1, 15, 16]

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{B}_{12} + \cdots + \boldsymbol{A}_{1p}\boldsymbol{X}_p\boldsymbol{B}_{1p} = \boldsymbol{F}_1, \\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}_{21} + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{B}_{22} + \cdots + \boldsymbol{A}_{2p}\boldsymbol{X}_p\boldsymbol{B}_{2p} = \boldsymbol{F}_2, \\ \quad\cdots \\ \boldsymbol{A}_{p1}\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}_{p1} + \boldsymbol{A}_{p2}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{B}_{p2} + \cdots + \boldsymbol{A}_{pp}\boldsymbol{X}_p\boldsymbol{B}_{pp} = \boldsymbol{F}_p. \end{cases}$$

可以简单写作

$$\boldsymbol{S}_A \star \boldsymbol{X} \star \boldsymbol{S}_B = \boldsymbol{F},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times m}$、$\boldsymbol{B}_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{F}_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是常数矩阵, $\boldsymbol{X}_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是未知矩阵.

### 2.1.3 分块矩阵

一个矩阵称为 **分块矩阵** (Partitioned Matrix or Block Matrix), 指它的 “元” 是由其他一些小矩阵构成的. 这些维数小的矩阵称为块 (Block) 或 **子矩阵** (Sub-matrix). 例如, 对于 $5\times 5$ 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 9 & 9 & 9 \\ 2 & 3 & 9 & 9 & 9 \\ 2 & 3 & 9 & 9 & 9 \end{array}\right),$$

通过定义一些小矩阵:

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{22} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix},$$

那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以写作

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}, \text{或 } \boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \hline \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{array}\right).$$

**1．分块矩阵运算**

分块矩阵运算与矩阵加法、减法、乘法规则一致, 但须满足维数一致. 例如两个分块矩阵的乘法规则如下,

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\\ \boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{A}_{32}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22}\\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22}\\ \boldsymbol{A}_{31}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{32}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{31}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{32}\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}.$$

**2．块对角矩阵**

块对角矩阵用符号 blockdiag 表示. 设 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 是方阵 (不一定维数相同), 它们构成的块对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 定义为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\text{blockdiag}[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_k]\\ &=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_k\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c|c|c}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ \hline & \boldsymbol{A}_2 & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & \boldsymbol{A}_k\end{array}\right),\end{aligned}$$

其中非对角块为零 (矩阵), 上面矩阵把零矩阵块 $\mathbf{0}$ 都省略了. 分块对角阵的维数是对角线上子矩阵维数之和. 在不致于混淆的情况下, 有时也将上述块对角矩阵简写成下面 3 种等价形式之一:

$$\text{blockdiag}(\boldsymbol{A}_i,\ i=1,2,\cdots,k),$$

$$\text{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_k),$$

$$\text{diag}(\boldsymbol{A}_i,\ i=1,2,\cdots,k).$$

有些资料上, 这种块对角阵也称为方阵 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 的 **直和** (Direct Sum), 直和用符号 "$\oplus$" 表示. 因此有

$$\text{blockdiag}(\boldsymbol{A}_i,\ i=1,2,\cdots,k)=\boldsymbol{A}_1\oplus\boldsymbol{A}_2\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{A}_k.$$

**3．块对角阵的幂**

块对角阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 次幂为

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_k^n\end{pmatrix}=:\text{blockdiag}(\boldsymbol{A}_1^n,\boldsymbol{A}_2^n,\cdots,\boldsymbol{A}_k^n);$$

块对角阵 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵指数为

$$\exp(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}\exp(\boldsymbol{A}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(\boldsymbol{A}_k)\end{pmatrix}.$$

**4. 舒尔补** (Schur Complement)

设矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 分别是维数为 $m\times m$、$m\times n$、$n\times m$ 和 $n\times n$, 矩阵

$$\boldsymbol{M} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

是一个 $(m+n)\times(m+n)$ 维矩阵. 如果矩阵 $\boldsymbol{D}$ 是可逆的, 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 中块 $\boldsymbol{D}$ 的 **舒尔补** $\boldsymbol{Q}_1$ 是一个 $m\times m$ 维矩阵, 定义为

$$\boldsymbol{Q}_1 := \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}.$$

类似地, 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的 (Invertible), 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 中块 $\boldsymbol{A}$ 的 **舒尔补**$\boldsymbol{Q}_2$ 是一个 $n\times n$ 维矩阵, 定义为

$$\boldsymbol{Q}_2 := \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$$

舒尔补源于部分高斯消去法, 在第 1 种情况 (即 $\boldsymbol{D}$ 可逆时), 它可用下三角块矩阵

$$\boldsymbol{T}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{pmatrix}$$

右乘 $\boldsymbol{M}$ 得到. 类似地, 在第 2 种情况 (即 $\boldsymbol{A}$ 可逆时), 它可用下三角块矩阵

$$\boldsymbol{T}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}$$

左乘 $\boldsymbol{M}$ 得到.

### 2.1.4 行列式的定义与计算

**行列式** (Determinant) 是一种代数运算 (Algebraic Operation), 它把方阵 $\boldsymbol{A}$ 映射为标量. 这个运算有许多重要性质. 例如, 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为零, 那么 $\boldsymbol{A}$ 就是奇异的 (奇异矩阵), 即 $\boldsymbol{A}$ 的逆不存在. 只有方阵才有行列式. 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}$$

的行列式记作 $\det[\boldsymbol{A}]$ 或 $|\boldsymbol{A}|$. 它们可表示为

$$\det[\boldsymbol{A}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \cdots a_{n\pi_n}.$$

上式中, $\pi$ 是对 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有排列 $S_n$ 求和, $\operatorname{sgn}(\pi)$ 代表排列的奇偶性 (Parity of the Permutation); 对于偶排列, $\operatorname{sgn}(\pi)=+1$; 对于奇排列, $\operatorname{sgn}(\pi)=-1$. 行列式共有 $n!$ 项求和.

这是行列式的定义, 通常行列式不用这个公式计算, 而是按行或按列用代数余子式展开进行计算. 例如, $2\times 2$ 矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$3\times 3$ 行列式有 $3! = 6$ 项, 其计算方式按第 1 行展开为

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad +(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

4 阶以上的行列式可以按这种方法类推计算. 这里使用了 **余子式**. 下面介绍子式和余子式.

英文中 minor 也可以说是一个选定行号和列号的子矩阵, 不一定是行列式, 可从上下文理解. 矩阵子式 (子矩阵) 似乎还没有一个标准符号, 一个可选的符号是 $[\boldsymbol{A}]_{K,L}$.

如果删去一个行列式中的某些行和列, 余下的称为 **余子式** (Cofactor). 余子式包含符号 $(-1)^{i+j}$ 就称为代数余子式, 这里 $i$ 和 $j$ 是被删去行和列的行号与列号.

**行列式性质**

① 矩阵与它转置的行列式相等, 即 $\det[\boldsymbol{A}] = \det[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}]$.

② 行列式的任意两行 (两列) 互换位置, 行列式的值改变符号.

③ 行列式等于任意一行 (列) 所有元素 $a_{ij}$ 与其对应的代数余子式 $A_{ij}$ 的乘积之和, 即按行展开如下,

$$\det[\boldsymbol{A}] = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

或按列展开如下,

$$\det[\boldsymbol{A}] = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj},\ j = 1, 2, \cdots, n.$$

④ 行列式中任意一行 (列) 的元与另一行 (列) 的相应元素的代数余子式的乘积之和等于零, 即当 $i \neq k$ 时, 有

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0,\ k \neq i,$$

或

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0,\ k \neq j.$$

⑤ 行列式一行 (列) 的公因子可以提到行列式符号的外面.

⑥ 若行列式的某一行 (列) 元都是两数之和, 则该行列式等于两个行列式之和.

⑦ 用常数乘行列式的某一行 (列) 的各元, 加到另一行 (列) 对应的元素上, 行列式的值不变.

⑧ 方阵乘积的行列式等于行列式的乘积. 也就是说, 对于任意两个方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$, 总有

$\det[\boldsymbol{AB}] = \det[\boldsymbol{A}]\det[\boldsymbol{B}]$.

⑨ 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{F}^n$ 和 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{F}^n$, $c$ 是一个标量, 则有

$$\det[\boldsymbol{A} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}] = \det[\boldsymbol{A}] + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{adj}[\boldsymbol{A}]\boldsymbol{a},$$

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & c \end{pmatrix} = c\det[\boldsymbol{A}] - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{adj}[\boldsymbol{A}]\boldsymbol{a},$$

其中 $\mathrm{adj}[\boldsymbol{A}]$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 **伴随矩阵** (Adjoint Matrix).

把满足 $\det[\boldsymbol{A}] \neq 0$ 的方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为非奇异的 (或非退化的) 矩阵, 否则就称为奇异的 (或退化的).

对于 $2\times 2$ 矩阵, 计算逆很简单. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

它的逆为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det[\boldsymbol{A}]}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

其中设行列式不为零: $\det[\boldsymbol{A}] = ad - bc \neq 0$.

下列一些说法是等价的:

① $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 是可逆矩阵 (Invertible Matrix);

② $\boldsymbol{A}$ 是可逆的 (Invertible);

③ $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的 (Nonsingular);

④ $\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵 (Nonsingular Matrix);

⑤ $\boldsymbol{A}$ 逆或 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在;

⑥ $\boldsymbol{A}$ 的行列式 (Determinant) 不等于零;

⑦ $\boldsymbol{A}$ 是满秩的, $\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}] = n$;

⑧ $\boldsymbol{A}$ 的列线性无关, $\boldsymbol{A}$ 的行线性无关;

⑨ $\boldsymbol{A}$ 没有零特征值;

⑩ $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

对于矩阵方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, 假设 $\det[\boldsymbol{A}] \neq 0$, 那么 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在, 上式两边左乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

根据矩阵逆的定义可得 $\boldsymbol{Ix} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$, 所以解为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. 这是一种很耗时的计算, 不鼓励这样计算, 通常是使用高斯消元法或 **LU 分解** 技术求解.

### 2.1.5 矩阵行列式性质

矩阵行列式有下列性质.

① 矩阵乘积的行列式等于矩阵行列式的乘积 (行列式运算把矩阵乘转换成标量乘), 即对于维数相同的方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 有

$$\det[\boldsymbol{AB}] = \det[\boldsymbol{A}]\det[\boldsymbol{B}].$$

② 下三角矩阵行列式 (上三角矩阵的行列式) 等于对角元的乘积.

③ 相似矩阵有相同的行列式. 对于方阵 $\boldsymbol{A}$ 和可逆矩阵 $\boldsymbol{X}$, 有

$$\det[\boldsymbol{XAX}^{-1}] = \det[\boldsymbol{A}].$$

④ 奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为零. 也就是说, 齐次方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解 $\boldsymbol{x}$.

⑤ 转置矩阵的行列式不变. 即对于方阵 $\boldsymbol{A}$, 有

$$\det[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}] = \det[\boldsymbol{A}].$$

⑥ 方阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 的行列式等于其所有特征值的乘积, 包括重特征值. 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, 则有

$$\det[\boldsymbol{A}] = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

⑦ 方阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 的行列式是齐次的 (Homogeneous), 其阶次为 $n$, 即

$$\det[c\boldsymbol{A}] = c^n \det[\boldsymbol{A}],\ c\text{是标数 (标量)}.$$

### 2.1.6　块矩阵行列式

块矩阵行列式有下列性质

① 如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 都是方阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵 (Nonsingular Matrix), 则有

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \det[\boldsymbol{A}]\det[\boldsymbol{D} - \boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}], \tag{2.1.1}$$

矩阵 $\boldsymbol{D} - \boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的舒尔补. 如果 $\boldsymbol{D}^{-1}$ 存在, 则有

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \det[\boldsymbol{D}]\det[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BD}^{-1}\boldsymbol{C}],$$

这里矩阵 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BD}^{-1}\boldsymbol{C}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的舒尔补.

② 如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 都是方阵, 则有

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \det[\boldsymbol{A}]\det[\boldsymbol{D}]$$

和

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \det[\boldsymbol{A}]\det[\boldsymbol{D}].$$

③ 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 都是 $n \times n$ 方阵, 令

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

由于矩阵乘积行列式等于矩阵行列式之积 $\det[\boldsymbol{MN}] = \det[\boldsymbol{M}]\det[\boldsymbol{N}]$, 所以

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{D} \end{pmatrix} \det[\boldsymbol{J}] = (-1)^n \det[\boldsymbol{A}] \det[\boldsymbol{D}].$$

最后一步利用了事实: $\det[\boldsymbol{J}] = 1$.

**性质①的证明** 当 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在时, 对下列矩阵等式两边取行列式,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix},$$

立即得证.

## 2.2 基本矩阵与特殊矩阵

### 2.2.1 对角矩阵、斜对角矩阵

#### 1. 对角矩阵或对角阵

对角阵 (Diagonal Matrix) 是一个方阵. 矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 称为对角阵或对角矩阵, 是指它的所有非主对角元都为 0. 从这个定义可知: 一个 $n \times n$ 对角阵完全由它的对角上 $n$ 元确定. 设对角元为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 那么对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

有时为方便起见, 把上述对角阵简单写作为

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n].$$

很明显, **单位阵** (Identity Matrix) 和 **零矩阵** (Zero Matrix) 是对角阵.

**对角矩阵的性质**

① 如果一个方阵 $\boldsymbol{A}$ 既是上三角阵, 又是下三角阵, 那么 $\boldsymbol{A}$ 是对角阵.

② 如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是相同维数的对角阵, 那么它们的和 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 与积 $\boldsymbol{AB}$ 也是对角阵; 它们还满足矩阵乘法交换律 (Commutation): $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$. 因此, 实对角矩阵或复对角矩阵是正则矩阵 (Normal Matrix).

③ 如果对角元不等于零, 对角矩阵的逆是对角阵, 其逆矩阵为

$$\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \mathrm{diag}[\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}] = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

对角阵的幂为

$$\boldsymbol{\Lambda}^k = \mathrm{diag}[\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k].$$

④ 对角阵 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 对应的特征向量是 $n$ 维单位向量. 对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的特征多项式为

$$p(s) = \det[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{\Lambda}] = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)\cdots(s - \lambda_n).$$

⑤ 对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的行列式等于对角元的乘积:

$$\det[\boldsymbol{\Lambda}] = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的迹为

$$\mathrm{tr}[\boldsymbol{\Lambda}] = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

⑥ 对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的 **矩阵指数** $\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}} =: \exp(\boldsymbol{\Lambda})$ 为

$$\exp(\boldsymbol{\Lambda}) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}} = \mathrm{diag}[\mathrm{e}^{\lambda_1}, \mathrm{e}^{\lambda_2}, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n}];$$

如果对角元都不为零, 对角阵的 **矩阵对数** 为

$$\mathrm{Ln}[\boldsymbol{\Lambda}] = 2k\pi\boldsymbol{I}\sqrt{-1} + \mathrm{diag}[\ln\lambda_1, \ln\lambda_2, \cdots, \ln\lambda_n],\ \ k \in \mathbb{Z},$$

主值为

$$\ln[\boldsymbol{\Lambda}] = \mathrm{diag}[\ln\lambda_1, \ln\lambda_2, \cdots, \ln\lambda_n].$$

**2. 斜对角矩阵**

方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为斜对角矩阵或 **斜对角阵** (Anti-Diagonal Matrix or Skew-Diagonal Matrix), 是指除斜对角线上元外, 其余元都为零. 斜对角阵具有下列形式,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & \cdots & a_3 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

将上述斜对角阵简单写作为

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{adiag}[a_1, a_2, \cdots, a_n].$$

其逆为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \mathrm{adiag}\left(\frac{1}{a_n}, \frac{1}{a_{n-1}}, \cdots, \frac{1}{a_1}\right).$$

**斜对角阵的性质**

① 两个斜对角阵之积是对角阵.

② 如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 分别是斜对角阵和对角阵, 那么 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{A}$ 都是斜对角阵.

③ 斜对角阵 $\boldsymbol{A} = \mathrm{adiag}[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 的行列式为

$$\det[\boldsymbol{A}] = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n} a_i.$$

因此有

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = 1.$$

④ 斜对角阵 $\boldsymbol{A} = \text{adiag}[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 的 **矩阵指数** 为

$$\exp[\boldsymbol{A}] = \text{diag}[\cos(a_1), \cos(a_2), \cdots, \cos(a_n)] + \text{adiag}[\sin(a_1), \sin(a_2), \cdots, \sin(a_n)].$$

**性质③的证明** 根据行列式的定义, 斜对角阵的行列式为

$$\det[\boldsymbol{A}] = \text{sgn}(n, n-1, \cdots, 1) \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

下一步就是确定正负号. 把符号 sgn 中最后一元素移到第 1 位置, 有 $n-1$ 次变号, 即

$$\text{sgn}(n, n-1, \cdots, 1) = (-1)^{n-1} \text{sgn}(1, n, n-1, \cdots, 2).$$

再把最后一个元素移到第 2 位置, 有 $n-2$ 次变号, 即

$$\text{sgn}(n, n-1, \cdots, 1) = (-1)^{n-1}(-1)^{n-2} \text{sgn}(1, 2, n, n-1, \cdots, 3).$$

重复这个过程, 直到

$$\text{sgn}(n, n-1, \cdots, 1) = (-1)^{n-1}(-1)^{n-2} \cdots (-1)^1 \text{sgn}(1, 2, \cdots, n-1, n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

于是有

$$\det[\text{adiag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)] = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

如果 $n$ 或 $n-1$ 是 4 的倍数, 符号为正, 否则为负. 当 $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \cdots$ 时, 符号依次为 $+, -, -, +, +, -, -, +, +, \cdots$.

当然, 也可以通过代数余子式计算:

$$\begin{aligned}
\det[\boldsymbol{A}] &= (-1)^{1+n} a_1 \text{adiag}[a_2, a_3, \cdots, a_n] \\
&= (-1)^{1+n}(-1)^{1+n-1} a_1 a_2 \text{adiag}[a_3, a_4, \cdots, a_n] \\
&= (-1)^{1+n}(-1)^{1+n-1}(-1)^{1+n-2} a_1 a_2 a_3 \text{adiag}[a_4, a_5, \cdots, a_n] \\
&= (-1)^{1+n}(-1)^{1+n-1}(-1)^{1+n-2} \cdots (-1)^2 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \\
&= (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_i = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_i.
\end{aligned}$$

### 2.2.2 奇异矩阵、三角阵

#### 1. 奇异矩阵

如果 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行或列是线性相关的 (不是线性无关的), 那么就说 $\boldsymbol{A}$ 是奇异的或奇异矩阵 (Singular Matrix). 下列说法是等价的.

① $\boldsymbol{A}$ 的行列式为零, $\det[\boldsymbol{A}] = 0$.

② $\boldsymbol{A}$ 的秩小于 $n$, $\text{rank}[\boldsymbol{A}] < n$.

③ 齐次线性系统 (Homogeneous Linear System) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解.

一个矩阵的行列式等于其所有特征值之积, 故奇异矩阵至少有一个特征值为零. 因为奇异矩阵的行列式为零, 故奇异矩阵是不可逆的 (Not Invertible), 奇异矩阵的 **条件数** (Condition Number) 是无穷大.

**2. 三角矩阵 或 三角阵**

**三角阵** (Triangular Matrix) 也是方阵, 是 **上三角阵** (Upper Triangular Matrix) 和 **下三角阵** (Lower Triangular Matrix) 的统称. 上三角阵也称为 **右三角阵** (Right Triangular Matrix), 下三角阵也称为 **左三角阵** (Left Triangular Matrix). 上三角阵 $\boldsymbol{U}$ 和下三角阵 $\boldsymbol{L}$ 具有下列形式.

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{L}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

在许多情况下, 三角阵使数值算法计算更快捷. 例如, 对于线性矩阵方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 三角阵, 则求解只需要 $n^2$ 次乘法运算和加法运算. 线性方程组的 **高斯消元法** (Gauss Elimination) 就是把系数矩阵化为 **三角阶梯形** (Echelon) 结构, 进行求解.

三角阵在线性代数和矩阵论中非常有用. 通过 **矩阵因子分解** (Matrix Factorization) 或 **矩阵分解** (Matrix Decomposition), 矩阵可以分解为三角形式因子. 例如, **Cholesky 分解** (Cholesky Factorization) 可以把一个对称正定矩阵分解为一个三角阵与其转置相乘; **LU 分解** (LU-factorization) 把一个矩阵分解为一个单位下三角阵与一个上三角阵之积.

对角线上元都为零的三角阵称为 **严格三角阵** (Strictly Triangular Matrix); 对角元都为 1 的三角阵称为 **单位三角阵** (Unit Triangular Matrix).

**三角矩阵的性质**

① 两个上 (下) 三角阵之积或和是上 (下) 三角阵.

② 三角阵的行列式等于对角元之积.

③ 三角阵的逆是三角阵 (假设逆存在).

④ 三角阵的特征值是对角元.

⑤ 严格三角阵是一个幂零矩阵. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 严格三角阵, 那么它的 $n$ 次幂为零矩阵: $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{0}$.

⑥ 严格三角阵 $\boldsymbol{U}_s$ 没有矩阵对数; 严格上三角阵

$$\boldsymbol{U}_s=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵指数为

$$\exp[\boldsymbol{U}_s]=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{U}_s+\frac{1}{2!}\boldsymbol{U}_s^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{U}_s^3+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\boldsymbol{U}_s^{n-1}.$$

它也是一个严格上三角阵.

### 2.2.3 置换矩阵、转置矩阵

**1. 置换矩阵或置换阵**

**置换阵** (Permutation Matrix) 是通过重排单位阵的行 (列) 得到的矩阵. 用置换阵 $\boldsymbol{P}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相当于重排 $\boldsymbol{A}$ 的行; 用置换阵 $\boldsymbol{P}$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相当于重排 $\boldsymbol{A}$ 的列.

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是通过交换单位阵 $\boldsymbol{I}_n$ 的两行 (第 $i$ 行和第 $j$ 行) 得到的置换阵, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行与第 $j$ 行交换就得到积 $\boldsymbol{PA}$; $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 列与第 $j$ 列交换就得到积 $\boldsymbol{AP}$.

**置换阵的性质**

① 置换阵是正交矩阵.

② 置换阵是可逆矩阵.

③ 置换阵的积是置换阵.

置换阵的例子:

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

它的第 1 行是单位阵的第 2 行, 它的第 2 行是单位阵的第 4 行, 它的第 3 行是单位阵的第 1 行, 它的第 4 行是单位阵的第 3 行, 所以 $\boldsymbol{P}$ 是一个置换阵. 用 $\boldsymbol{P}$ 左乘某个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 得到,

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&6&8\\1&3&5&7\\1&0&1&0\\-1&-2&-3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&5&7\\-1&-2&-3&-4\\4&2&6&8\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

注意: $\boldsymbol{PA}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的行, $\boldsymbol{AP}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的列, 但顺序不一样.

**2. 转置矩阵**

一个矩阵是矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 的转置矩阵 (Transpose Matrix), 是指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $(i,j)$ 元 $a_{ij}$ 调换到 $(j,i)$ 位置. $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵通常记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (也有的记作 $\boldsymbol{A}'$ 或 $\boldsymbol{A}^{\tau}$). 根据定义, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 $(i,j)$ 元是 $a_{ji}$, 即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=[a_{ji}]$. 对于一个 $m\times n$ 矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}_{m\times n},$$

它的转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&a_{3n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}_{n\times m}.$$

矩阵与其转置矩阵的第 $(i, i)$ 元相同, 都是 $a_{ii}$, $i = 1, 2, \cdots, \min[m, n]$. 矩阵转置不要求矩阵行数与列数相同, 即非方阵也有转置矩阵.

**转置矩阵的性质**

① 转置运算 (Transpose Operation) 具有线性算子性质

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}, \quad (c_1\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = c_1(\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}, \quad (c_1\boldsymbol{A} + c_2\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = c_1\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + c_2\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},$$

其中 $c_i$ 为常数, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 $m \times n$ 矩阵.

② 两个矩阵之积的转置等于它们转置的倒序乘积:

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

③ 矩阵转置的逆等于矩阵逆的转置. 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, 则有

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} =: \boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}.$$

④ 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 实矩阵, 即 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 都是非负定矩阵:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \geqslant 0, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \geqslant 0;$$

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的非零特征值.

⑤ 设 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的迹, 都等于 $\boldsymbol{A}$ 所有元的平方和:

$$\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}] = \mathrm{tr}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

⑥ 转置运算也适合于向量. 设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是 $n$ 维实列向量, 则它们的 **点积** (Dot Product) 可以表示为转置的乘积:

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}.$$

这意味着

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|_2^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2.$$

这是向量 **欧几里得范数** (Euclidean Norm) 平方的另一种定义.

### 2.2.4 对称矩阵、反对称矩阵、斜对称矩阵

**1. 对称矩阵**

$n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 是 **对称矩阵** (Symmetric Matrix) 或对称阵, 是指它的元满足关系 $a_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $j = 1, 2, \cdots, n$. $n$ 阶对称阵有 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个独立元素, 对称矩阵的例子如下,

$$\begin{pmatrix} s & -\sigma \\ -\sigma & s \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}, \quad \begin{pmatrix} s - a_1 & -b & -c \\ -b & s - a_2 & -d \\ -c & -d & s - a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times 3},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{4\times 4}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & g & h & i & j \\ c & h & m & n & o \\ d & i & n & s & t \\ e & j & o & t & y \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{5\times 5}.$$

**对称矩阵的性质**

① 对角矩阵是对称矩阵.

② 如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵.

③ 如果 $\boldsymbol{A}$ 是方阵, 那么 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 都是对称矩阵.

④ 两个实对称矩阵乘法可交换, 当且仅当两者的特征空间相同.

⑤ 任何方阵可以表示为一个对称阵与一个反对称阵之和, 因为

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2} + \frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}.$$

⑥ 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是对称阵, 那么 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是对称阵, 一般 $\boldsymbol{AB}$ 不是对称阵. 两个对称阵之积是对称阵, 当且仅当它们是乘法可交换阵 ($\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$).

⑦ 如果 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, $\boldsymbol{T}$ 的维数与 $\boldsymbol{A}$ 相同, 那么 $\boldsymbol{TAT}^{\mathrm{T}}$ 是一个对称矩阵.

⑧ 每个实方阵都可写作两个实对称矩阵的积, 每个复方阵都可写作两个复对称矩阵的积.

⑨ 用 $\langle\cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上内积, 即 $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$. 实矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称的, 当且仅当对于所有 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, 等式 $\langle \boldsymbol{Ax},\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{Ay}\rangle$ 成立.

**2. 反对称矩阵**

反对称距阵 (Anti-symmetric Matrix) 都是实方阵. 方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 称为**反对称阵**, 是指 $a_{ij}=-a_{ji}$, $i=1,2,\cdots,n$, $j=1,2,\cdots,n$. 因此, 反对称阵对角元为零, 因为 $a_{ii}=-a_{ii}$. 除 0 元素外, 反对称阵只有 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个独立元素. 反对称阵例子如下,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

注: 反对称阵的“反”是符号相反的意思, 而不是沿斜对角线对称.

反对称阵是复数域反赫米特矩阵 (Anti-Hermitian Matrix) 的特殊形式, 故反对称阵满足复数反赫米特矩阵的所有性质.

**反对称矩阵的性质**

① 一个矩阵同时为对称矩阵及反对称矩阵, 当且仅当所有元素都是零.

② 如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 是反对称阵. 或者说, 反对称矩阵满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$.

③ 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是反对称阵, 那么 $c_1\boldsymbol{A}+c_2\boldsymbol{B}$ 是反对称阵, 这里 $c_1$、$c_2$ 为标量.

④ 反对称阵的迹为零. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是反对称阵, 那么 $\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}]=0$.

⑤ 对于任意方阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是反对称矩阵.

⑥ 若 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵, 对任意向量 $\boldsymbol{x}$, 有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=0$.

⑦ 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个反对称阵, 矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 维数相同, 那么 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 是反对称阵.

⑧ 反对称阵的所有特征值的实部为零, 即特征值都是纯虚数或零. 证明参见反赫米特矩阵.

⑨ 奇数阶反对称阵的行列式为零. 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是反对称矩阵, 其行列式满足

$$\det[\boldsymbol{A}] = \det[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}] = \det[-\boldsymbol{A}] = (-1)^n \det[\boldsymbol{A}]$$

若 $n$ 是奇数, 则行列式等于零. 这个结果称为雅可比定理, 是卡尔・古斯塔夫雅各・雅可比 (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804—1851 年) 在 1827 年证明的. 他的主要贡献有线性方程组雅可比迭代求解方法和 **雅可比四平方和定理** (Jacobi's Four Square Theorem).

若 $n$ 是偶数, 反对称阵的行列式不为零, 如一个 2 阶反对称阵的行列式为

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

但是偶数阶反对称阵的行列式可以写成部分元素的多项式的平方: $\det[\boldsymbol{A}] = \mathrm{Pf}(\boldsymbol{A})$. 这个多项式称为 $\boldsymbol{A}$ 的 Pfaffian. 任意实反对称矩阵的行列式是非负数.

**3. 斜对称矩阵**

斜对称矩阵 (Skew-Symmetric Matrix) 沿斜对角线对称. $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 是 **斜对称矩阵** 或斜对称阵, 是指它的元素满足关系

$$a_{ij} = a_{n-j+1,n-i+1},\ i = 1, 2, \cdots, n,\ j = 1, 2, \cdots, n.$$

斜对称阵有 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个独立元素, 斜对称矩阵的例子如下.

$$\begin{pmatrix} s & -\sigma_1 \\ -\sigma_2 & s \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}, \quad \begin{pmatrix} s-a_1 & -b & -c_1 \\ -d & s-a_2 & -b \\ -c_3 & -d & s-a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times 3},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{41} & a_{31} & a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{4\times 4}.$$

读者可参见 http://en.wikipedia.org/wiki/Pfaffian 上反斜对称阵的性质. 当然, 可以定义反斜对称阵, 以及既对称又斜对称阵, 可以研究同时对称、反对称、斜对称、反斜对称阵的性质, 如对应行列式、特征值、特征多项式的性质.

既对称又斜对称矩阵的例子如下,

$$\begin{pmatrix} s & -\sigma \\ -\sigma & s \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & b \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times 3},$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & f & g & c \\ c & g & f & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{4\times 4}.$$

从这例子可以看出, 2 阶对称又斜对称矩阵有 2 个独立元素、3 阶对称又斜对称矩阵有 4 个独立元素、4 阶对称又斜对称矩阵有 6 个独立元素. 笔者给出一般 $n$ 阶对称又斜对称矩阵的独立元素数目为

$$N := \begin{cases} (n^2+2n)/4, & n\text{为偶数}, \\ (n+1)^2/4, & n\text{为奇数}. \end{cases}$$

读者可以研究对称又斜对称矩阵的行列式的计算公式, 以及随维数递增的行列式之间的关系.

### 2.2.5 共轭矩阵、Hermitian 矩阵

这里先介绍复数与共轭复数, 然后介绍复共轭矩阵.

**1. 复数与共轭复数**

设 $z \in \mathbb{C}$ 是一个复数 (Complex Number), 其实部 (Real Part) 为 $a$, 虚部 (Imaginary Part) 为 $b$, 即

$$z = a + b\mathrm{j},$$

其中 $a$ 和 $b$ 都为实数, 正体 $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ 为虚数单位. $z$ 的 **共轭复数** (Conjugate Complex Number) 定义为

$$\overline{z} = a - b\mathrm{j}.$$

很明显, $z+\overline{z}$ 为实数, $\overline{z}-z$ 为虚数. 复数 $z$ 的模 (Complex Modulus) $|z|$ 是一个非负实数, 定义为

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2} = |\overline{z}|.$$

**2. 共轭矩阵**

设 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 是一个复数矩阵, 即 $\boldsymbol{A}$ 的元为复数. 那么 $\boldsymbol{A}$ 的**共轭矩阵** (Conjugate Matrix) 定义为

$$\overline{\boldsymbol{A}} = [\overline{a_{ij}}] \in \mathbb{C}^{m\times n}.$$

共轭向量也有类似的定义, 如复数列向量 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^n$ 的共轭向量定义为

$$\overline{\boldsymbol{x}} = [\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^n.$$

**3. 共轭转置矩阵**

复矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 的共轭转置矩阵 (Conjugate Transpose Matrix) 定义为共轭矩阵的**转置** (transpose). 共轭转置矩阵用 $\boldsymbol{A}^*$ 表示, 所以有

$$\boldsymbol{A}^* = (\overline{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}.$$

设 $c$ 是一个复数, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是适当维数的矩阵, **共轭矩阵的性质**有

① $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}=\boldsymbol{A}$, $\overline{c\boldsymbol{A}}=\bar{c}\overline{\boldsymbol{A}}$, $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}$, $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}$,

② $\overline{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}=(\overline{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{tr}[\overline{\boldsymbol{A}}]=\overline{\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}]}$, $\det[\overline{\boldsymbol{A}}]=\overline{\det[\boldsymbol{A}]}$, $(\overline{\boldsymbol{A}})^{-1}=\overline{\boldsymbol{A}^{-1}}$,

③ $\boldsymbol{A}+\overline{\boldsymbol{A}}$ 是一个实矩阵,

④ $(\boldsymbol{A}^*)^*=\boldsymbol{A}$, $(c\boldsymbol{A})^*=\bar{c}\boldsymbol{A}^*$, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$, $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$,

⑤ $\boldsymbol{A}^*=\overline{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}$, $\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}^*]=\overline{\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}]}$, $\det[\boldsymbol{A}^*]=\overline{\det[\boldsymbol{A}]}$, $(\boldsymbol{A}^{-1})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$,

⑥ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*$ 的迹是实数.

**4. Hermitian 矩阵**

矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 称为 **赫米特矩阵**(Hermitian Matrix), 是指它满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*$.

赫米特矩阵是在 Charles Hermite (1822—1901 年) 时命名的. 赫米特在 1855 年证明了赫米特矩阵的特征值是实数. 赫米特矩阵的例子,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{j} & 1+2\mathrm{j} & 1+3\mathrm{j} \\ 1-\mathrm{j} & 2 & 2+2\mathrm{j} & 2+3\mathrm{j} \\ 1-2\mathrm{j} & 2-2\mathrm{j} & 3 & 3+3\mathrm{j} \\ 1-3\mathrm{j} & 2-3\mathrm{j} & 3-3\mathrm{j} & 4 \end{pmatrix}$$

这个矩阵也是正规矩阵.

**Hermitian 矩阵的性质**

① 如果 $\boldsymbol{A}$ 是赫米特矩阵, $c$ 是实数, 则 $c\boldsymbol{A}$ 也是赫米特矩阵;

② 如果 $\boldsymbol{A}$ 是方阵, 那么 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*$ 是赫米特矩阵;

③ 对于 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ 和 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ 都是赫米特矩阵;

④ 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是同维数赫米特矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是赫米特矩阵;

⑤ 赫米特矩阵的特征值是实数. 实对称阵是赫米特矩阵;

⑥ 赫米特矩阵的对角元是实数; 赫米特矩阵的迹是实数;

⑦ 赫米特矩阵的共轭是赫米特矩阵;

⑧ 如果 $\boldsymbol{A}$ 是赫米特矩阵, $\boldsymbol{T}$ 的维数与 $\boldsymbol{A}$ 相同, 那么 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^*$ 是一个赫米特矩阵;

⑨ 用 $\langle\cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 上内积, 即 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y}$. 矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是赫米特矩阵, 当且仅当对于所有 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n$, 等式 $\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\rangle$ 成立.

**5. 反赫米特矩阵**

一个方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是 **反赫米特矩阵**(Anti-Hermitian Matrix), 是指它满足 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^*$.

**反赫米特矩阵的性质**

① 反赫米特矩阵的迹为纯虚数或零.

② 反赫米特矩阵的特征值为纯虚数或零.

**证明** 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $x_{ij}$ 和 $y_{ij}$ 是矩阵元素 $a_{ij}$ 的实部和虚部, 即 $a_{ij}=x_{ij}+\mathrm{j}y_{ij}$. 根据定义有, $a_{ii}=-\overline{a_{ii}}$, 即 $x_{ii}+\mathrm{j}y_{ii}=-x_{ii}+\mathrm{j}y_{ii}$, 所以有 $x_{ii}=0$. 又

$$\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}]=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}x_{ii}+\mathrm{j}y_{ii}=\mathrm{j}\sum_{i=1}^{n}y_{ii}.$$

性质①证毕. 下面证明性质②. 设 $\boldsymbol{x}$ 是对应于反赫米特矩阵 $\boldsymbol{A}$ 特征值 $\lambda$ 的单位特征向量 ($\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x}=1$), 按照定义有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$. 两边左乘以 $\boldsymbol{x}^*=\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}$ 得到

$$\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x}=\lambda.$$

两边取共轭得到

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^*\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\\&=(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

这个等式说明 $\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为纯虚数, 所以特征值为纯虚数.

### 2.2.6 正定矩阵、正交矩阵、酉矩阵

**1. 正定矩阵**

正定矩阵、负定矩阵、正半定矩阵 (非负定阵)、负半定矩阵 (非正定阵) 都是对实对称方阵而言.

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个 $n\times n$ 对称实方阵. 如果对任意非零实向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$ 成立, 那么 $\boldsymbol{A}$ 是 **正定矩阵** (Positive Definite Matrix), 正定矩阵的特征值都大于零; 如果对任意非零实向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geqslant 0$ 成立, 那么 $\boldsymbol{A}$ 称为 **正半定阵** (**非负定阵**). 正半定矩阵 (Positive Semi-definite Matrix) 的特征值都大于或等于零.

如果 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 那么 $-\boldsymbol{A}$ 为 **负定矩阵**; 如果 $\boldsymbol{A}$ 为正半定矩阵, 那么 $-\boldsymbol{A}$ 为 **负半定矩阵** (**非正定阵**).

**正定矩阵的判断方法**:

(1) 如果对称矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的特征值都为正数, 那么 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵; 如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为非负数, 那么 $\boldsymbol{A}$ 为非负定矩阵.

(2) 如果对称矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的各阶顺序主子式的行列式都大于零, 即

$$a_1>0,\quad \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}>0,\quad\cdots,$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}>0,$$

那么 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵. 如果上述大于号 “>” 改为”⩾”, 那么 $\boldsymbol{A}$ 为非负定矩阵.

**2. 正交矩阵**

实数域上, 一个 $n\times n$ 实矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 称为正交矩阵 (Orthogonal Matrix), 是指它满足 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$. 此式等价于

$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}.$$

正交矩阵的行或列构成一个 **正交规范基** (Orthonormal Basis), 因为正交矩阵的两个不同行的内积是零, 同一行的内积为 1. 正交矩阵在线性代数中非常重要, 典型的正交矩阵是

Givens 旋转 (Givens Rotations) 和 Householder 变换 (Householder Transformations). 这些变换不会放大舍入误差而影响数值稳定性.

**正交矩阵的性质**

① 正交矩阵的行列式等于 1 或 $-1$, 即 $\det[\boldsymbol{Q}] = \pm 1$.

② 正交变换下内积保持不变, 因为 $(\boldsymbol{Qx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Qy} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Qy} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$.

③ 正交变换的欧几里得范数不变: $\|\boldsymbol{Qx}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$. 因此, 最小二乘问题 $\boldsymbol{Ax} \approx \boldsymbol{b}$ 两边乘以正交矩阵 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$, 得到一个等价问题 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} \approx \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$; 两个问题有相同的解. 换句话说, 如果 $\boldsymbol{Q}$ 不是正交矩阵, 则两个问题的解不同.

④ $2 \times 2$ 的 **旋转矩阵** (Rotation Matrix) 和 **反射矩阵** (Reflection Matrix) 是正交阵, 它们分别是

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

⑤ 正交矩阵定义在实数域上, 正交矩阵是复数域上酉阵的特殊情形, 因为对于正交矩阵 $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 有 $\overline{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$. 参见酉矩阵.

### 2.2.7 特殊矩阵

#### 1. 范德蒙矩阵

范德蒙矩阵 (Vandermonde Matrix) 在多项式插值和多项式拟合、友矩阵对角化、快速傅里叶变换 (Fast Fourier Transform, FFT) 中非常有用.

一个 $n \times n$ 范德蒙矩阵具有下列形式.

$$\boldsymbol{V}(x_1, x_2, \cdots, x_n) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

范德蒙矩阵的行列式为

$$\det[\boldsymbol{V}(x_1, x_2, \cdots, x_n)] = \det[x_i^{j-1}] = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i).$$

**广义范德蒙矩阵** (The Generalized Vandermonde Matrix) 定义为

$$\boldsymbol{V}_n := [a_i^{b_j}] := \begin{pmatrix} a_1^{b_1} & a_1^{b_2} & \cdots & a_1^{b_n} \\ a_2^{b_1} & a_2^{b_2} & \cdots & a_2^{b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^{b_1} & a_n^{b_2} & \cdots & a_n^{b_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}.$$

至今还没有找到 **广义范德蒙矩阵的行列式** 的通式解.

设 $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$, 则广义范德蒙矩阵的行列式总是正数: $\det[\boldsymbol{V}_n] > 0$. 这意味着 $\boldsymbol{V}_n$ 的所有主子式 (Principal Subminors) 的行列式都大于零.

本书作者给出推广了的特殊 $n\times n$ 矩阵 (有些类似范德蒙矩阵),

$$\boldsymbol{D}(x_1,x_2,\cdots,x_n):=\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^3 & x_1^5 & \cdots & x_1^{2n-3}\\ 1 & x_2 & x_2^3 & x_2^5 & \cdots & x_2^{2n-3}\\ 1 & x_3 & x_3^3 & x_3^5 & \cdots & x_3^{2n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^3 & x_n^5 & \cdots & x_n^{2n-3}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}(x_1,x_2,\cdots,x_n):=\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & x_1^4 & \cdots & x_1^{2^{n-2}}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^4 & \cdots & x_2^{2^{n-2}}\\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^4 & \cdots & x_3^{2^{n-2}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^4 & \cdots & x_n^{2^{n-2}}\end{pmatrix},$$

还有从范德蒙矩阵中去掉一列或几列, 再加一列或几列得到的矩阵, 如

$$\boldsymbol{V}'(x_1,x_2,\cdots,x_n):=\begin{pmatrix}1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n\\ 1 & x_3^2 & x_3^3 & \cdots & x_3^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{V}''(x_1,x_2,\cdots,x_n):=\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^3 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n\\ 1 & x_3 & x_3^3 & \cdots & x_3^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^3 & \cdots & x_n^n\end{pmatrix}.$$

笔者认为: 这些特殊矩阵 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 的行列式应该有通式解, 值得研究. 可先计算下列 4 阶矩阵的行列式找规律:

$$\boldsymbol{D}(x_1,x_2,x_3,x_4):=\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^3 & x_1^5\\ 1 & x_2 & x_2^3 & x_2^5\\ 1 & x_3 & x_3^3 & x_3^5\\ 1 & x_4 & x_4^3 & x_4^5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}(x_1,x_2,x_3,x_4):=\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & x_1^4\\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^4\\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^4\\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^4\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{V}'(x_1,x_2,x_3,x_4):=\begin{pmatrix}1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4\\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4\\ 1 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4\\ 1 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{V}''(x_1,x_2,x_3,x_4):=\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^3 & x_1^4\\ 1 & x_2 & x_2^3 & x_2^4\\ 1 & x_3 & x_3^3 & x_3^4\\ 1 & x_4 & x_4^3 & x_4^4\end{pmatrix}.$$

**2. 胡尔维茨矩阵**

一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 **胡尔维茨矩阵** (Hurwitz Matrix), 是指它的所有特征值有严格的负实部, 即 $\mathrm{Re}[\lambda_i]<0$. 胡尔维茨矩阵必须是方阵. 这样的矩阵也称为 **稳定矩阵** (Stable Matrix or Stability Matrix), 因为线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是稳定的. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是系统的 **平衡点** (Equilibrium Point). 只要 $\boldsymbol{A}$ 稳定, 在任意初始值 $\boldsymbol{x}(0)$ 下, $\boldsymbol{x}(t)$ 总是收敛到 $\boldsymbol{0}$.

如果多项式 $p(s)$ 是稳定的, 即 $p(s)$ 的零点或 $p(s)=0$ 的所有根具有负实部, 那么 $p(s)$ 就称为胡尔维茨多项式 (Hurwitz Polynomial). 如果有理传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}(s)\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 的各元的极点 (即各元分母多项式的零点) 都有负实部, 那么 $\boldsymbol{G}(s)$ 就称为 Hurwitz 矩阵多项式.

注：并没有要求 $\boldsymbol{G}(s)$ 是方阵; 也不是说对某个具体的 $s$ 值, $\boldsymbol{G}(s)$ 是胡尔维茨矩阵.

我们说 $\boldsymbol{A}$ 是胡尔维茨矩阵, 指 **动态系统** (Dynamic System)

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\end{cases}$$

是稳定的, 即系统有一个稳定的传递矩阵 (传递函数).

**3. 海赛矩阵**

设 $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是一个实值函数, 具有二阶偏导数 (Second Order Partial Derivative). 函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=:f(\boldsymbol{x})$ 的 **海赛矩阵** (Hessian Matrix) 定义为

$$\boldsymbol{H}(f):=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

在一定条件下, 混合偏导数 (Mixed Partial Derivatives) 相等, 海赛矩阵是一个对称矩阵.

**4. 幂零矩阵**

一个方阵 $\boldsymbol{A}$ 是 **幂零矩阵** (Nilpotent Matrix), 是指存在一个正整数 $k$ 使得 $\boldsymbol{A}^k$ 为零矩阵, 即

$$\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}_{k\text{个}}=\boldsymbol{0}.$$

显然有 $\boldsymbol{A}^{k+i}=\boldsymbol{0},\ i=1,2,3,\cdots$.

**定理 2.2.1　幂零矩阵的特征** (Characterization of Nilpotent Matrices)

一个矩阵为幂零矩阵, 当且仅当它的所有特征值为零.

**证明**　假设 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$. 令 $\lambda$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 那么对于某个非零向量 $\boldsymbol{x}$, 有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$. 通过递推归纳可得

$$\lambda^k\boldsymbol{x}=\lambda^{k-1}(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda^{k-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},$$

所以 $\lambda=0$. 相反, 假设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的所有特征值都为零, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\det[\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=\lambda^n.$$

根据凯莱—哈密尔顿定理 3.4.1, 可知 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{0}$.

**幂零矩阵的性质**

① 对于 $2\times 2$ 非零矩阵 $\boldsymbol{A}$, 如果 $\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$.

② 幂零矩阵的 **相似矩阵** (Similarity Matrix) 是幂零矩阵.

③ 因为矩阵行列式等于特征值的乘积, 所以幂零矩阵的行列式为零; 矩阵迹等于特征值之和, 故幂零矩阵的迹为零.

④ 一类幂零矩阵是 **严格上三角阵** (Strictly Upper Triangular Matrix) 和 **严格下三角阵** (Strictly Lower Triangular Matrix). 参见 2.2.2 节三角阵.

**5. 幂等矩阵**

一个方阵 $\boldsymbol{A}$ 是 **幂等矩阵** (Idempotent Matrix), 是指 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$. 显然有 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}$, $k=2,3,4,\cdots$.

**幂等矩阵的性质**

① 一个矩阵为幂等矩阵, 当且仅当它的所有特征值为 0 或 1.

② 单位阵是一个幂等矩阵. 除单位阵外, 所有幂等矩阵都是奇异的.

③ 幂等矩阵总是可对角化的.

④ 幂等矩阵的迹 (主对角元之和) 总是等于矩阵的秩, 且为整数.

⑤ 单位阵减去幂等矩阵为幂等矩阵. 假设 $\boldsymbol{A}$ 为幂等矩阵, 我们有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^2=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}.$$

例如, $\boldsymbol{Q}_1:=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{Q}_2:=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 都是幂等矩阵.

**6. 对角优势矩阵**

方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 是 **对角优势矩阵** (Diagonally Dominant Matrix), 是指对所有 $i=1,2,\cdots,n$, 下列不等式成立,

$$|a_{ii}|\geqslant\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|.$$

若“$\geqslant$”改为“$>$”, $\boldsymbol{A}$ 称为 **严格对角优势矩阵** (Strictly Diagonally Dominant Matrix). 这是行对角优势, 同样可定义列对角优势矩阵. 行对角优势和列对角优势统称为对角优势.

**定理 2.2.2** 莱维 – 德普朗克定理 (Levy-Desplanques Theorem)

一个严格对角优势矩阵是非奇异的: $\det[\boldsymbol{A}]\neq 0$.

**证明** 用反证法证明. 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 是严格对角优势矩阵, $\boldsymbol{A}$ 是奇异的, 即有一个特征值为零, 如 $\lambda=0$. 由 Gershgorin 定理可知, 存在一个 $i$ 使得

$$\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\geqslant|\lambda-a_{ii}|=|a_{ii}|.$$

这与严格对角矩阵定义矛盾. 定理得证.

**7. 正规矩阵**

一个复数矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 称为 **正规矩阵** (Normal Matrix), 是指它满足

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*,$$

即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 矩阵乘法可交换, 其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置矩阵. 根据定义, 正规矩阵必为方阵. 类似地, 对于实矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正规矩阵, 是指它满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 正规矩阵的例子如下,

$$\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & j\\ -j & 1\end{pmatrix},$$

其中 $a,b\in\mathbb{R}$.

**正规矩阵的性质**

① 如果 $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正规矩阵.

② 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 是乘积可交换, 那么它们都是正规矩阵.

③ 根据 **舒尔不等式** (Schur Inequality) 可知, 正规矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i[\boldsymbol{A}]|^2 = \mathrm{tr}[\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}],$$

其中 $\lambda_i[\boldsymbol{A}]$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

④ 复方阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个对角阵, 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 既是一个正规矩阵, 又是一个三角阵. 这可总结为下面的定理.

**定理 2.2.3 可交换矩阵定理** (Commutable Matrix Theorem)

设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是可交换矩阵. 如果 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 是可交换的; 如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都可逆, 那么 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 是可交换矩阵.

**证明** 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换假设, 可知 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 左边与右边都乘以 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 得到 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{AB}^{-1}$. 左边与右边都乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得到 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{BA}^{-1}$.

## 2.3 特征值问题: 特征多项式、特征方程、特征值

### 2.3.1 特征多项式和特征方程

**1. 特征多项式**

方阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 的 **特征多项式**(Characteristic Polynomial) 定义为矩阵 $s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ 的行列式:

$$p(s) := \det[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}] = \begin{vmatrix} s-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & s-a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{F}. \tag{2.3.1}$$

它是 $s$ 的一个 $n$ 次首 1 多项式.

**2. 特征方程**

**特征方程**(Characteristic Equation) 定义为 $p(s) = 0$, 即

$$\det[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}] = 0, \tag{2.3.2}$$

或

$$\begin{vmatrix} s-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & s-a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

**3. 特征值**

工程上, 矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 特征值简单定义为特征方程 $\det[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}] = 0$ 的根 $s_i$. $n$ 阶矩阵共有 $n$ 个特征值 $s_1, s_2, \cdots, s_n$, 可能包含重特征值. 实矩阵的特征值不一定是实数. 对称矩阵的特征值为实数.

数学上特征值的定义: 对于方阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 标量 $\lambda \in \mathbb{C}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 **特征值** (Eigenvalue), 是指存在一个非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 满足方程:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}. \tag{2.3.3}$$

特征值的线性变换几何解释: 一个向量 $\boldsymbol{x}$ 对 $\boldsymbol{A}$ 的作用不改变方向, 其幅值 (Magnitude) 增加 $\lambda$ 倍.

式 (2.3.3) 可以写成一个 **线性齐次方程** (Linear Homogeneous Equation) $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 如果这个方程有非零解 $\boldsymbol{x}$, 那么其系数矩阵的行列式为零, 即

$$\det[\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] = 0.$$

这个方程等同于式 (2.3.2) 的特征方程.

即使 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵, 即 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 其特征值也可能是复数, 并且实矩阵的复特征值以共轭形式成对出现. 例如,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det[s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}] = \begin{vmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + 1 = 0.$$

这个方程没有实数解, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 没有实数特征值, 只有两个 **共轭复数特征值** (Conjugate Complex Eigenvalue): $s = \lambda_1 = \sqrt{-1}$ 和 $s = \lambda_2 = -\sqrt{-1}$.

**特征值的性质**

① 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值, 因为 $\det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] = \det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}]$.

② 赫米特矩阵的特征值是实数. 对称矩阵的特征值是实数.

③ 反对称矩阵 (Anti-symmetric Matrix) 的特征值是虚数或零.

④ 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所有特征值都不同 (Distinct), 那么 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

### 2.3.2 特征向量

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 方阵, $\lambda$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 满足方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 的非零 $n$ 维列向量 $\boldsymbol{x}$, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 **特征向量** (Eigenvector). 从这个定义可知, 特征向量不是唯一的, 因为对于非零常数 $\alpha$, $\alpha\boldsymbol{x}$ 也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

对应于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}_i$ 通过求解 $(\boldsymbol{A} - \lambda_i\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{0}$ 或 $(\lambda_i\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{0}$ 得到. 这是求特征向量的一种方法, 但不是唯一的方法, 其他方法可参考 **奇异值分解** (**SVD 分解**).

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在 $n$ 个独立的特征向量 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于一个对角阵. 事实上, 将

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i,\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

写成紧凑形式为

$$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n] = [\lambda_1\boldsymbol{p}_1, \lambda_2\boldsymbol{p}_2, \cdots, \lambda_n\boldsymbol{p}_n],$$

或

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n] = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

定义由特征向量构成的矩阵

$$\boldsymbol{P} := [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于一个对角阵, 即

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n].$$

### 2.3.3 特征多项式

**定理 2.3.1 斜对角阵的特征多项式** (The Characteristic Polynomial of Skew-Symmetric Matrices)

$n \times n$ 斜对角阵 $\boldsymbol{A} = \mathrm{adiag}[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned} p(s) &:= \det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] \\ &= \begin{cases} (s^2 - a_1a_n)(s^2 - a_2a_{n-1})\cdots(s^2 - a_{(n-1)/2}a_{(n+3)/2})(s - a_{(n+1)/2}), & n\text{为奇数}, \\ (s^2 - a_1a_n)(s^2 - a_2a_{n-1})\cdots(s^2 - a_{n/2}a_{n/2+1}), & n\text{为偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

**定理 2.3.2 酉矩阵的特征多项式** (The Characteristic Polynomial of Companion Matrices)

4 个 $n \times n$ 酉矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix},$$

的特征多项式都为

$$p(s) := \det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n.$$

**辛矩阵**

一个实矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ 称为 **辛矩阵** (Symplectic Matrix), 是指它满足

$$\boldsymbol{AJA}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{J}, \tag{2.3.4}$$

其中

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}.$$

这是实数域中的辛矩阵的定义, 辛矩阵也可推广到复数域中. 这里矩阵 $\boldsymbol{J}$ 满足

$$\det[\boldsymbol{J}] = 1, \quad \boldsymbol{J}^{-1} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{J}.$$

辛矩阵的行列式等于 1.

**定理 2.3.3 辛矩阵的特征多项式** (The Characteristic Polynomial of Symplectic Matrices)

式 (2.3.4) 的辛矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式满足

$$p(s) := \det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] = s^n p(1/s).$$

**证明** 根据辛矩阵的定义: $\boldsymbol{AJA}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{J}$, 因为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 都是辛矩阵, 其行列式都为 1, 所以有

$$\begin{aligned} p(s) &= \det\{[s\boldsymbol{J} - \boldsymbol{AJ}]\boldsymbol{J}^{-1}\} = \det[s\boldsymbol{J} - \boldsymbol{AJ}] = \det[s\boldsymbol{AJA}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{AJ}] \\ &= \det\left[-s\boldsymbol{AJ}\left(-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{s}\boldsymbol{I}\right)\right] = \det\left[-s\boldsymbol{AJ}\left(-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{s}\boldsymbol{I}\right)\right] \\ &= \det[-s\boldsymbol{A}]\det[\boldsymbol{J}]\det\left(\frac{1}{s}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right) = s^n p\left(\frac{1}{s}\right). \end{aligned}$$

**定理 2.3.4 正交矩阵的特征多项式** (The Characteristic Polynomial of Northogonal Matrices)

正交矩阵 $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的特征多项式满足

$$p(s) := \det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}] = (-s)^n p(1/s).$$

**证明** 正交阵 $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_n$. 因为 $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$, $\det[\boldsymbol{Q}] = \pm 1$, 所以有

$$\begin{aligned} p(s) &= \det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}] \\ &= \det\left[s\boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{s}\boldsymbol{I}\right)\right] = \det[-s\boldsymbol{Q}]\det\left[\frac{1}{s}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\right] \\ &= \det[-s\boldsymbol{Q}]\det\left[\frac{1}{s}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}\right] = (-s)^n p\left(\frac{1}{s}\right). \end{aligned}$$

### 2.3.4 谱映射定理

**定义 2.3.1 矩阵的谱定义** (Matrix Spectra Definition)

矩阵特征值构成的集合称为矩阵的谱. 设方阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\cdots$, $\lambda_n$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的谱为 $\lambda[\boldsymbol{A}] = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, $\boldsymbol{A}$ 的特征值的绝对值或模最大者称为 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径 (Spectra Radius), $\boldsymbol{A}$ 的谱半径记为 $\rho(\boldsymbol{A})$, 所以有

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \max[|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_n|].$$

**定理 2.3.5 谱映射定理** (Spectra Map Theorem)

设方阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的谱为 $\lambda[\boldsymbol{A}] = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, 定义在某区域上的解析函数 $f(s)$, 那么矩阵 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$ 的谱为

$$\lambda[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})] = \{f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)\}.$$

也就是说, 矩阵 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$ 的特征值等于函数 $f(s)$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的特征值处的值.

从这个定理, 我们可以得到 **矩阵谱的性质**.

① $\boldsymbol{A}^2$ 的谱为 $\lambda[\boldsymbol{A}^2] = \{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2\}$.

② $\boldsymbol{A}^m$ 的谱为 $\lambda[\boldsymbol{A}^m] = \{\lambda_1^m, \lambda_2^m, \cdots, \lambda_n^m\}$.

③ 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 那么 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的谱为 $\lambda[\boldsymbol{A}^{-1}] = \left\{\dfrac{1}{\lambda_1}, \dfrac{1}{\lambda_2}, \cdots, \dfrac{1}{\lambda_n}\right\}$.

④ 设 $f(s)$ 为系数 $a_1$, $a_2$, $\cdots$, $a_m$ 的 $m$ 次多项式, 即

$$f(s) = s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \cdots + a_{m-1}s + a_m.$$

定义多项式矩阵

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^m + a_1\boldsymbol{A}^{m-1} + a_2\boldsymbol{A}^{m-2} + \cdots + a_{m-1}\boldsymbol{A} + a_m\boldsymbol{I}_m,$$

那么 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$ 的特征值为

$$f(\lambda_i) = \lambda_i^m + a_1\lambda_i^{m-1} + a_2\lambda_i^{m-2} + \cdots + a_{m-1}\lambda_i + a_m,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

## 2.4 矩阵秩、迹和基本引理

### 2.4.1 矩阵秩

矩阵的列秩定义为矩阵的线性无关列的最大数目; 矩阵的行秩定义为矩阵的线性无关行的最大数目. 矩阵的列秩总是等于矩阵的行秩. 因此, 矩阵的秩定义为矩阵的列秩或行秩. 矩阵秩用英文词 rank 表示, rank$[\boldsymbol{A}]$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 **秩** (rank).

**矩阵秩的性质**

① 设 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times r}$, 则有

$$\text{rank}[\boldsymbol{AB}] \leqslant \min\{\text{rank}[\boldsymbol{A}], \text{rank}[\boldsymbol{B}]\}.$$

② 设 $\boldsymbol{A}_i$ 的维数满足可相乘条件, 有

$$\text{rank}[\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k] \leqslant \min\{\text{rank}[\boldsymbol{A}_1], \text{rank}[\boldsymbol{A}_2], \cdots, \text{rank}[\boldsymbol{A}_k]\}.$$

③ 如果 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 都是可逆方阵, 那么

$$\text{rank}[\boldsymbol{A}] = \text{rank}[\boldsymbol{PA}] = \text{rank}[\boldsymbol{AQ}] = \text{rank}[\boldsymbol{PAQ}].$$

**性质①的证明** 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j$ 列为 $\boldsymbol{A}_{\cdot j}$, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 $i$ 行为 $\boldsymbol{B}_{i\cdot}$, 那么 $\boldsymbol{AB}$ 的第 $i$ 行 $(\boldsymbol{AB})_{i\cdot}$ 可表示为

$$(\boldsymbol{AB})_{i\cdot} = a_{i1}\boldsymbol{B}_{1\cdot} + a_{i2}\boldsymbol{B}_{2\cdot} + \cdots + a_{in}\boldsymbol{B}_{n\cdot},\ \ i = 1, 2, \cdots, m.$$

这说明, 矩阵乘积 $\boldsymbol{AB}$ 的行向量可由矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量线性表示, 所以 $\boldsymbol{AB}$ 的秩不大于 $\boldsymbol{B}$ 的秩. 类似地, $\boldsymbol{AB}$ 的第 $j$ 列 $(\boldsymbol{AB})_{\cdot j}$ 可以用 $\boldsymbol{A}$ 的列线性表示:

$$(\boldsymbol{AB})_{\cdot j} = b_{1j}\boldsymbol{A}_{\cdot 1} + b_{2j}\boldsymbol{A}_{\cdot 2} + \cdots + b_{nj}\boldsymbol{A}_{\cdot n},\ \ j = 1, 2, \cdots, r.$$

这说明 $\boldsymbol{AB}$ 的秩也不大于 $\boldsymbol{A}$ 的秩. 定理得证.

若 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 则 $\text{rank}[\boldsymbol{PA}] = \text{rank}[\boldsymbol{A}]$, $\text{rank}[\boldsymbol{PAP}^{-1}] = \text{rank}[\boldsymbol{A}]$, 因为

$$\text{rank}[\boldsymbol{A}] = \text{rank}[\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{PA}] \leqslant \text{rank}[\boldsymbol{PA}],$$

且

$$\text{rank}[\boldsymbol{PA}] \leqslant \text{rank}[\boldsymbol{A}].$$

### 2.4.2 矩阵迹

方阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 的迹 (Trace) 定义为其对角元之和, 用符号 $\text{tr}[\boldsymbol{A}]$ 表示. 如果

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

那么 $\boldsymbol{A}$ 的迹为

$$\text{tr}[\boldsymbol{A}] := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

**矩阵迹的性质**

① 矩阵转置和共轭转置的迹. 对于方阵 $\boldsymbol{A}$, 有 $\text{tr}[\boldsymbol{A}^{\text{T}}] = \text{tr}[\boldsymbol{A}]$, $\quad \text{tr}[\boldsymbol{A}^*] = \overline{\text{tr}[\boldsymbol{A}]}$.

② 矩阵和的迹等于矩阵迹的和, 即 $\text{tr}[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}] = \text{tr}[\boldsymbol{A}] + \text{tr}[\boldsymbol{B}]$.

③ 矩阵乘积的迹具有循环性 (Cyclic Property), 即

$$\text{tr}[\boldsymbol{AB}] = \text{tr}[\boldsymbol{BA}], \quad \text{tr}[\boldsymbol{ABC}] = \text{tr}[\boldsymbol{BCA}] = \text{tr}[\boldsymbol{CAB}].$$

因此, 不存在方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$.

④ 相似变换矩阵的迹不变, 即对于可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$, 有 $\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}]=\mathrm{tr}[\boldsymbol{TAT}^{-1}]$.

⑤ 矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的迹等于矩阵特征值 $\lambda_i[\boldsymbol{A}]$ 之和 (包括重特征值), 即

$$\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}]=\lambda_1[\boldsymbol{A}]+\lambda_2[\boldsymbol{A}]+\cdots+\lambda_n[\boldsymbol{A}].$$

⑥ 对于复矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 有

$$\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}]=\mathrm{tr}[\boldsymbol{AA}^*]=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2.$$

对于实矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 有

$$\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}]=\mathrm{tr}[\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}]=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2.$$

⑦ 设矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 的特征多项式 (Characteristic Polynomial) 为

$$p(s)=\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n,$$

则有 $\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}]=-a_1,\quad \det[\boldsymbol{A}]=(-1)^n a_n$.

⑧ 设方阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{F}^{n\times r}$, 那么矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的充要条件是 $\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}]=\mathrm{rank}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$.

⑨ 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是乘法可交换的, $k$、$r$ 为正整数, 那么 $\boldsymbol{A}^k$ 与 $\boldsymbol{B}^r$ 是乘法可交换的; 如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵, 且乘法可交换, $k$、$r$ 为整数, 那么 $\boldsymbol{A}^k$ 与 $\boldsymbol{B}^r$ 是可交换的.

⑩ 设 $\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}]=p$, $\mathrm{rank}[\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}]=q$, 则 $\mathrm{rank}[\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{I}]\leqslant p+q$.

**性质③的证明** 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times m}$, 根据迹的定义有

$$\mathrm{tr}[\boldsymbol{AB}]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}b_{ji}a_{ij}=\mathrm{tr}[\boldsymbol{BA}].$$

**性质⑩的证明** 因为 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})$, 所以

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}[\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{I}]&\leqslant\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})]+\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}]\\&\leqslant\mathrm{rank}[\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})]+\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}]=p+q.\end{aligned}$$

**例 2.4.1** 设方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$, $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$, 则有 $\mathrm{tr}[\boldsymbol{X}^k]=0$.

**证明** 由给定的条件, 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}^k&=(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})\boldsymbol{X}^{k-1}=\boldsymbol{ABX}^{k-1}-\boldsymbol{BAX}^{k-1}\\&=\boldsymbol{ABX}^{k-1}-\boldsymbol{BAXX}^{k-2}=\boldsymbol{ABX}^{k-1}-\boldsymbol{BXAX}^{k-2}\\&=\boldsymbol{ABX}^{k-1}-\boldsymbol{BX}^2\boldsymbol{AX}^{k-3}=\boldsymbol{ABX}^{k-1}-\boldsymbol{BX}^{k-1}\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

两边取迹, 根据性质③直接给出结论.

### 2.4.3 矩阵求逆引理

矩阵求逆引理和块矩阵求逆引理在控制论和系统辨识领域, 特别是在递推计算中, 有重要的用途.

**引理 2.4.1 矩阵求逆引理** (Matrix Inversion Lemma)

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{F}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{F}^{r\times n}$, 假设矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{\Lambda}$ 和 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$ 可逆, 则下列等式成立,

(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{C})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}$.

当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$ 时, 得到特殊等式:

① $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\Lambda})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{b}\in\mathbb{F}^{n}$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{c}\in\mathbb{F}^{1\times n}$ 时, 则有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b})^{-1}\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{-1},$$

或

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}}.$$

**引理 2.4.2 块矩阵求逆引理** (Block Matrix Inversion Lemma)

设可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 分块如下.

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 都是方阵. 令 $\boldsymbol{Q}_1 := \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$, $\boldsymbol{Q}_2 := \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_{21}$. 则下列两个等式成立.

(1) $$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1}+\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_1^{-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{Q}_1^{-1} \\ -\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{Q}_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

(2) $$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_2^{-1} & -\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_2^{-1} \\ -\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{Q}_2^{-1} & \boldsymbol{A}_2^{-1}+\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

块矩阵求逆引理将大矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的求逆转化为对小矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{Q}_1$, 或 $\boldsymbol{A}_2$ 和 $\boldsymbol{Q}_2$ 的求逆, 可以简化大量计算量. 特别地, 当 $\boldsymbol{B}_{12}=\boldsymbol{b}\in\mathbb{F}^{n}$ 是一个列向量, $\boldsymbol{A}_{21}=\boldsymbol{c}\in\mathbb{F}^{1\times n}$ 为一个行向量, $\boldsymbol{A}_2=\sigma\in\mathbb{F}$ 为标量, 这个公式可以进一步简化为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \sigma \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1}+\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{b}(\sigma-\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{b})^{-1}\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}_1^{-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{b}(\sigma-\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{b})^{-1} \\ -(\sigma-\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{b})^{-1}\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}_1^{-1} & (\sigma-\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{b})^{-1} \end{pmatrix}.$$

块矩阵求逆引理也可表示如下.

**引理 2.4.3 块矩阵求逆引理** (Block Matrix Inversion Lemma)

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 是适当维数的矩阵, 在假定有关矩阵可逆, 证明

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}.$$

### 2.4.4 奇异值分解

**奇异值分解** (Singular Value Decomposition) 简称 **SVD 分解**: 任何实 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能够分解成

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{U}$ 是一个 $m \times m$ 正交矩阵, $\boldsymbol{V}$ 是一个 $n \times n$ 正交矩阵, $\boldsymbol{S}$ 是唯一的 $m \times n$ 对角阵, 其对角元为非负实数 $\sigma_i$, $i = 1, 2, \cdots, \min(m, n)$, 且以**降序排列** (Descending Order):

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_{\min(m,n)} \geqslant 0.$$

$\sigma_i$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 **奇异值** (Singular Values).

$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 的前 $\min(m, n)$ 列分别是 $\boldsymbol{A}$ 的左奇异向量和右奇异向量, $\boldsymbol{S}$ 有下列形式,

$$\boldsymbol{S} = \begin{cases} (\boldsymbol{\Sigma},\ \boldsymbol{0}) \in \mathbb{R}^{m \times n}, & m < n, \\ \boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times m}, & m = n, \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, & m > n, \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是一个由奇异值 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{\min(m,n)}$ 构成的对角阵:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{\min(m,n)} \end{pmatrix}.$$

设 $m \geqslant n$, 如果 $r := \mathrm{rank}[\boldsymbol{A}] < n$, 那么

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0,$$

且 $\sigma_r \neq 0$, $\sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0$, 可以得到一个简化 SVD, $\boldsymbol{S}$ 为一个 $r \times r$ 矩阵, $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 也可进一步简化. SVD 能够确定矩阵的秩.

矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 **最小二乘解** (Least Squares Solution) 为

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}.$$

使用 SVD 分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$, 则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \\ &= (\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{V}^{-\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S})^{-1}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\\
&= \boldsymbol{V}(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S})^{-1}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\\
&= \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-2}[\boldsymbol{\Sigma},\ \boldsymbol{0}]\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\\
&= \boldsymbol{V}[\boldsymbol{\Sigma}^{-1},\ \boldsymbol{0}]\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}.
\end{aligned}
$$

### 2.4.5 正定矩阵的平方根分解

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是一个正定 Hermitean 矩阵. 那么有分解

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{*}\mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]\boldsymbol{P},$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 是一个酉矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

定义正定矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的平方根 (Square Root) 矩阵:

$$\boldsymbol{A}^{1/2} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}[\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}]\boldsymbol{P}.$$

**平方根矩阵的性质**

① $\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{A}^{1/2} = \boldsymbol{A}$.

② $\boldsymbol{A}^{1/2}$ 是 Hermitean 矩阵, 也是正定矩阵.

③ $\boldsymbol{A}^{1/2}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 是可交换的, $\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{1/2}$.

④ $(\boldsymbol{A}^{1/2})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{1/2}$.

⑤ $(\boldsymbol{A}^{1/2})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{1/2} = \boldsymbol{A}^{-1/2}$.

⑥ $\boldsymbol{A}^{1/2}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征向量.

⑦ $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 那么 $\boldsymbol{A}^{1/2}$ 的特征值是 $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}$.

## 2.5 矩阵变换

### 2.5.1 相似变换

**相似矩阵** (Similarity Matrix): 方阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于方阵 $\boldsymbol{B}$, 是指存在一个非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}$ 满足

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{B}.$$

并称 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 的变换为 **相似变换** (Similarity Transformation), 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 称为相似变换矩阵. 显然, $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$ (记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$), 那么 $\boldsymbol{B}$ 也相似于 $\boldsymbol{A}$, 因为 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{T}^{-1}]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}^{-1}$, 所以说 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 或 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}$ 是相似变换. 一个矩阵总是与自己相似.

相似变换的一个重要用途是可以把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 变换为对角阵或约当阵.

**相似矩阵的性质**

① 一个矩阵总是与自己相似, 即 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$.

② 如果 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}$ 又相似于 $\boldsymbol{C}$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 也相似于 $\boldsymbol{C}$, 因为

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{T}\boldsymbol{S})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}).$$

③ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与它的转置 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 总是相似的.

④ 相似矩阵有相同的秩, 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}] = \operatorname{rank}[\boldsymbol{B}]$.

⑤ 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 且 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{B}$ 也可逆, 且 $\boldsymbol{B}^{-1} \sim \boldsymbol{A}^{-1}$.

⑥ 若 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为可对角化矩阵.

⑦ 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, $c$ 为常数, 则 $c\boldsymbol{A} \sim c\boldsymbol{B}$.

⑧ 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, $k$ 为整数, 则 $\boldsymbol{A}^k \sim \boldsymbol{B}^k$.

⑨ 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, $f(\cdot)$ 为多项式, 则 $f(\boldsymbol{A}) \sim f(\boldsymbol{B})$.

⑩ 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $\exp(\boldsymbol{A}) \sim \exp(\boldsymbol{B})$.

⑪ 相似矩阵有相同的行列式、特征值、特征多项式, 因为

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}| = |\boldsymbol{T}^{-1}||\boldsymbol{B}||\boldsymbol{T}| = |\boldsymbol{T}|^{-1}|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{T}| = |\boldsymbol{B}|;$$

这里使用了公式 $\det[\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}] = \det[\boldsymbol{A}]\det[\boldsymbol{B}]$. 相似矩阵的特征多项式为

$$\begin{aligned} p(s) := \det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] &= \det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}] = \det\{\boldsymbol{T}^{-1}[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}]\boldsymbol{T}\} \\ &= \det[\boldsymbol{T}^{-1}]\det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}]\det[\boldsymbol{T}] = \det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}]. \end{aligned}$$

这说明相似矩阵有相同的特征多项式、相同的特征值.

### 2.5.2 矩阵对角化

我们说一个矩阵可对角化, 是指这个矩阵可以通过相似变换化为对角阵. 也就是说, 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化 (Diagonalizable), 那么必存在一个非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 是一个对角阵.

矩阵对角化是有条件的, 不是所有的矩阵都可对角化. 例如, 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是不可对角化的. 只有存在与矩阵维数相同数目的线性无关特征向量的矩阵才可对角化. 这个结论需要计算矩阵的特征向量. 下面是一些关于矩阵对角化的结论.

① 所有特征值都互异的矩阵都可对角化.

② 所有对称矩阵都可对角化.

③ 正规矩阵可以对角化.

④ 复数 Hermite 矩阵可对角化.

关于矩阵对角可参见 3.6.1 节的对角标准形实现. 矩阵对角化的例子如下.

**例 2.5.1** 研究 3 阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

是否可对角化? 如果可以, 就将这个矩阵对角化.

**解** 计算特征值. 令 $|s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}| = 0$, 即

$$\begin{vmatrix} s-1 & -2 & 0 \\ 0 & s-3 & 0 \\ -2 & 4 & s-2 \end{vmatrix} = 0.$$

按最后一列展开得到

$$(-1)^{3+3}(s-2)\begin{vmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s-3 \end{vmatrix} = 0,$$

或

$$(s-3)(s-2)(s-1) = 0.$$

这个矩阵有 3 个不同的特征值 $s_1 = 3$, $s_2 = 2$, $s_3 = 1$, 故可对角化.

根据 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i = s_i\boldsymbol{p}_i$, $i = 1、2、3$, 计算特征向量 $\boldsymbol{p}_i = \begin{pmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ p_{3i} \end{pmatrix}$.

(1) 对于 $s_1 = 3$, 则有

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix}.$$

展开得到

$$\begin{aligned} p_{11} + 2p_{21} &= 3p_{11}, \\ 3p_{21} &= 3p_{21}, \\ 2p_{11} - 4p_{21} + 2p_{31} &= 3p_{31}. \end{aligned}$$

这 3 个方程只有两个是独立的, 有无穷多解, 可取 $p_{11} = 1$, 求得 $p_{21} = 1$, $p_{31} = -2$, 所以

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(2) 对于 $s_2 = 2$, 则有

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix}.$$

展开得到

$$\begin{aligned} p_{12} + 2p_{22} &= 2p_{12}, \\ 3p_{22} &= 2p_{22}, \\ 2p_{12} - 4p_{22} + 2p_{32} &= 2p_{32}. \end{aligned}$$

同样, 这 3 个方程只有两个是独立的, 求得 $p_{22}=0$, $p_{12}=0$, 取 $p_{32}=1$, 所以

$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}p_{12}\\p_{22}\\p_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(3) 对于 $s_3=1$, 则有

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&0\\2&-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{13}\\p_{23}\\p_{33}\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}p_{13}\\p_{23}\\p_{33}\end{pmatrix}.$$

展开得到

$$\begin{aligned}p_{13}+2p_{23}&=p_{13},\\3p_{23}&=p_{23},\\2p_{13}-4p_{23}+2p_{33}&=p_{33}.\end{aligned}$$

同样这 3 个方程只有两个是独立的, 求得 $p_{23}=0$, 取 $p_{13}=1$ (不能取 $p_{13}=0$, 因为要让 $\boldsymbol{p}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 线性无关), 取 $p_{33}=-2$, 所以

$$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}p_{13}\\p_{23}\\p_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

由特征向量构成的特征矩阵为

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3]=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\-2&1&-2\end{pmatrix}.$$

因此有

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}&=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&0\\2&-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\-2&1&-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&3&0\\4&0&2\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\-2&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

如果重新排列特征向量矩阵

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1]=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\-2&1&-2\end{pmatrix}.$$

因此有

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}Q^{-1}AQ&=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&0\\2&-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\-2&1&-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&-1&0\\4&0&2\\0&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\-2&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}=:\Lambda.\end{aligned}$$

这个例子说明, 对角矩阵的特征值出现的顺序与特征值对应的特征向量在特征矩阵中排列的顺序一致.

**例 2.5.2** 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&0\\2&-4&2\end{pmatrix},$$

计算 $A^{100}$.

**解** 由例 2.5.1 可知

$$\begin{aligned}A&=Q\Lambda Q^{-1},\\A^2&=(Q\Lambda Q^{-1})(Q\Lambda Q^{-1})=Q\Lambda Q^{-1}Q\Lambda Q^{-1}=Q\Lambda^2Q^{-1},\\A^3&=A^2A=(Q\Lambda^2Q^{-1})(Q\Lambda Q^{-1})=Q\Lambda^2Q^{-1}Q\Lambda Q^{-1}=Q\Lambda^3Q^{-1},\\&\ \ \vdots\\A^{100}&=Q\Lambda^{100}Q^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\-2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}^{100}\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\-2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{100}&0\\0&0&3^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&3^{100}\\0&0&3^{100}\\-2&2^{100}&-2\times3^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&-1+3^{100}&0\\0&3^{100}&0\\-2+2^{101}&2-2\times3^{100}&2^{100}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

### 2.5.3 矩阵约当化

矩阵约当化参见 3.6.2 节, 以及例 3.6.4.

## 2.6 思考题

1. 判断矩阵的秩有哪些方法?
2. 求矩阵的逆有哪些方法?
3. 矩阵的迹与矩阵元、矩阵特征值有什么关系?
4. 矩阵的行列式和矩阵的特征值有什么关系?
5. 求矩阵的幂 $\boldsymbol{A}^k$ 有哪些方法?
6. 证明对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值为实数, 必存在正交矩阵将其对角化.
7. 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值, 且所有特征值都互异, 那么 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.
8. 设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的特征值为 $1, 2, \cdots, n$, 计算行列式 $\det\left(\boldsymbol{A} - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{I}\right)$, 矩阵 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 是否可对角化.
9. 设 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 是对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同特征值 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 对应的特征向量, 那么 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 正交, 即 $\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_2 = 0$.
10. 设 $\lambda$ 和 $p(s)$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征多项式, $f(\cdot)$ 是一个多项式, 求 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值和特征多项式.
11. 设 $\lambda[\boldsymbol{A}]$ 是方阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的特征值, $\lambda_{\min}[\boldsymbol{X}]$ 和 $\lambda_{\max}[\boldsymbol{X}]$ 是对称方阵 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的最小和最大特征值, 那么下列不等式成立,
    (1) $\lambda_{\min}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}] \leqslant |\lambda[\boldsymbol{A}]|^2 \leqslant \lambda_{\max}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}]$.
    (2) $\lambda_{\min}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}] \leqslant |\lambda[\boldsymbol{A}]|^2 \leqslant \lambda_{\max}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}]$.
    (3) $\lambda_{\min}[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})/2] \leqslant |\mathrm{Re}\{\lambda[\boldsymbol{A}]\}|\lambda_{\max}[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})/2]$.
12. 设 $\lambda_{\min}[\boldsymbol{A}]$ 和 $\lambda_{\max}[\boldsymbol{A}]$ 是对称方阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的最小和最大特征值, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 是任意实向量, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是任意实矩阵, $\boldsymbol{S}_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{S}_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是两个非负定矩阵, 满足 $\boldsymbol{S}_1 \leqslant \boldsymbol{S}_2$. 那么下列关系成立,
    (1) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{x}$.
    (2) $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{X} \leqslant \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{X}$.
    (3) $\lambda_{\min}[\boldsymbol{A}]\|\boldsymbol{x}\|^2 \leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \lambda_{\max}[\boldsymbol{A}]\|\boldsymbol{x}\|^2$.
13. **Hadamard 不等式** (Hadamard Inequality).

    设 $n$ 维向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 构成了 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n]$. 则有

    $$|\det[\boldsymbol{X}]| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{x}\|.$$

    当且仅当向量是正交的, 或至少一个向量为零.
14. **Hadamard 矩阵** (Hadamard Matrix).

    Hadamard 矩阵是一个方阵, 每个元都是 $+1$ 或 $-1$, 每行都是互相正交的. Hadamard 矩阵这一命名源于法国数学家雅克 • 所罗门 • 阿达马 (Jacques Solomon Hadamard, 1865—1963 年), 他的重要贡献是证明了数论中 **素数定理** (Prime Number Theorem), 而此而成名.

    Hadamard 提出了 Hadamard 不等式、Hadamard 矩阵、Hadamard 变换等. Hadamard 矩阵在信号处理和编码中有广泛应用, Hadamard 矩阵常用于纠错码, 如

Reed-Muller 码.

一个 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{H}_n = [h_{ij}]$ 称为 $n$ 阶 Hadamard 矩阵, 是指 $\boldsymbol{H}_n$ 的元要么是 $+1$, 要么是 $-1$, 即 $h_{ij} = \pm 1$, 且 $\boldsymbol{H}_n \boldsymbol{H}_n^{\mathrm{T}} = n\boldsymbol{I}_n$. 换句话说, Hadamard 矩阵是由 $+1$ 和 $-1$ 构成的, 其两个不同行的内积是零, 同一行的内积为 $n$. Hadamard 矩阵的几个例子如下.

$$\boldsymbol{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Hadamard 矩阵的性质**

① Hadamard 矩阵的维数只能是 1、2 或 4 的倍数.

② Hadamard 矩阵的行进行交换, 仍然是 Hadamard 矩阵.

③ 用 $-1$ 乘以 Hadamard 矩阵的任一行 (任一列), 结果还是 Hadamard 矩阵. 因此, 总是可能得到一个第 1 行和第 1 列都是 $+1$ 的 Hadamard 矩阵; 这种 Hadamard 矩阵称为规范化 Hadamard 矩阵. 因此, 阶数 $n$ 相同的 Hadamard 矩阵不唯一.

④ 根据 Hadamard 不等式, $n$ 阶 Hadamard 矩阵 $\boldsymbol{H}_n$ 的行列式满足不等式,

$$\det[\boldsymbol{H}_n] \leqslant n^{n/2}.$$

15. **Hadamard 猜想** (Hadamard Conjecture).

对于所有正整数 $k \in \mathbb{N}$, 总存在 $n = 4k$ 阶的 Hadamard 矩阵.

猜想是科学理论中的开放性问题 (Open Problem), 即有待证明对错的问题. Hadamard 猜想是一个存在性的问题. 最近用计算机构造了 $n = 428$ 阶 $(k = 107)$ 的最大已知 Hadamard 矩阵.

16. **Sylvester 构造 Hadamard 矩阵的方法**.

最初构造高阶 Hadamard 矩阵的例子是 James Joseph Sylvester (西尔维斯特) 给出的. 设 $\boldsymbol{H}_n$ 是一个 $n$ 阶 Hadamard 矩阵, 则

$$\boldsymbol{H}_{2n} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_n & \boldsymbol{H}_n \\ \boldsymbol{H}_n & -\boldsymbol{H}_n \end{pmatrix}$$

给出一个 $2n$ 阶 Hadamard 矩阵. 连续用这个方法, 就可给出一系列 Hadamard 矩阵:

$$\boldsymbol{H}_1 = (1),$$

$$\boldsymbol{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

利用这种方法, Sylvester 成功地构造了任何 $2^k$ 阶 Hadamard 矩阵, 其中 $k$ 为非负整数.

Sylvester 给出的矩阵有些特殊的性质. 它们都是对称矩阵, 并且这些矩阵的迹都是 0. 第 1 行和第 1 列的元素都是 +1, 其他各行各列的元素都是一半 +1, 一半 −1. 这些矩阵和 Walsh 函数有密切的关系.

Sylvester 构造法给出了阶数为 1、2、4、8、16、32 等的 Hadamard 矩阵, 之后 Hadamard 本人给出了阶数为 12 和 20 的 Hadamard 矩阵. Raymond Paley 随后给出了任何 $m+1$ 阶 Hadamard 矩阵的方法, 其中 $m$ 是任何模 4 为 3 的质数任意次幂; 还给出了构造形式为 $2(m+1)$ 阶 Hadamard 矩阵的方法, 其中 $m$ 是任何模 4 为 1 的质数任意次幂; 他使用了有限域的办法得出了这些结论. Hadamard 猜想很可能就是 Paley 提出的, 现在有了更多的构造 Hadamard 矩阵的办法. Hadi Kharaghani 和 Behruz Tayfeh-Rezaie 在 2004 年 6 月 21 日宣布他们构造出了 428 阶的 Hadamard 矩阵. 现在最小的尚未被构造出来的 $4k$ 阶 Hadamard 矩阵是 668 阶.

17. **哥德巴赫猜想** (Goldbach Conjecture).

“每一个大于 2 的偶数可以表示为两个 **质数** (素数) 之和” 就是哥德巴赫猜想, 简称 “1+1”. 这个猜想是 1742 年哥德巴赫 (Christian Goldbach, 1690—1764 年) 给欧拉 (Euler) 的信中提出的, 至今已经 200 多年了, 还未解决.

我们把一个大偶数可以表示为 $a$ 个 **素数** (Prime or Prime Number) 乘积与 (至多) $b$ 个素数乘积之和, 简称 “a+b”. 1966 年, 我国数学家陈景润 (1933—1996 年) 证明了每一个充分大的偶数能够表示为一个素数与至多两个素数乘积之和, 即证明了 “1+2”. 俄国数学家 Ivan Matveevich Vinogradov (1891—1983 年) 证明了每一个充分大的奇数可以表示为 3 个素数之和, 即 “1+1+1”.

18. **Goormaghtigh 猜想** (Goormaghtigh Conjecture)

对于整数 $x$、$y$、$m$ 和 $n$, 且 $x>1, y>1, n>m>2$, 方程

$$\frac{x^m-1}{x-1}=\frac{y^n-1}{y-1}$$

只有两组整数解 $(x,y,m,n)=(5,2,3,5)$ 和 $(x,y,m,n)=(90,2,3,13)$.

19. 计算 $2n\times 2n$ 矩阵

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

的特征多项式.

20. 计算笔者提出的特殊范德蒙矩阵 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 的行列式:

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 & x_1^5 \\ 1 & x_2 & x_2^3 & x_2^5 \\ 1 & x_3 & x_3^3 & x_3^5 \\ 1 & x_4 & x_4^3 & x_4^5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^4 \end{pmatrix}.$$

21. 计算笔者提出的特殊 $n\times n$ 范德蒙矩阵 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 的行列式:

$$\boldsymbol{D}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 & x_1^5 & \cdots & x_1^{2n-3} \\ 1 & x_2 & x_2^3 & x_2^5 & \cdots & x_2^{2n-3} \\ 1 & x_3 & x_3^3 & x_3^5 & \cdots & x_3^{2n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^3 & x_n^5 & \cdots & x_n^{2n-3} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^4 & \cdots & x_1^{2^{n-2}} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^4 & \cdots & x_2^{2^{n-2}} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^4 & \cdots & x_3^{2^{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^4 & \cdots & x_n^{2^{n-2}} \end{pmatrix}.$$

这些行列式的乘积因子中肯定包含项 $(x_i - x_j)$, $i \neq j$.

22. 计算下列函数的拉普拉斯变换.

(1) $f(t) = t\cos\omega t$,

(2) $f(t) = t\sin\omega t$,

(3) $f(t) = t^2\cos\omega t$,

(4) $f(t) = t^2\sin\omega t$,

(5) $f(t) = t\mathrm{e}^{-\sigma t}\cos\omega t$,

(6) $f(t) = t\mathrm{e}^{-\sigma t}\sin\omega t$,

(7) $f(t) = t^2\mathrm{e}^{-\sigma t}\cos\omega t$,

(8) $f(t) = t^2\mathrm{e}^{-\sigma t}\sin\omega t$,

(9) $f(t) = t^n\mathrm{e}^{-\sigma t}\cos\omega t$,

(10) $f(t) = t^n\mathrm{e}^{-\sigma t}\sin\omega t$.

23. 计算伴随矩阵的逆、行列式, 计算伴随矩阵的伴随矩阵, 计算伴随矩阵的伴随矩阵的伴随矩阵, $\cdots\cdots$ 设方阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是可逆矩阵, 它的伴随矩阵 $\mathrm{adj}[\boldsymbol{A}]$ 定义为

$$\boldsymbol{A}_1 := \mathrm{adj}[\boldsymbol{A}] = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1},$$

计算

$$\boldsymbol{A}_1^{-1},\ |\boldsymbol{A}_1|,\ \boldsymbol{A}_2 := \mathrm{adj}[\boldsymbol{A}_1],\ \boldsymbol{A}_3 := \mathrm{adj}[\boldsymbol{A}_2],\ \cdots,\ \boldsymbol{A}_k := \mathrm{adj}[\boldsymbol{A}_{k-1}].$$

# 第3章
CHAPTER 3

# 线性系统的状态空间描述

经典控制理论是建立在线性时不变动态系统的输入—输出关系或传递函数的基础之上的, 而现代控制理论以多个一阶状态微分方程组来描述系统, 它们构成一个状态向量方程或向量—矩阵微分方程. 应用矩阵理论, 可极大地简化系统的数学表达式. 状态变量、输入或输出数目的增多并不增加方程的复杂性, 而且许多标量系统的处理方法可以直接拓展到多输入多输出系统.

本章将首先给出状态空间方法的描述部分, 以单输入单输出系统为例, 给出多输入多输出系统 (即多变量系统) 在内的状态空间表达式的一般形式、线性系统状态空间表达式, 状态空间模型线性变换的性质, 以及能控规范型、能观测规范型、对角标准型、约当 (Jordan) 标准型、三对角标准型, 以及传递函数的规范型实现、标准型实现, 传递函数的最小实现, 多变量系统的传递函数矩阵, 利用 MATLAB 进行各种模型之间的相互转换, 多变量系统传递矩阵的计算等.

本章有关状态空间系统规范型和 **友矩阵** (Companion Matrix) 及其特殊矩阵间的变换, 可参见 2010 年发表在 *Computers & Mathematics with Applications* 上的论文 "Transformations between some special matrices (一些特殊矩阵之间的相似变换)" [24].

## 3.1 状态空间表达的例子

在经典控制理论中, 通常是以系统的传递函数为主体研究系统的动态性能, 如根轨迹 (Root Locus)、波德图 (Bode Diagram) 等. 传递函数是将一个高阶微分方程表示的线性时不变系统在零初始条件下, 通过拉普拉斯变换 (Laplace Transform) 获得的, 它是线性定常微分方程的等价表达. 同样, 传递函数描述的系统可以转化为一个线性定常微分方程系统. 本节用时不变和时变系统、电路系统、弹簧阻尼系统、机电系统的例子来说明动态系统的状态空间模型结构形式.

### 3.1.1 标量系统的状态空间表达

传递函数描述只适用于线性定常系统 (即线性时不变系统), 不适用于微分方程描述的线性时变系统、非线性时不变系统、非线性时变系统等. 下面用例子来加以说明.

**1. 典型二阶系统的状态空间表达**

对于二阶典型系统, 即二阶线性时不变微分方程描述的系统,

$$y''(t) + 2\xi\omega_n y'(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t), \tag{3.1.1}$$

其中 $u(t)$ 和 $y(t)$ 分别为系统的输入和输出, $t$ 为时间变量, $y'(t) = \dot{y}(t)$ 表示一阶导数, $y''(t)$

表示二阶导数, $\xi$ 是阻尼比 (Damping Ratio), $\omega_n$ 是自然振荡频率 (Natural Oscillation Frequency).

在零初始条件下, 对式 (3.1.1) 进行 **拉普拉斯变换** (Laplace Transform) 得到

$$(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)Y(s)=\omega_n^2U(s),$$

其中 $s$ 为 **拉普拉斯算子**, $Y(s)$ 和 $U(s)$ 分别为 $y(t)$ 和 $u(t)$ 的拉普拉斯变换:

$$Y(s):=\mathscr{L}[y(t)]=\int_0^{\infty}y(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,\quad U(s):=\mathscr{L}[u(t)]=\int_0^{\infty}u(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

由此可得系统的 **传递函数** (Transfer Function):

$$G(s):=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}. \tag{3.1.2}$$

式 (3.1.1) 和式 (3.1.2) 是一个二阶系统, 引入 2 个状态变量 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 令

$$x_1(t)=y(t),\quad x_2(t)=y'(t).$$

联立式 (3.1.1), 可得

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t)&=y'(t)=x_2(t),\\
\dot{x}_2(t)&=y''(t)=-2\xi\omega_n y'(t)-\omega_n^2y(t)+\omega_n^2u(t)\\
&=-2\xi\omega_n x_2(t)-\omega_n^2x_1(t)+\omega_n^2u(t)\\
&=-\omega_n^2x_1(t)-2\xi\omega_n x_2(t)+\omega_n^2u(t),\\
y(t)&=x_1(t).
\end{aligned}$$

它们可以等价写为 (能观测性规范型)

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \omega_n^2\end{pmatrix}u(t), \tag{3.1.3}$$

$$y(t)=[1,\ 0]\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}. \tag{3.1.4}$$

定义状态向量 $\boldsymbol{x}(t):=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, 有关参数矩阵和参数向量如下,

$$\boldsymbol{A}:=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2},\quad \boldsymbol{b}:=\begin{pmatrix}0\\ \omega_n^2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2,\quad \boldsymbol{c}:=[1,\ 0]\in\mathbb{R}^{1\times 2}.$$

则式 (3.1.3)、式 (3.1.4) 可写为下列状态空间模型形式:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}u(t),\\ y(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t).\end{cases} \tag{3.1.5}$$

**注 3.1.1** 从这个例子可以看出: 一个线性定常微分方程描述的线性时不变系统 (3.1.1) 可以转换为一个传递函数模型 (3.1.2), 也可以转换为一个状态空间模型 (3.1.5), 且状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的维数等于系统的阶次 (即微分方程输出的最高微分数), (对线性时不变系统而言) 对应于系统传递函数分母多项式的最高次数.

**2. 二阶线性时变系统的状态空间表达**

下面研究一个二阶线性时变微分方程描述的系统,

$$y''(t)+a_1(t)y'(t)+a_2(t)y(t)=b_2(t)u(t), \tag{3.1.6}$$

其中 $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b_2(t)$ 是系统的时变参数. 当微分方程的系数是随时间变化的, 就说这个系统是时变系统.

即使在零初始条件下, 式 (3.1.6) 的 **拉普拉斯变换** 也是不存在的, 因此传递函数描述对时变系统和非线性系统是无效的. 在这方面, 状态空间描述显示出优越性.

式 (3.1.6) 是一个二阶系统, 引入 2 个状态变量 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 令

$$x_1(t)=y(t),\quad x_2(t)=y'(t).$$

联立式 (3.1.6), 可得

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t)&=y'(t)=x_2(t),\\
\dot{x}_2(t)&=y''(t)=-a_1(t)y'(t)-a_2(t)y(t)+b_2(t)u(t)\\
&=-a_1(t)x_2(t)-a_2(t)x_1(t)+b_2(t)u(t)\\
&=-a_2(t)x_1(t)-a_1(t)x_2(t)+b_2(t)u(t),\\
y(t)&=x_1(t).
\end{aligned}$$

它们可以等价写为 (能观测性规范型:)

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -a_2(t) & -a_1(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ b_2(t)\end{pmatrix}u(t), \tag{3.1.7}$$

$$y(t)=[1,\ 0]\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}. \tag{3.1.8}$$

定义状态向量 $\boldsymbol{x}(t):=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, 有关时变参数矩阵和时变参数向量如下,

$$\boldsymbol{A}(t):=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -a_2(t) & -a_1(t)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2},\quad \boldsymbol{b}(t):=\begin{pmatrix}0\\ b_2(t)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2,\quad \boldsymbol{c}(t):=[1,\ 0]\in\mathbb{R}^{1\times 2}.$$

则式 (3.1.7)、式 (3.1.8) 可写为下列时变状态空间模型形式:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}(t)u(t),\\ y(t)=\boldsymbol{c}(t)\boldsymbol{x}(t).\end{cases} \tag{3.1.9}$$

上式是一个线性时变状态空间模型描述的系统. 当状态空间模型的参数矩阵和参数向量 $\boldsymbol{A}(t)$、$\boldsymbol{b}(t)$、$\boldsymbol{c}(t)$ 中至少有一个是随时间变化的, 就说这个系统是线性时变系统.

**注 3.1.2** 从上面两个例子可以看出: 状态空间模型不仅可以描述线性时不变系统 (Linear Time-Invariant System), 而且可以描述线性时变系统, 还可以描述非线性时不变系统 (Nonlinear Time-Invariant System) 和非线性时变系统 (Nonlinear Time-Varying System), 而传递函数只可以描述线性时不变系统.

**3. 状态空间表达的不唯一性**

下面以系统 (3.1.1) 为例说明一个系统的状态空间模型是不唯一的. 引入两个状态变量 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 令

$$x_1(t) = y'(t), \quad x_2(t) = y(t).$$

联立式 (3.1.1), 可得

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= y''(t) = -2\xi\omega_n y'(t) - \omega_n^2 y(t) + \omega_n^2 u(t) \\
&= -2\xi\omega_n x_1(t) - \omega_n^2 x_2(t) + \omega_n^2 u(t), \\
\dot{x}_2(t) &= y'(t) = x_1(t), \\
y(t) &= x_2(t).
\end{aligned}$$

它们可以等价写为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\xi\omega_n & -\omega_n^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_n^2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \tag{3.1.10}$$

$$y(t) = [0,\ 1] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \tag{3.1.11}$$

这说明一个系统的状态空间模型是不唯一的. 这容易理解, 因为引入了不唯一的中间变量 (向量) $\boldsymbol{x}(t)$, 输入输出关系是不变的, 就像高中课本中的参数方程一样: 关系式 $x^2 + y^2 = r^2$ 表示一个圆, 变量 $x$ 与 $y$ 的关系是唯一确定的, 但是引入一个参数 $t$, 方程 $x = r\cos t$ 和 $y = r\sin t$ 仍表示一个圆, 但是参数 $t$ 是不唯一的.

**注 3.1.3** 就像人们习惯用 $u(t)$ 和 $y(t)$ 表示系统的输入和输出一样, 已经习惯用 $\boldsymbol{x}(t)$ 表示状态向量, 其实也可以用其他字母表示状态变量和状态向量. 在不致混淆的情况下, 有时省略时间 $t$, 将系统中的输入变量 $u(t)$、输出变量 $y(t)$、状态变量 (向量) $\boldsymbol{x}(t)$ 简化为 $u$、$y$、$\boldsymbol{x}$ 等. 但是系统中的时变参数变量中的 $t$ 是不能省略的, 否则变成了时不变参数, 时变参数向量和时变参数矩阵也是如此.

**4. 一个高阶非线性时变系统的状态空间表达**

对于 $n$ 阶非线性时变系统

$$y^{(n)} = F(y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}, u, t),$$

引入 $n$ 个状态变量 $x_i(t)$, 令

$$x_1(t) = y(t),\ x_2(t) = y'(t),\ x_3(t) = y''(t),\ \cdots,\ x_n(t) = y^{(n-1)}.$$

进一步可得到下列一阶微分方程组构成的非线性时变状态空间模型:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= y'(t) = x_2(t),\\
\dot{x}_2(t) &= y''(t) = x_3(t),\\
\dot{x}_3(t) &= y'''(t) = x_4(t),\\
\dot{x}_{n-1}(t) &= y^{(n-1)}(t) = x_n(t),\\
\dot{x}_n(t) &= y^{(n)}(t) = F(y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}, u, t)\\
&= F(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \cdots, x_n(t), u(t), t),\\
y(t) &= x_1(t).
\end{aligned}
$$

函数 $F(*, *, \cdots, *, t)$ 中的 $t$ 表示系统参数是时变的, 如果去掉 $t$,

$$
y^{(n)} = F(y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}, u)
$$

表示一个 $n$ 阶非线性时不变系统. 类似地, $y^{(n)} = F(y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}, u, u', u'', \cdots, u^{(n-1)})$ 表示 $n$ 阶非线性时不变系统, $y^{(n)} = F(y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}, u, u', u'', \cdots, u^{(n-1)}, t)$ 表示 $n$ 阶非线性时变系统.

### 3.1.2　电路系统的状态空间描述

对于图 3.1.1 所示的 RLC 电路系统, 输入为电源电压 $u$, 输出为电容 $C$ 上电压 $u_C$, $R_1$ 和 $R_2$ 为电阻, $L$ 为电感. 试列写这个系统的状态空间描述.

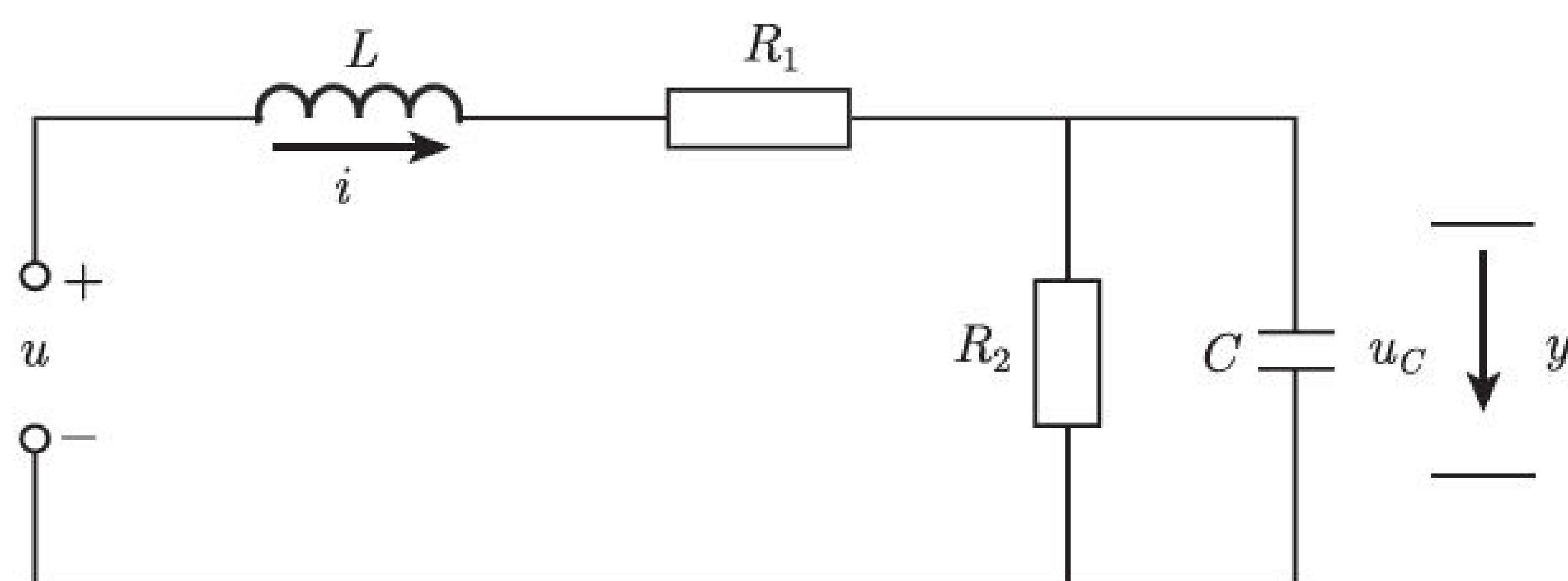



图 3.1.1　RLC 电路

该电路系统有两个独立储能元件 (电容 $C$ 和电感 $L$), 因此状态变量数为 2. 通常取电容上电压信号 $u_C$ 和电感的电流信号 $i$ 作为状态变量. 根据基尔霍夫定律, 可以得到两个含有状态变量的一阶微分方程组:

$$
i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{R_2}, \tag{3.1.12}
$$

$$
u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_1 i + u_C. \tag{3.1.13}
$$

或

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} &= -\frac{u_C}{R_2 C} + \frac{1}{C}i,\\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{L}u_C - \frac{R_1}{L}i + \frac{1}{L}u.
\end{aligned}
$$

**方法一**: 令状态变量 $x_1$ 和 $x_2$ 分别表示电容上电压 $u_C$ 和电感的电流 $i$, 即 $x_1 := u_C$, $x_2 := i$, 则有

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{R_2C}x_1 + \frac{1}{C}x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{L}x_1 - \frac{R_1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u.$$

用状态向量形式表示为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_2C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u.$$

若用 $y$ 表示电容上电压 $u_C$, 则系统的输出量可表示为

$$y = x_1.$$

把它们写成矩阵形式:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u,$$
$$y = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x},$$

其中

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_2C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = [1,\ 0].$$

**方法二**: 令状态变量 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 分别表示电容上电流和电感上电压, 即

$$\xi_1 := C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}, \quad \xi_2 = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},$$

读者列出其状态空间表达式.

图 3.1.2 是另一个 RLC 电路系统, $R_1$ 和 $R_2$ 为电阻, $C$ 为电容, $u$ 为输入电压, 电感 $L$ 上的电压 $u_L$ 为输出变量. 试列写这个系统的状态空间描述.

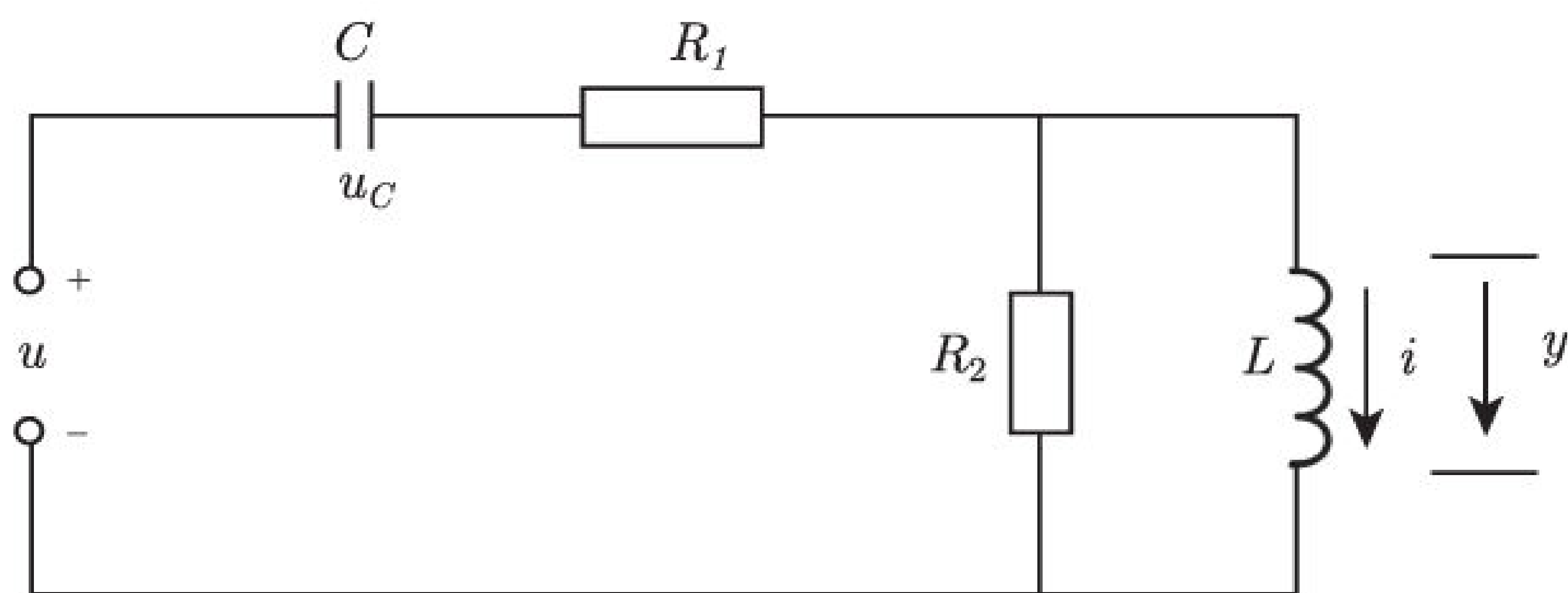



图 3.1.2 RLC 电路

设电容上电压 $u_C$ 和流经电感的电流 $i$ 为状态变量. 根据基尔霍夫定律, 可以得到两个含有状态变量的一阶微分方程:

$$u = u_C + R_1C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},$$

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} - \frac{L}{R_2}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

引入状态变量 $x_1 = u_C$ 和 $x_2 = i$, 则有

$$\begin{aligned} u &= x_1 + R_1 C\dot{x}_1 + L\dot{x}_2, \\ x_2 &= C\dot{x}_1 - \frac{L}{R_2}\dot{x}_2. \end{aligned}$$

求解得到

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{(R_1+R_2)C}x_1 + \frac{R_2}{(R_1+R_2)C}x_2 + \frac{1}{(R_1+R_2)C}u, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{R_2}{(R_1+R_2)L}x_1 - \frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}x_2 + \frac{R_2}{(R_1+R_2)L}u. \end{aligned}$$

用 $y$ 代替电感 $L$ 上电压 $u_L$, 则系统的输出量可表示为

$$\begin{aligned} y = u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= L\dot{x}_2 \\ &= -\frac{R_2}{(R_1+R_2)}x_1 - \frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)}x_2 + \frac{R_2}{(R_1+R_2)}u. \end{aligned}$$

它们写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{(R_1+R_2)C} & \dfrac{R_2}{(R_1+R_2)C} \\ -\dfrac{R_2}{(R_1+R_2)L} & -\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(R_1+R_2)C} \\ \dfrac{R_2}{(R_1+R_2)L} \end{pmatrix} u,$$

$$y = \left(-\frac{R_2}{(R_1+R_2)},\ -\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{R_2}{(R_1+R_2)}u.$$

### 3.1.3　弹簧阻尼系统的状态空间描述

对图 3.1.3 所示的机械运动系统, $M$ 为质量块 (同时为质量), $K$ 为弹簧, 也为弹簧系数, $B$ 是阻尼器, 列出在外力输入作用下, 以质量块 $M$ 的位移 $y$ 为输出的状态空间表达式.

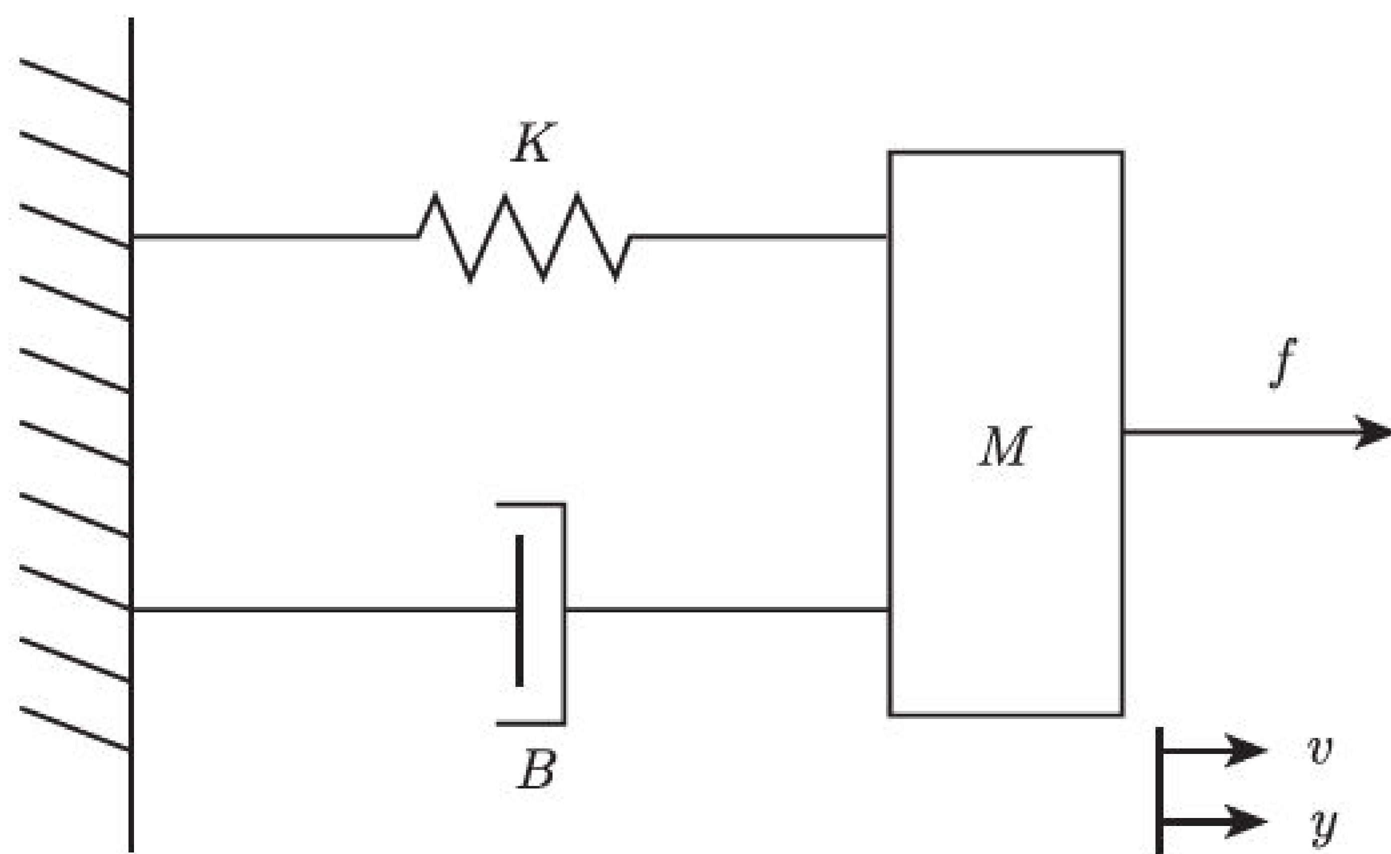



图 3.1.3　机械运动模型图

弹簧 $K$ 和质量块 $M$ 为储能元件, 故弹簧的伸长度 $y$ 和质量块 $M$ 的速度 $v$ 可以选作状

态变量. 根据结构图可以直接看出, 它们是相互独立的. 根据牛顿定律, 可得方程

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=f-Ky-B\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

用 $x_1$ 和 $x_2$ 表示 $y$ 和 $v$, 且 $u$ 表示 $f$, 有

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2,\\ M\dot{x}_2&=u-Kx_1-B\dot{x}_1.\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2,\\ \dot{x}_2&=\frac{1}{M}u-\frac{K}{M}x_1-\frac{B}{M}x_2.\end{aligned}$$

则系统的状态空间模型为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{B}{M}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1}{M}\end{pmatrix}u,$$

$$y=[1,\ 0]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}.$$

### 3.1.4　机电系统的状态空间描述

图 3.1.4 是直流他励电动机系统的示意图, 其中 $R$、$L$ 分别为电枢回路的电阻和电感, $J$ 是机械旋转部分的转动惯量, $B$ 为旋转部分的黏性摩擦系数, 励磁回路电压 $u_{\mathrm{f}}$ 和电流 $i_{\mathrm{f}}$ 恒定不变 [25]. 列出该图在电枢电压作为控制作用时的状态空间表达式.

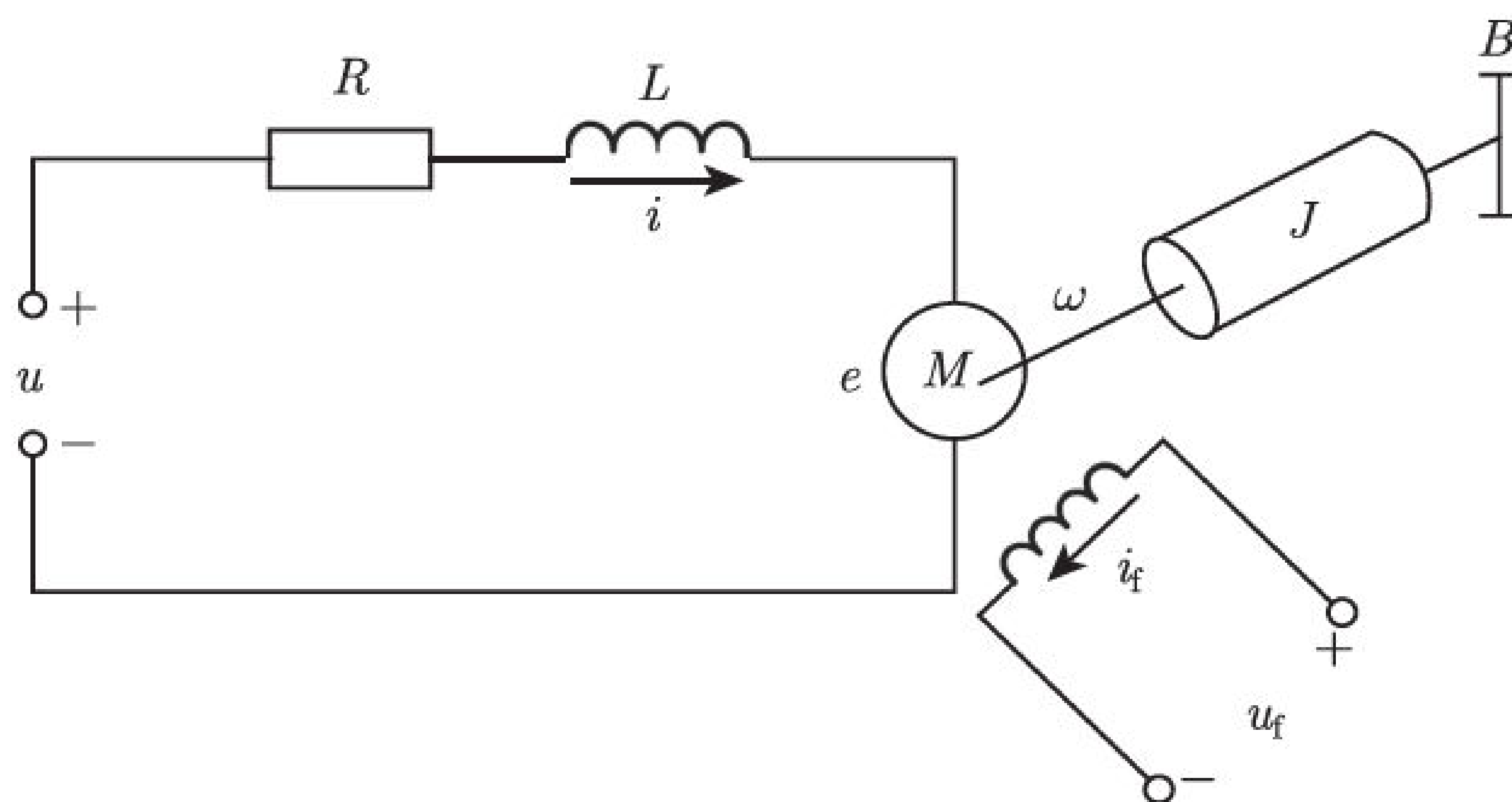



图 3.1.4　直流电动机示意图

由图 3.1.4 可知, 电感 $L$ 和转动惯量 $J$ 是储能元件, 相应的物理变量电流 $i$ 和旋转速度 $\omega$ 是相互独立的, 所以可以选作状态变量. 电枢回路的电压方程为

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+e=u,$$

动力学方程为

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+B\omega=K_a i,$$

电磁感应关系: 反电动势 $e$ 与旋转速度 $\omega$ 关系如下,

$$e = K_b\omega.$$

式中, $K_a$、$K_b$ 为转矩常数和反电动势常数.

令 $x_1 = i, x_2 = \omega$ 为系统状态变量, 则有

$$L\dot{x}_1 + Rx_1 + K_bx_2 = u,$$

$$J\dot{x}_2 + Bx_2 = K_ax_1,$$

整理可得系统的状态方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{K_b}{L} \\ \dfrac{K_a}{J} & -\dfrac{B}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

指定 $\omega$ 为输出, 令 $y = \omega$, 则输出方程为

$$y = [0,\ 1] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

值得一提的是, 若本题指定电动机的转角 $\theta$ 为输出, 则上述两个状态变量就不能全面描述系统的行为, 因此需要添加一个状态变量 $x_3 = \theta$:

$$\dot{x}_3 = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega.$$

于是状态方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{K_b}{L} & 0 \\ \dfrac{K_a}{J} & -\dfrac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

对应的输出方程为

$$y = [0,\ 1,\ 0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

## 3.2　状态空间系统表达式

在经典控制理论中, 使用拉普拉斯变换, 把一个常系数线性微分方程描述的线性时不变系统的输入输出关系, 用传递函数表示. 传递函数描述是一种频域表达, 状态空间描述是一种时域表达. 一个变系数微分方程就无法用传递函数表示. 变系数微分方程描述的系统称为时变系统. 因此, 根轨迹方法、频率特性、波德图等方法都不适用于时变系统和非线性系统的研究.

在现代控制理论中, 为了时不变系统与时变系统、线性系统与非线性系统、单输入单输出系统与多输入多输出系统 (即多变量系统) 描述上的统一, 通过引入一些中间变量 (称为状

态变量), 把高阶微分方程化为一阶微分方程组描述. 这些一阶微分方程组就称为系统的 **状态空间表达式** (State Space Representation) 或 **状态空间模型** (State Space Model). 本节介绍连续时间系统和离散时间系统的状态空间表达.

### 3.2.1 控制系统的类别

**1. 静态系统** (Static System) **和动态系统** (Dynamic System)

系统有静态和动态之分, 用代数方程表示的系统称为静态系统, 如线性弹簧所受的力 $F$ 与弹簧伸长 (可正可负) $x$ 和弹性系数 $k$ 的关系为 $F = kx$; 用微分方程或差分方程表示的系统称为动态系统. 因为静态系统比较简单, 现代控制理论研究范畴主要是动态系统.

**2. 连续时间系统**(Continuous-Time System) **和离散时间系统** (Discrete-Time System)

系统的运动规律是随时间演化的, 如果系统中的时间是一个连续变量, 就称连续时间系统, 简称 **连续系统** (Continuous System); 如果系统中的时间取离散值, 就称为离散时间系统, 简称 **离散系统** (Discrete System).

**3. 线性系统**(Linear System) **和非线性系统** (Nonlinear System)

输入—输出关系满足叠加原理的系统称为线性系统 (在忽略系统中的随机干扰噪声时), 否则称为非线性系统. 实际系统都是非线性系统, 非线性系统的控制方法比较复杂, 而线性系统理论研究比较成熟, 因而经常用线性化的方法, 把有些非线性系统近似为线性系统来处理.

**4. 时不变参数系统** (Time-Invariant Parameter System) **和时变参数系统** (Time-Varying Parameter System)

如果系统参数不随时间变化, 就是时不变参数系统, 简称 **时不变系统** (Time-Invariant System) 或定常系统; 否则就是时变参数系统, 简称 **时变系统** (Time-Varying System). 系统中只要有一个或一个以上参数随时间变化, 就是时变系统.

**5. 单输入单输出系统** (Single-Input Single-Output system, SISO 系统) **和多输入多输出系统** (Multi-Input Multi-Output system, **MIMO 系统**)

只有一个输入和一个输出的系统称为单输入单输出系统, 简称 **标量系统** (Scalar System); 系统输入的数目和输出的数目多于一个的系统称为多输入多输出系统, 简称 **多变量系统** (Multivariable System). 多变量系统示意图如图 3.2.1 所示. 进一步还有单输入多输出系统和多输入单输出系统.




图 3.2.1 多变量系统示意图

以上几种类型进行组合, 可以得到不同类型的系统, 如① 线性、时不变、单输入单输出、连续时间动态系统, ② 非线性、时变、多输入多输出、离散时间动态系统. 这样的名称太长, 有时在不致混淆的情况下或模型表达式比较明确时, 根据上下文, 可以简化一下说前者是线性时不变连续时间系统或线性时不变系统, 说后者是非线性时变系统.

本书主要研究线性时不变系统的控制理论, 所以对线性时不变 SISO 系统 (3.2.1) 和线性时不变 MIMO 系统 (3.2.3) 研究得多.

### 3.2.2　连续时间系统状态空间表达

在 3.1 节, 我们用二阶电路系统、弹簧阻尼系统、机电系统的例子说明了动态系统的状态空间模型结构形式. 下面给出线性时不变 SISO 连续时间系统、线性时变 SISO 连续时间系统、线性时不变 MIMO 连续时间系统、线性时变 MIMO 连续时间系统等的状态空间模型.

**1. 线性时不变单输入单输出连续时间系统** (Linear Time-Invariant SISO Continuous-Time System)

线性时不变 SISO 连续时间系统的 **状态空间模型** (State Space Model) 具有下列形式,

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + du(t), \end{cases} \tag{3.2.1}$$

其中 $u(t) \in \mathbb{R}^1 =: \mathbb{R}$ 和 $y(t) \in \mathbb{R}$ 分别为系统的输入和输出, $\boldsymbol{x}(t) := [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ 为 $n$ 维 **状态向量** (State Vector), $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ 表示 $\boldsymbol{x}(t)$ 对时间 $t$ 的导数, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1} =: \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $d \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}_0$ 是时刻 $t_0$ 状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的初值.

式 (3.2.1) 的第 1 式称为状态方程, 第 2 式称为输出方程. 有时直接称它们为状态方程或状态空间模型. $\boldsymbol{x}(t_0)$ 为状态向量在 $t = t_0$ 时的初值, 记作 $\boldsymbol{x}_0$, 即 $\boldsymbol{x}(t_0) =: \boldsymbol{x}_0$. 线性时不变 SISO 连续时间系统 (3.2.1) 的结构如图 3.2.2 所示.

系统 (3.2.1) 的输入输出满足 **叠加原理** (Superposition Principle), 故是线性系统; 参数 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ 和 $d \in \mathbb{R}$ 不随时间变化, 故是时不变系统; 只有一个输入 $u(t)$ ($u(t) \in \mathbb{R}$ 表示一个输入) 和一个输出 $y(t)$, 故是单输入单输出系统, 即 **标量系统** (Scalar System); 时间 $t$ 是连续变量, 故是连续时间系统; 综合起来, 式 (3.2.1) 就是一个线性时不变标量连续时间系统.

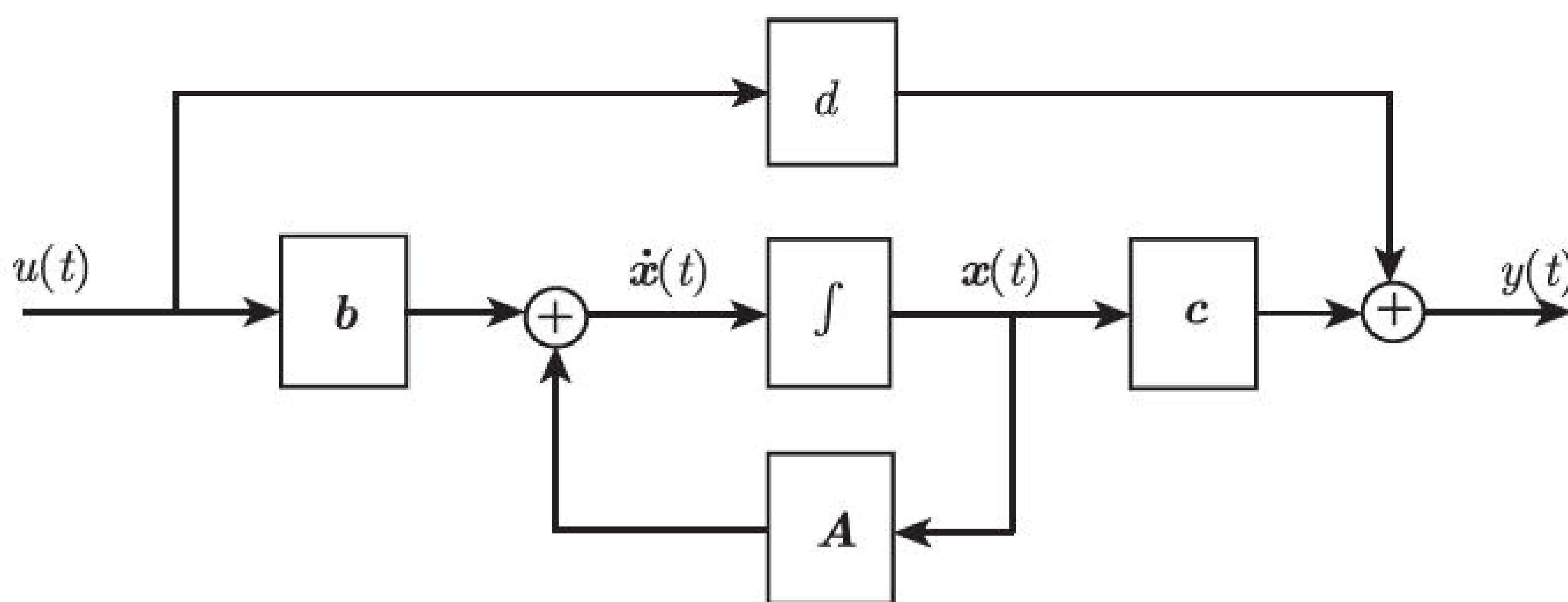



图 3.2.2　线性时不变 SISO 系统状态空间模型框图

**2. 线性时变单输入单输出连续时间系统** (Linear Time-Varying SISO Continuous-Time System)

线性时变 SISO 连续时间系统的状态空间模型为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}(t)u(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\\ y(t)=\boldsymbol{c}(t)\boldsymbol{x}(t)+d(t)u(t),\end{cases} \tag{3.2.2}$$

因为这个系统的参数 $\boldsymbol{A}(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b}(t)\in\mathbb{R}^{n}$, $\boldsymbol{c}(t)\in\mathbb{R}^{1\times n}$ 和 $d(t)\in\mathbb{R}$ 是随时间变化的, 故式 (3.2.2) 是一个线性时变标量连续时间系统. 只要有一个及一个以上参数是时变的, 就称为**时变系统**或**时变参数系统**.

**3. 线性时不变多输入多输出连续时间系统** (Linear Time-Invariant MIMO Continuous-Time System)

线性时不变 MIMO 连续时间系统的 **状态空间模型** (State Space Model) 具有下列形式,

$$S:\quad\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t),\end{cases} \tag{3.2.3}$$

其中

$$\boldsymbol{x}(t):=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n}$$ 为 **状态向量** (State Vector), $x_i(t)$为第 $i$个状态,

$$\boldsymbol{u}(t):=\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ \vdots\\ u_r(t)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{r}$$ 为 **输入向量** (Input Vector), $u_i(t)$为第 $i$个输入,

$$\boldsymbol{y}(t):=\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ \vdots\\ y_m(t)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{m}$$ 为 **输出向量** (Output Vector), $y_i(t)$为第 $i$个输出,

$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{D}\in\mathbb{R}^{m\times r}$ 均为常数矩阵, $\boldsymbol{x}_0$ 是时刻 $t_0$ 状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的初值. 事实上, 根据矩阵加减法、矩阵乘法维数兼容性原则, 以及状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$, 输入向量 $\boldsymbol{u}(t)$ 和输出向量 $\boldsymbol{y}(t)$ 的维数, 我们可以推断出 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的维数. 因此, 在有关科学文献中, 为简便, 经常说 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 为适当维数的矩阵.

因为这个系统有 $r$ 个输入 $u_1(t), u_2(t), \cdots, u_r(t)$, 即多输入, 有 $m$ 个输出 $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_m(t)$, 即多输出, 这就是多输入多输出系统名称的来历. 多输入多输出系统简称 **多变量系统** (Multivariable System).

矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ (或简记为 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}]$) 称为 **系统矩阵** (System Matrix). 状态空间模型常记作 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}]$. 一旦 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}]$ 给定, 系统就唯一确定了. 有时将 $\boldsymbol{A}$ 称为 **系统矩阵**, $\boldsymbol{B}$ 称为 **输入系数矩阵**, $\boldsymbol{C}$ 称为 **输出系数矩阵**, $\boldsymbol{D}$ 称为 **输入输出系数矩阵**. 线性时不变 MIMO 连续时间系统 (3.2.3) 的结构框如图 3.2.3 所示.

**注 3.2.1** 线性连续时间系统稳定指系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 稳定, 即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值具有负实部, 亦即特征方程 $|s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}| = 0$ 的根具有负实部. 线性连续时间系统的稳定性与矩阵 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 无关.

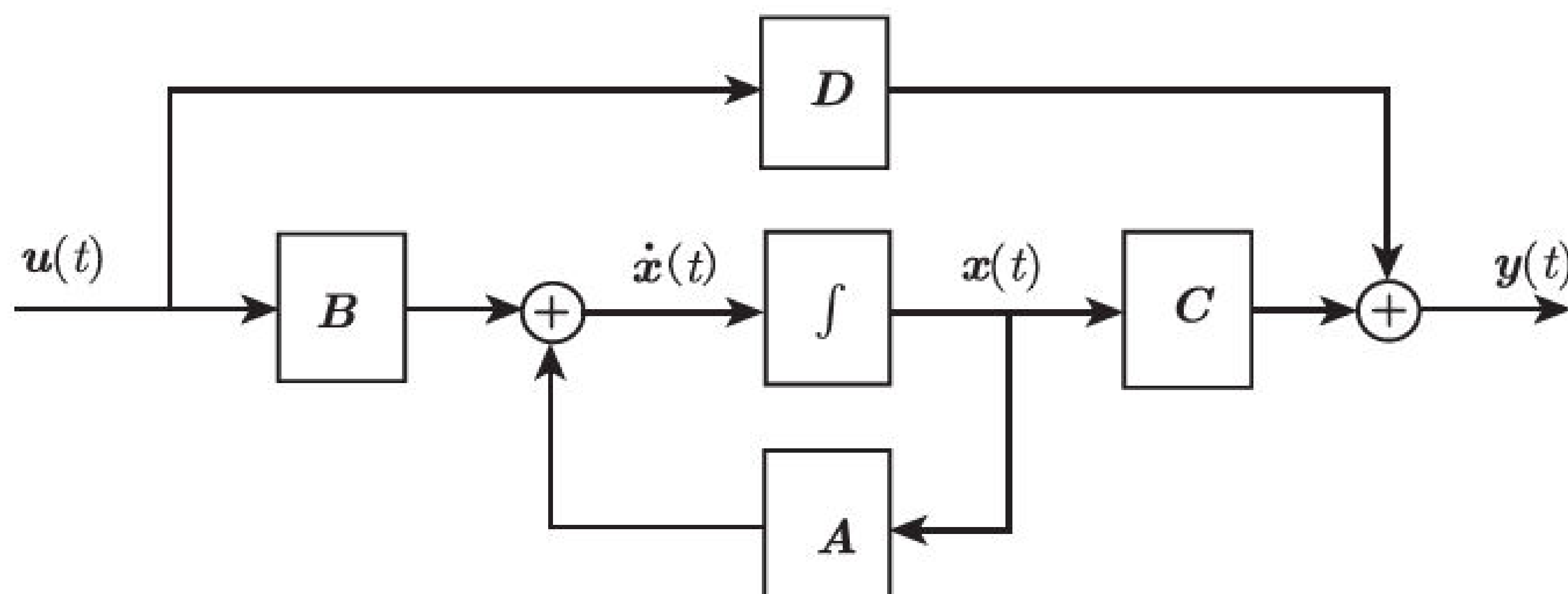



图 3.2.3 线性时不变 MIMO 连续时间系统的结构框图

**4. 线性时变多输入多输出连续时间系统** (Linear Time-Varying MIMO Continuous-Time System)

如果系统矩阵 $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}]$ 是随时间变化的, 记作 $[\boldsymbol{A}(t), \boldsymbol{B}(t), \boldsymbol{C}(t), \boldsymbol{D}(t)]$, 那么系统就是一个时变系统. 线性时变 MIMO 连续时间系统的状态空间模型为

$$S(t): \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t), \end{cases} \tag{3.2.4}$$

其中 $\boldsymbol{A}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B}(t) \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C}(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{D}(t) \in \mathbb{R}^{m\times r}$ 为时变函数矩阵.

有了 MIMO 系统和 SISO 系统, 就可派生出单输入多输出系统 (Single-Input Multiple-Output system, **SIMO 系统**) 和多输入单输出系统 (Multiple-Input Single-Output system, **MISO 系统**). 结合时变和时不变, 我们有下列系统表达.

**5. 线性时不变 MISO 连续时间系统** (Linear Time-Invariant MISO Continuous-Time System)

线性时不变 MISO 连续时间系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{d}\boldsymbol{u}(t), \end{cases} \tag{3.2.5}$$

其中 $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^r$, $y(t) \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ 和 $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{1\times r}$.

**6. 线性时不变单输入多输出连续时间系统** (Linear Time-Invariant SIMO Continuous-Time System)

线性时不变 SIMO 连续时间系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{d}u(t), \end{cases} \tag{3.2.6}$$

其中 $u(t) \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^m$.

当然, 还有线性时变 SIMO 系统和 MISO 系统, 其结构如下.

**7. 线性时变多输入单输出连续时间系统** (Linear Time-Varying MISO Continuous-Time System)

线性时变 MISO 连续时间系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ y(t) = \boldsymbol{c}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{d}(t)\boldsymbol{u}(t), \end{cases} \tag{3.2.7}$$

其中 $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^r$, $y(t) \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{A}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B}(t) \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{c}(t) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ 和 $\boldsymbol{d}(t) \in \mathbb{R}^{1\times r}$.

**8. 线性时变单输入多输出连续时间系统** (Linear Time-Varying SIMO Continuous-Time System)

线性时变 SIMO 连续时间系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)u(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{d}(t)u(t), \end{cases} \tag{3.2.8}$$

其中 $u(t) \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{A}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{C}(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{d}(t) \in \mathbb{R}^m$.

**9. 非线性时变多输入多输出连续时间系统** (Nonlinear Time-Varying MIMO Continuous-Time System)

非线性时变多输入多输出连续时间系统的状态空间模型可表示为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \end{cases} \tag{3.2.9}$$

其中 $\boldsymbol{f}(*,*,*) \in \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{g}(*,*,*) \in \mathbb{R}^m$ 为向量函数, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ 为系统输入向量, $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ 为系统输出向量.

如果 $\boldsymbol{f}(*,*,*)$ 和 $\boldsymbol{g}(*,*,*)$ 中不显含 $t$, 就得到非线性时不变多输入多输出连续时间系统:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)). \end{cases} \tag{3.2.10}$$

对于控制而言, 不涉及输入量 (即控制量) 的系统称为 **自治系统** (Autonomous System). 在这种定义下, **时变自治系统** 可以表示为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), t), \end{cases} \tag{3.2.11}$$

**时不变自治系统** 可以表示为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t)). \end{cases} \tag{3.2.12}$$

对于控制问题, 一般研究其稳定性和控制器设计问题, 不太强调系统参数, 但对于参数估计问题, 表达式中一般加上系统参数、参数向量或参数矩阵 $\boldsymbol{\theta}$, 这时非线性时变 MIMO 连续时间系统可表示为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta}(t), \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}(t), \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t). \end{cases} \tag{3.2.13}$$

或等价写为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta}(t), \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}(t), \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)). \end{cases} \tag{3.2.14}$$

当系统参数 $\boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta}$ 与时间 $t$ 无关, 就得到非线性时不变 MIMO 连续时间系统:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)). \end{cases} \tag{3.2.15}$$

对于线性时不变 MIMO 连续时间系统 (3.2.3), 系统参数为 $\boldsymbol{\theta} := \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}\}$; 对于线性时变 MIMO 连续时间系统 (3.2.4), 系统参数为 $\boldsymbol{\theta}(t) := \{\boldsymbol{A}(t), \boldsymbol{B}(t), \boldsymbol{C}(t), \boldsymbol{D}(t)\}$.

### 3.2.3 离散时间系统状态空间表达

如果系统的状态、输入和输出只是在离散时间点 $t = t_k$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 或 $t = t_0, t_1, t_2, \cdots$ 上取值, 就称为 **离散时间系统** (Discrete-Time System) 或 **采样数据系统** (Sampled-Data System).

如果 $t = t_k = kT$ $(k = 0, 1, 2, \cdots,\ T$ 为采样周期), 就得到等间隔采样离散时间系统, 即研究最多的传统离散时间系统. 如果是非等间隔采样, 就得到 **非均匀采样数据系统** (Non-Uniformly Sampled-data System), 也是离散时间系统.

**1. 非线性时变多输入多输出离散时间系统** (Nonlinear Time-Varying MIMO Discrete-Time System)

离散时间系统一般用差分方程描述, 或一阶向量差分方程组描述. 非线性时变 MIMO 离散时间系统的状态空间模型可表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t_{k+1}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t_k), \boldsymbol{u}(t_k), t_k), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(t_k) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t_k), \boldsymbol{u}(t_k), t_k), \end{cases} \tag{3.2.16}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t_k) := \boldsymbol{x}(t)|_{t=t_k}$, $\boldsymbol{u}(t_k) := \boldsymbol{u}(t)|_{t=t_k}$ 和 $\boldsymbol{y}(t_k) := \boldsymbol{y}(t)|_{t=t_k}$ 分别称为离散时间系统的状态向量、输入向量和输出向量, 它们都是对应连续变量在 $t = t_k$ 时刻的采样值, 但是这里的 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t_k), \boldsymbol{u}(t_k), t_k) \in \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t_k), \boldsymbol{u}(t_k), t_k) \in \mathbb{R}^m$ 并不是连续系统 (3.2.9) 中 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$ 和 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$ 用 $t_k$ 代替 $t$ 得到的函数. 二者之间有极其复杂的关系, 可参见线性系统离散化内容.

**2. 线性时不变多输入多输出离散时间系统** (Linear Time-Invariant MIMO Discrete-Time System)

取 $t = t_k = kT$ $(k = 0, 1, 2, \cdots,\ T$ 为采样周期). 线性时不变 MIMO 离散时间系统的状态空间模型可表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(kT + T) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{u}(kT), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(kT) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(kT), \end{cases}$$

出于方便考虑, 记 $\boldsymbol{x}(k) := \boldsymbol{x}(kT)$, $\boldsymbol{u}(k) := \boldsymbol{u}(kT)$, $\boldsymbol{y}(k) := \boldsymbol{y}(kT)$, 则有

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{u}(k), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k), \end{cases} \tag{3.2.17}$$

其中 $\boldsymbol{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u}(k) \in \mathbb{R}^r$ 和 $\boldsymbol{y}(k) \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统状态向量、输入向量和输出向量, $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{m\times r}$ 为常数系统矩阵. 注: 这里的系统矩阵 $[\boldsymbol{G},\boldsymbol{F},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}]$ 也不是连续系统中的.

**注 3.2.2** 线性时不变离散时间系统稳定系指系统矩阵 $\boldsymbol{G}$ 稳定, 即矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的所有特征值都在单位圆内, 亦即特征方程 $|\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{G}| = 0$ 的根在复平面单位圆内. 线性离散时间系统的稳定性与矩阵 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 无关.

**3. 线性时变多输入多输出离散时间系统** (Linear Time-Varying MIMO Discrete-Time System)

线性时变 MIMO 离散时间系统的状态空间模型可表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}_k\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{F}_k\boldsymbol{u}(k), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \quad \boldsymbol{y}(k) \quad = \boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}_k\boldsymbol{u}(k), \end{cases} \tag{3.2.18}$$

其中 $\boldsymbol{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u}(k) \in \mathbb{R}^r$ 和 $\boldsymbol{y}(k) \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统状态向量、输入向量和输出向量, $\boldsymbol{G}_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{F}_k \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C}_k \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{D}_k \in \mathbb{R}^{m\times r}$ 是系统的时变参数矩阵.

**4. 线性时不变多输入单输出离散时间系统** (Linear Time-Invariant MISO Discrete-Time System)

线性时不变 MISO 离散时间系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{u}(k), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \quad y(k) \quad = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{d}\boldsymbol{u}(k), \end{cases} \tag{3.2.19}$$

其中 $\boldsymbol{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u}(k) \in \mathbb{R}^r$ 和 $y(k) \in \mathbb{R}$ 分别为系统状态向量、输入向量和输出, $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{1\times r}$.

**5. 线性时不变单输入多输出离散时间系统**(Linear Time-Invariant SIMO Discrete-Time System)

线性时不变 SIMO 离散时间系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{f}u(k), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \quad \boldsymbol{y}(k) \quad = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{d}u(k), \end{cases} \tag{3.2.20}$$

其中 $\boldsymbol{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{y}(k) \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统状态向量、输入和输出向量, $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^m$.

**6. 线性时不变单输入单输出离散时间系统** (Linear Time-Invariant SISO Discrete-Time System)

线性时不变 SISO 离散时间系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{f}u(k), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \quad y(k) \quad = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(k) + du(k), \end{cases} \tag{3.2.21}$$

其中 $\boldsymbol{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}$ 和 $y(k) \in \mathbb{R}$ 分别为系统状态向量、输入和输出, $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $d \in \mathbb{R}$. 线性时不变 SISO 离散时间状态空间系统 (3.2.21) 框图如图 3.2.4 所示, 其中 $z^{-1}\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{x}(k-1)$ 或 $z\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{x}(k+1)$.

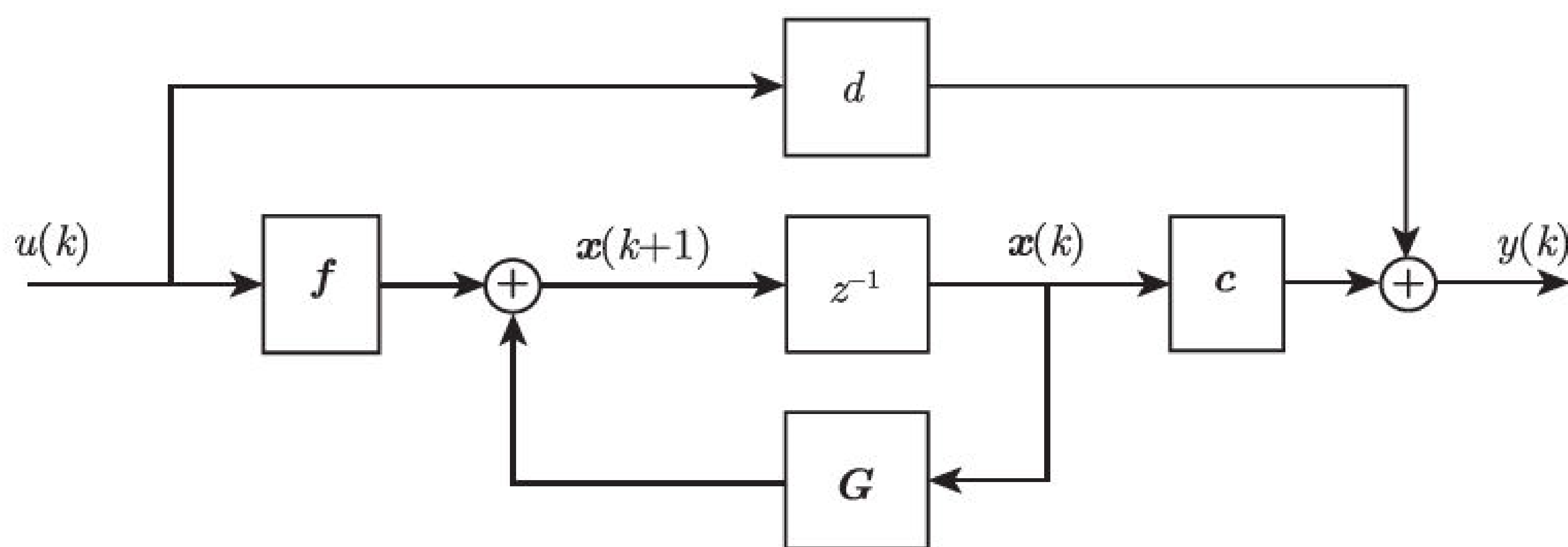



图 3.2.4 线性时不变 SISO 离散时间状态空间系统框图

本书中, 如果不特别说明, 状态空间模型中的变量如上所定义.

# 3.3 连续时间系统的状态空间模型

对于线性时不变系统, 微分方程、传递函数、状态空间模型三者之间可以互相转化. 本节研究它们之间的变换关系.

## 3.3.1 微分方程的传递函数表达

### 1. 微分方程模型

系统可分为 **连续时间系统** (Continuous-Time System) 和 **离散时间系统** (Discrete-Time System) 两大类. 连续时间系统一般可用微分方程模型描述为

$$\begin{aligned} &y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+a_2y^{(n-2)}(t)+\cdots+a_{n-1}y^{(1)}(t)+a_ny(t)\\ &\quad=b_1u^{(n-1)}(t)+b_2u^{(n-2)}(t)+\cdots+b_{n-1}u^{(1)}(t)+b_nu(t), \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

其中 $u(t)$ 和 $y(t)$ 分别为系统的输入和输出, $t$ 为时间变量, 各阶导数符号定义为

$$y^{(i)}(t)=\frac{\mathrm{d}^iy(t)}{\mathrm{d}t^i},\ y^{(2)}(t)=y''(t),\ y^{(1)}(t)=\dot{y}(t)=y'(t),\ y^{(0)}(t)=y(t).$$

当系数 $a_i,b_i$ 是与 $u(t),y(t),t$ 无关的常数时, 这样的系统称为 **线性时不变确定性系统** (Linear Time-Invariant Deterministic System), 或线性定常确定性系统. 在不至于混淆的情况下, 简称为 **线性时不变系统** (Linear Time-Invariant System) 或线性定常系统.

### 2. 传递函数模型

在零初始条件下, 对式 (3.3.1) 进行 **拉普拉斯变换** (Laplace Transform) 得到

$$\begin{aligned} &(s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n)Y(s)\\ &\quad=(b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots+b_{n-1}s+b_n)U(s), \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

其中复变量 $s$ 为 **拉普拉斯算子** (Laplace Operator), $Y(s)$ 和 $U(s)$ 为 $y(t)$ 和 $u(t)$ 的拉普拉斯变换: $Y(s):=\mathscr{L}[y(t)]$, $U(s):=\mathscr{L}[u(t)]$. 则

$$G(s):=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n} \tag{3.3.3}$$

称为系统的 **传递函数** (Transfer Function), 且有

$$Y(s)=G(s)U(s). \tag{3.3.4}$$

只有线性时不变系统才有传递函数. 线性时变系统和非线性系统都没有传递函数 (非线性系统包括非线性时不变系统和非线性时变系统).

**3. 传递算子模型**

若定义 **微分算子** (Differential Operator) $p = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 记

$$G(p) := \frac{b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \cdots + b_n}{p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \cdots + a_n}. \tag{3.3.5}$$

则式 (3.3.1) 可写为

$$\begin{aligned} & p^n y(t) + a_1 p^{(n-1)} y(t) + a_2 p^{(n-2)} y(t) + \cdots + a_{n-1} p y(t) + a_n y(t) \\ & \quad = b_1 p^{(n-1)} u(t) + b_2 p^{(n-2)} u(t) + \cdots + b_{n-1} p u(t) + b_n u(t), \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} & (p^n + a_1 p^{(n-1)} + a_2 p^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} p + a_n) y(t) \\ & \quad = (b_1 p^{(n-1)} + b_2 p^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1} p + b_n) u(t). \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

上式可以简单写作

$$y(t) = G(p) u(t), \tag{3.3.7}$$

其中 $G(p)$ 称为系统的 **传递算子** (Transfer Operator).

**注 3.3.1** 式 (3.3.3) 中 $G(s)$ 与式 (3.3.5) 中 $G(p)$ 具有相同形式. 为方便起见, 以后把二者统一起来都用 $G(s)$ 表示, 其中 $s$ 视问题需要可认为是 **拉普拉斯算子** (Laplace operator) 或 **微分算子** (Differential Operator). 传递函数或传递算子是微分方程的另一种表达形式.

### 3.3.2 传递函数的控制器规范型实现

把传递函数 (阵) 化为状态空间模型称为 **实现** (Realization). 传递函数可以化为状态空间模型, 也可以化为四种规范型 (控制器规范型、能控性规范型、观测器规范型、能观测性规范型). 这里给出传递函数化为控制器规范型的方法.

假设系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} + d.$$

其对应的输入输出关系为

$$y = (b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n) \frac{u}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} + du.$$

引入中间变量

$$\xi := \frac{u}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n}.$$

或

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n) \xi = u.$$

则有

$$\xi^{(n)}+a_1\xi^{(n-1)}+a_2\xi^{(n-2)}+\cdots+a_n\xi=u. \tag{3.3.8}$$

于是有

$$y=(b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots+b_n)\xi+du=b_1\xi^{(n-1)}+b_2\xi^{(n-2)}+\cdots+b_n\xi+du.$$

引入状态变量

$$\begin{cases} x_1 := \xi^{(n-1)}, \\ x_2 := \xi^{(n-2)}, \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} := \dot{\xi}, \\ x_n := \xi. \end{cases}$$

求导, 利用式 (3.3.8) 可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \xi^{(n)} = -a_1x_1-a_2x_2-\cdots-a_nx_n+u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = x_2, \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_n = x_{n-1}, \\ y = b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n+du. \end{cases}$$

令 $\boldsymbol{x} := [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$. 把以上各式写成矩阵形式, 就得到传递函数 $G(s)$ 的 **控制器规范型** 状态空间模型,

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}u, \\ y = [b_1, b_2, \cdots, b_n]\boldsymbol{x}+du. \end{cases}$$

控制器规范型的结构如图 3.3.1 所示.

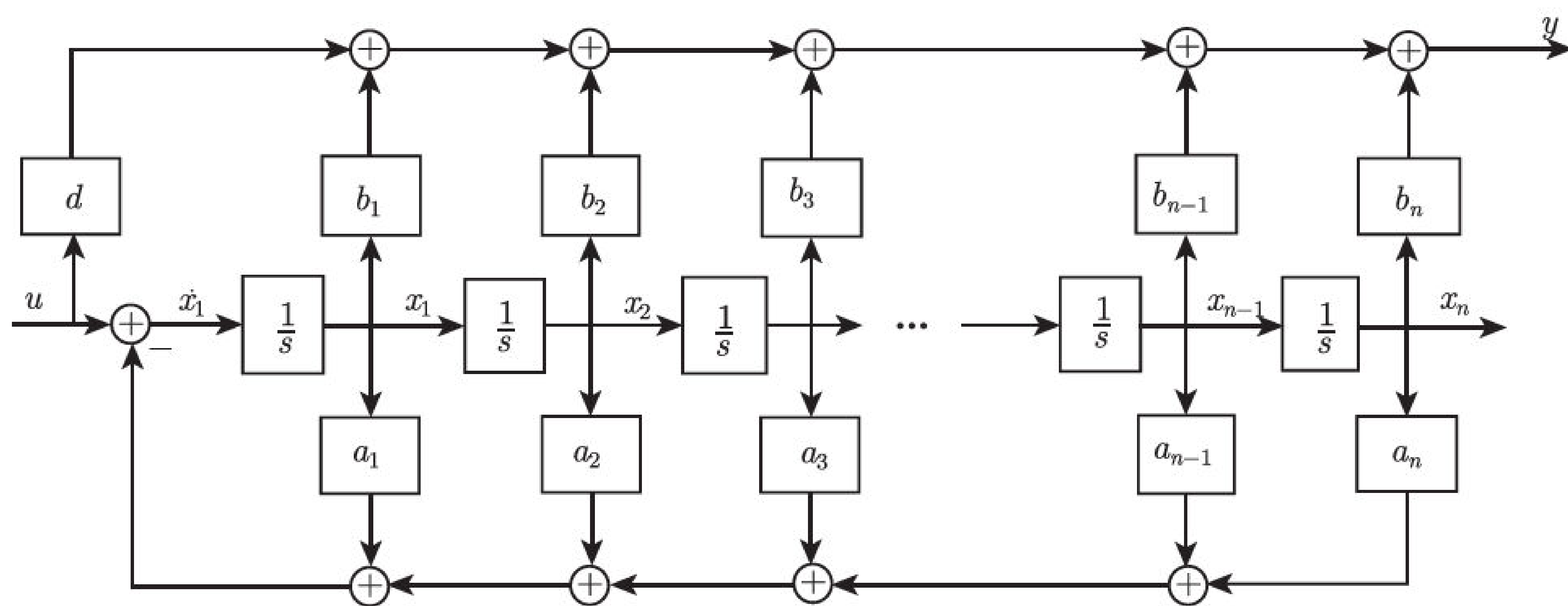



图 3.3.1　控制器规范型的结构图

### 3.3.3 微分方程的观测器规范型实现

微分方程可以通过设置不同的状态变量, 直接化为状态空间模型. 这里先给出一个二阶微分方程化为状态空间模型的例子, 然后给出化 $n$ 阶微分方程为观测器规范型 (一种特别形式的状态空间模型) 的方法.

**例 3.3.1** 设二阶常系数微分方程如下,

$$y''(t)+a_1y'(t)+a_2y(t)=b_1u'(t)+b_2u(t), \tag{3.3.9}$$

把这个微分方程化为状态空间模型.

**解** 这是一个二阶系统, 方程左边包含了输出 $y$ 的二阶导数, 右边包含了输入 $u$ 的一阶导数. 定义两个状态变量 $x_1$ 和 $x_2$ 如下,

$$\begin{cases} x_1 := y, \\ x_2 := \dot{y}. \end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2, \\ \dot{x}_2 = y'' = -a_1\dot{y}-a_2y+b_1\dot{u}+b_2u \\ \quad\ = -a_1x_2-a_2x_1+b_1\dot{u}+b_2u. \end{cases}$$

写成状态方程为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_1\dot{u}(t)+b_2u(t) \end{pmatrix}, \\ \quad y(t) \quad = x_1(t) = [1,\ 0] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

这个方程右边包含了输入的导数, 是不希望的, 因为导数容易将误差放大. 为避免在状态方程中出现输入的导数, 重新设置状态变量:

$$\begin{cases} x_1 := y, \\ x_2 := \dot{y}+a_1y-b_1u \\ \quad\ = \dot{x}_1+a_1x_1-b_1u. \end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1x_1+x_2+b_1u, \\ \dot{x}_2 = y''+a_1y'-b_1u' \\ \quad\ = -a_2y+b_2u \\ \quad\ = -a_2x_1+b_2u. \end{cases}$$

上式最后一步利用了式 (3.3.9). 把以上各式写成矩阵形式可以得到微分方程 (3.3.9) 的观测器规范型实现为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u(t), \\ \quad y(t) \quad = x_1(t) = [1,\ 0] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

有时出于方便, 把时间 $t$ 省略, 即把 $y(t)$ 简写 $y$, 把 $u(t)$ 简写 $u$ 等. 重写式 (3.3.1) 如下,

$$\begin{aligned} & y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}y^{(1)}+a_ny \\ & \quad =b_1u^{(n-1)}+b_2u^{(n-2)}+\cdots+b_{n-1}u^{(1)}+b_nu. \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

引入状态变量:

$$\begin{cases} x_1=y, \\ x_2=\dot{y}+a_1y-b_1u \\ \quad =\dot{x}_1+a_1x_1-b_1u, \\ x_3=y^{(2)}+a_1\dot{y}+a_2y-b_1\dot{u}-b_2u \\ \quad =\dot{x}_2+a_2x_1-b_2u, \\ x_4=y^{(3)}+a_1y^{(2)}+a_2\dot{y}+a_3y-b_1u^{(2)}-b_2\dot{u}-b_3u \\ \quad =\dot{x}_3+a_3x_1-b_3u, \\ \vdots \\ x_n=y^{(n-1)}+a_1y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}y-b_1u^{(n-2)}-b_2u^{(n-3)}-\cdots-b_{n-1}u \\ \quad =\dot{x}_{n-1}+a_{n-1}x_1-b_{n-1}u. \end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases} \dot{x}_1=-a_1x_1+x_2+b_1u, \\ \dot{x}_2=-a_2x_1+x_3+b_2u, \\ \dot{x}_3=-a_3x_1+x_4+b_3u, \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_{n-1}=-a_{n-1}x_1+x_n+b_{n-1}u, \\ \dot{x}_n=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_n\dot{y}-b_1u^{(n-1)}-b_2u^{(n-2)}-\cdots-b_{n-1}\dot{u} \\ \quad\;\; =-a_nx_1+b_nu. \end{cases}$$

上式最后一步利用了式 (3.3.10). 令 $\boldsymbol{x}(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]^{\mathrm{T}}$, 把以上各式写成矩阵形式可以得到微分方程 (3.3.10) 的 **观测器规范型实现** 为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}u(t), \\ y(t)=x_1(t)=[1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0]\boldsymbol{x}(t). \end{cases} \tag{3.3.11}$$

观测器规范型的结构如图 3.3.2 所示. 读者可以验证系统 (3.3.11) 的传递函数 $G(s)$ 恰好为式 (3.3.3).

**注 3.3.2** 由于观测器规范型中参数 $(a_i,b_i)$ 与微分方程 (3.3.1) 或传递函数描述 (3.3.3) 中参数一一对应, 因此, 若已知观测器规范型实现, 则立即可写出系统的传递函数或微分方程描述; 反之亦然. 控制器规范型也如此, 参见下节的控制器规范型实现.

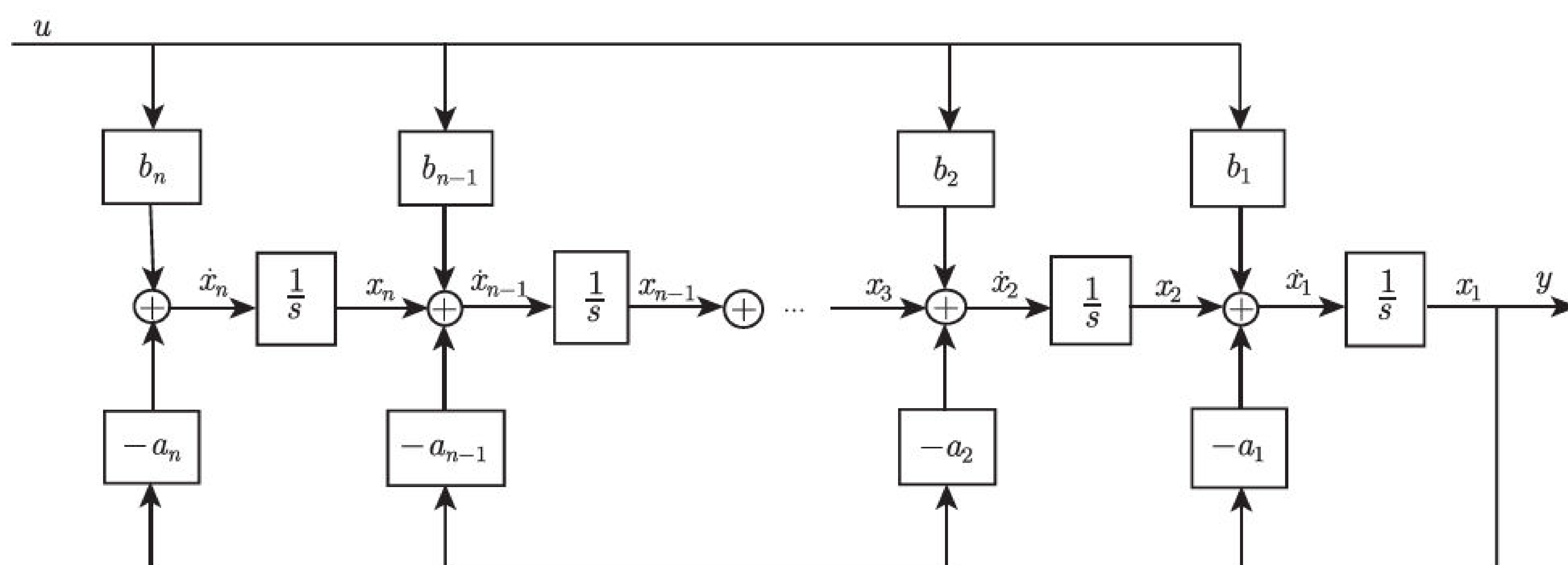



图 3.3.2 观测器规范型的结构框图

## 3.4 状态空间模型线性变换及其性质

本节推导状态空间模型的传递函数矩阵、研究状态空间模型的线性变换, 以及在非奇异线性变换下, 系统的传递矩阵的不变性、特征多项式的不变性、特征值的不变性、能控性的不变性、能观测性的不变性、最小特征多项式的不变性, 介绍凯莱–哈密尔顿定理.

考虑线性时不变多输入多输出连续时间状态空间系统,

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t),\end{cases} \tag{3.4.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ 是系统的 ($n$ 维) **状态向量** (State Vector), $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbb{R}^r$ 和 $\boldsymbol{y}(t)\in\mathbb{R}^m$ 分别为系统的输入向量和输出向量, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$、$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times r}$、$\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{D}\in\mathbb{R}^{m\times r}$ 均为常数矩阵.

### 3.4.1 状态空间模型的传递函数阵

对式 (3.4.1) 进行 **拉普拉斯变换** (Laplace Transform), 依次可得

$$\begin{aligned}
s\boldsymbol{X}(s)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s),\\
\boldsymbol{X}(s)&=(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s),\\
\boldsymbol{Y}(s)&=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s)\\
&=[\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{U}(s)\\
&=:\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{U}(s).
\end{aligned}$$

所以从 $\boldsymbol{U}(s)$ 到 $\boldsymbol{Y}(s)$ 的 **传递矩阵** (Transfer Matrix) 为

$$\boldsymbol{G}(s):=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D} \tag{3.4.2}$$

$$\quad=\frac{\boldsymbol{C}\,\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{B}}{|s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|}+\boldsymbol{D}. \tag{3.4.3}$$

它揭示了传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 与状态空间模型参数矩阵 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}]$ 之间的关系. 传递矩阵也称传递函数矩阵、传递函数阵.

**注 3.4.1** 从式 (3.4.3) 可以看出, 状态空间系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|$ 就是传递函数矩阵的分母. 因此, 传递函数矩阵的稳定性对应于状态空间系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的稳定性, 即

$\boldsymbol{A}$ 的特征值具有负实部.

MATLAB 是一个集成化编程工具, 提供了很多函数可以很方便地进行系统仿真, 包含控制系统仿真工具箱 Simulink、辨识工具箱 Ident 等. 例如, 可用函数 tf 建立一个传递函数, ss 产生一个状态空间模型, step 绘制阶跃响应曲线, impulse 绘制脉冲响应曲线等. 这些命令的用法可借助于 MATLAB 的 help 命令查询, 例如 help tf 可查函数 tf 的用法. 下面是使用**MATLAB 函数**的简单例子.

用 tf 产生一个传递函数

$$G(s) = \frac{4s+5}{s^2+2s+3},$$

然后用 step 绘制系统的阶跃响应曲线的命令如下:

```
1  >> G1=tf([4, 5], [1, 2, 3])
2
3  Transfer function:
4      4 s + 5
5  ―――――――――――――
6  s^2 + 2 s + 3
7
8  >> step(G1)
```

产生一个状态空间模型

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} 0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ \quad y \quad = [4,\ 5] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0u, \end{cases}$$

再求系统的传递函数的命令如下:

```
1  >> A=[-2, -3; 1, 0]; b=[1, 0]'; c=[4, 5]; d=0;
2  >> ss1=ss(A,b,c,d)
3
4  a =
5            x1   x2
6      x1   -2   -3
7      x2    1    0
8
9  b =
10           u1
11     x1    1
12     x2    0
13
14 c =
15           x1   x2
16     y1    4    5
17
```

```
18 d =
19          u1
20     y1    0
21
22 Continuous-time model.
23 >> G1=tf(ss1)
24
25 Transfer function:
26     4 s + 5
27 -------------
28 s^2 + 2 s + 3
```

当然, 可以用命令 impulse(ss1) 绘制状态空间模型的脉冲响应曲线图, 用 [a,b,c,d]=tf2ss([4,5],[1,2,3]) 产生传递函数的控制器标准形.

### 3.4.2 状态空间模型的线性变换

下面讨论状态空间模型的线性变换 (相似变换) 问题: 对状态空间模型 (3.4.1) 进行 **线性变换** (Linear Transformation). 设 $\boldsymbol{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为 **非奇异矩阵** (Non-Singular Matrix), 定义新状态变量 (状态向量) $\bar{\boldsymbol{x}}(t) := \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 或 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$, 那么利用式 (3.4.1) 有

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) &= \boldsymbol{T}^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{T}^{-1}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)] \\ &= \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ &=: \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(t), \quad \bar{\boldsymbol{x}}(t_0) = \bar{\boldsymbol{x}}_0 = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}_0,\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \\ &=: \bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t),\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}, \quad \bar{\boldsymbol{B}} := \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}, \quad \bar{\boldsymbol{C}} := \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}. \tag{3.4.6}$$

式 (3.4.4)、式 (3.4.5) 构成了新状态变量下的状态空间模型. 可见系统状态变量是非唯一的, 所以一个系统的状态空间表达也不是唯一的. 下面讨论线性变换下状态空间模型的性质.

### 3.4.3 线性变换下系统传递函数与特征多项式

**1. 相似变换下系统特征多项式的不变性**

系统 (3.4.1) 的特征多项式定义为

$$f(s) := \det[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}],$$

其中 $\boldsymbol{I}_n$ 为 $n$ 阶 **单位阵** (Identity Matrix). 系统 (3.4.4)~(3.4.5) 的特征多项式为

$$\bar{f}(s) := \det[s\boldsymbol{I}_n - \bar{\boldsymbol{A}}].$$

在线性变换下, 系统 (3.4.4)~(3.4.5) 与系统 (3.4.1) 有相同的特征多项式, 即

$$\bar{f}(s) = f(s).$$

事实上, 使用公式 $\det[\boldsymbol{AB}] = \det[\boldsymbol{A}]\det[\boldsymbol{B}]$ 和式 (3.4.6), 有

$$\begin{aligned}\bar{f}(s) &:= \det[s\boldsymbol{I}_n - \bar{\boldsymbol{A}}] = \det[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}] = \det\{\boldsymbol{T}^{-1}[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}]\boldsymbol{T}\} \\ &= \det[\boldsymbol{T}^{-1}]\det[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}]\det[\boldsymbol{T}] = \det[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}] = f(s).\end{aligned}$$

**2. 相似变换下系统特征值的不变性**

系统 (3.4.1) 的特征值定义为特征方程

$$f(s) = \det[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}] = 0$$

的根 $s_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 在线性变换下, 系统 (3.4.4)~(3.4.5) 与系统 (3.4.1) 有相同的特征值, 即系统 (3.4.4)~(3.4.5) 的特征多项式 $\bar{f}(s)$ 与 $f(s)$ 有相同的零点, 或 $\bar{f}(s) = 0$ 与 $f(s) = 0$ 有相同的根. 结论是明显的, 因为它们有相同的特征多项式, 故有相同的零点 (特征值).

**3. 相似变换下系统传递函数 (阵) 的不变性**

仿照式 (3.4.2) 的推导, 容易得到相似变换后系统 (3.4.4)~(3.4.5) 的传递矩阵

$$\bar{\boldsymbol{G}}(s) := \bar{\boldsymbol{C}}(s\boldsymbol{I}_n - \bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\bar{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{D}. \tag{3.4.7}$$

相似变换下系统传递函数 (阵) 的不变性说明 $\bar{\boldsymbol{G}}(s) = \boldsymbol{G}(s)$. 事实上, 使用公式 $(\boldsymbol{RS})^{-1} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{R}^{-1}$, $(\boldsymbol{RST})^{-1} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{R}^{-1}$ 和式 (3.4.6), 有

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{G}}(s) &= \bar{\boldsymbol{C}}(s\boldsymbol{I}_n - \bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\bar{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{D} \\ &= \boldsymbol{CT}(s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{T}(s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})\boldsymbol{T}^{-1}]^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \\ &= \boldsymbol{C}[\boldsymbol{T}s\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{T}^{-1} - \boldsymbol{TT}^{-1}\boldsymbol{ATT}^{-1}]^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} = \boldsymbol{G}(s).\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

因此, 在非奇异线性变换下, 系统 (3.4.4)~(3.4.5) 与系统 (3.4.1) 有相同的传递函数矩阵, 即系统传递函数阵是唯一的, 但一个系统的状态空间表达不是唯一的.

**4. 凯莱–哈密尔顿定理** (Cayley–Hamilton Theorem)

**定理 3.4.1 凯莱–哈密尔顿定理** (Cayley–Hamilton Theorem)

若矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的特征方程为

$$\det[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}] = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 本身也满足上述特征方程, 即

$$\boldsymbol{A}^n + a_1\boldsymbol{A}^{n-1} + a_2\boldsymbol{A}^{n-2} + \cdots + a_n\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{0},$$

或

$$\boldsymbol{A}^n = -a_1\boldsymbol{A}^{n-1} - a_2\boldsymbol{A}^{n-2} - \cdots - a_n\boldsymbol{I}_n. \tag{3.4.9}$$

**证明** 由于 $s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}]$ 是 $s$ 的 $n-1$ 次多项式, 即 $\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}]$ 具有下列形式 [参见思考题 24],

$$\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}] = s^{n-1}\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{R}_2 s^{n-2} + \boldsymbol{R}_3 s^{n-3} + \cdots + \boldsymbol{R}_{n-1}s + \boldsymbol{R}_n \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

且

$$(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}]}{\det[s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}]},$$

或

$$(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})\,\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}]=\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}](s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=\det[s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{I}_n.$$

所以

$$\begin{aligned}\det[s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{I}_n&=(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})(s^{n-1}\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{R}_2s^{n-2}+\boldsymbol{R}_3s^{n-3}+\cdots+\boldsymbol{R}_{n-1}s+\boldsymbol{R}_n)\\&=(s^{n-1}\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{R}_2s^{n-2}+\boldsymbol{R}_3s^{n-3}+\cdots+\boldsymbol{R}_{n-1}s+\boldsymbol{R}_n)(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}).\end{aligned}$$

从上式可以看出, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{R}_i$ 相乘次序是可交换的. 因此, 如果 $(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})$ 及其伴随矩阵 $\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}]$ 中有一个为零, 则其乘积为零. 如果上式中用 $\boldsymbol{A}$ 代替 $s$, 显然 $(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})$ 为零. 于是有

$$\boldsymbol{A}^n+a_1\boldsymbol{A}^{n-1}+a_2\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+a_n\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{0}.$$

这就证明了凯莱–哈密尔顿定理.

这个定理告诉我们, $\boldsymbol{A}$ 的任意高于 $n$ 次幂 $\boldsymbol{A}^{n+i}$ $(i\geqslant 0)$ 都可以表示为 $\boldsymbol{I}_n$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^2$, $\cdots$, $\boldsymbol{A}^{n-1}$ 的线性组合. 事实上, 由 $\boldsymbol{A}^{n+i}=\boldsymbol{A}^{i-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^n$, 利用式 (3.4.9) 可直接加以证明. 例如,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=-a_1\boldsymbol{A}^{n-1}-a_2\boldsymbol{A}^{n-2}-\cdots-a_n\boldsymbol{I}_n.\\\boldsymbol{A}^{n+1}&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}(-a_1\boldsymbol{A}^{n-1}-a_2\boldsymbol{A}^{n-2}-\cdots-a_n\boldsymbol{I}_n)\\&=-a_1\boldsymbol{A}^n-a_2\boldsymbol{A}^{n-1}-a_3\boldsymbol{A}^{n-2}-\cdots-a_n\boldsymbol{A}\\&=-a_1(-a_1\boldsymbol{A}^{n-1}-a_2\boldsymbol{A}^{n-2}-\cdots-a_n\boldsymbol{I}_n)-a_2\boldsymbol{A}^{n-1}-a_3\boldsymbol{A}^{n-2}-\cdots-a_n\boldsymbol{A}\\&=(a_1^2-a_2)\boldsymbol{A}^{n-1}+(a_1a_2-a_3)\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+(a_1a_{n-1}-a_n)\boldsymbol{A}+a_1a_n\boldsymbol{I}_n.\\\boldsymbol{A}^{n+2}&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{n+1}\\&=\boldsymbol{A}[(a_1^2-a_2)\boldsymbol{A}^{n-1}+(a_1a_2-a_3)\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+(a_1a_{n-1}-a_n)\boldsymbol{A}+a_1a_n\boldsymbol{I}_n]\\&=(a_1^2-a_2)\boldsymbol{A}^n+(a_1a_2-a_3)\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+(a_1a_{n-1}-a_n)\boldsymbol{A}^2+a_1a_n\boldsymbol{A}=\cdots\end{aligned}$$

如果定义矩阵指数,

$$\exp(\boldsymbol{A}):=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{2!}+\frac{\boldsymbol{A}^3}{3!}+\cdots$$

那么存在常数 $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\cdots$, $\alpha_{n-1}$ 使得下式成立,

$$\exp(\boldsymbol{A})=\alpha_0\boldsymbol{I}_n+\alpha_1\boldsymbol{A}+\alpha_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+\alpha_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}.$$

凯莱–哈密尔顿定理在线性代数与矩阵论有关定理的证明中是非常有用的.

**5. 线性变换下系统最小多项式的不变性**

设方阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的特征方程多项式为

$$f(s) := \det[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}] = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n.$$

按照凯莱–哈密尔顿定理有 $f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$. 如果 $n$ 次多项式 $f(s)$ 存在一个分解 (下面的 $f_1(s)$ 和 $f_2(s)$ 是两个多项式),

$$f(s) = f_1(s) f_2(s),$$

使得 $f_1(s)$ 是满足 $f_1(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$ 的阶次最低的首 1 多项式, 就称为 $\boldsymbol{A}$ 的 **最小多项式**. 由此可知, $f_1(s)$ 是 $f(s)$ 的因子. 最特别的情形是最小多项式 $f_1(s)$ 等于 $f(s)$.

按照凯莱–哈密尔顿定理, 方阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足其自身的特征方程,

$$f(s) := \det[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}] = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n,$$

即 $s = \boldsymbol{A}$ 是 $f(s) = 0$ 的根 $[f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}]$. 然而特征方程不一定是 $\boldsymbol{A}$ 满足的最小阶次的纯量方程. 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为其根的最小阶次首 1 多项式称为最小多项式, 也就是说, $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $d(s)$ 定义为使得 $d(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$ 的最小阶次的首 1 多项式 $(\deg[d(s)] \leqslant \deg[f(s)])$.

假设 $s$ 的多项式 $m(s)$ 是 $(s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})$ 伴随矩阵 $\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}]$ 所有元的最大公因子. 可以证明, 如果将 $m(s)$ 的 $s$ 最高阶次的系数选为 1, 则最小多项式 $d(s)$ 由下式给出,

$$d(s) = \frac{\det[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}]}{m(s)}. \tag{3.4.10}$$

矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的最小多项式 $d(s)$ 可按下列步骤计算.

(1) 对伴随矩阵 $\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}]$ 的各元进行因子分解, 其因子都是 $s$ 的首 1 一次多项式.

(2) 确定伴随矩阵 $\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}]$ 各元的最大公因子 $m(s)$. 如果不存在公因子, 则 $m(s) = 1$.

(3) 最小多项式 $d(s)$ 可由 $\det[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}]$ 除以 $m(s)$ 得到, 参见式 (3.4.10).

**注 3.4.2** 因为相似变换下系统特征多项式的不变性, 所以线性变换下系统最小多项式是不变的. 最小多项式在矩阵多项式的计算中起着重要作用.

**例 3.4.1** 最小多项式的例子

矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征多项式为

$$f(s) = \det[s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}] = \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & -1 \\ 0 & 0 & s-1 \end{pmatrix} = (s-1)^3.$$

令 $f_1(s) = s - 1$, $f_2(s) = (s-1)^2$. 它们是 $f(s)$ 的因子. 计算

$$\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \boldsymbol{0},$$

所以 $f_2(s) = (s-1)^2 = s^2 - 2s + 1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式, $f_1(s) = s - 1$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式. 当然, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$.

**例 3.4.2** 计算下列系统的特征值和传递函数,

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} u, \\ \quad y \quad = [6,\ 7]\boldsymbol{x}. \end{cases}$$

**解** 对于本例,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = [6,\ 7], \quad d = 0,$$

系统的特征多项式为

$$\begin{aligned} p(s) &= \det[s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}] = \begin{vmatrix} s-2 & -3 \\ -1 & s \end{vmatrix} \\ &= s^2 - 2s - 3. \end{aligned}$$

令 $p(s) = 0$ 得到特征方程 $s^2 - 2s - 3 = 0$, 或 $(s+1)(s-3) = 0$, 所以系统的特征值为 $s = -1$ 和 $s = 3$. 这个系统有 **正特征值根**, 故是不稳定的. 系统的传递函数为

$$\begin{aligned} G(s) &= \boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} + d \\ &= \boldsymbol{c} \begin{pmatrix} s-2 & -3 \\ -1 & s \end{pmatrix}^{-1} \boldsymbol{b} + 0 = [6,\ 7] \begin{pmatrix} s-2 & -3 \\ -1 & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + 0 \\ &= [6,\ 7] \frac{\begin{pmatrix} s & 3 \\ 1 & s-2 \end{pmatrix}}{s^2 - 2s - 3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{[6s+7, 7s+4]}{s^2 - 2s - 3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{59s + 48}{(s+1)(s-3)}. \end{aligned}$$

**注 3.4.3** 从这个例子可以看出: 状态方程矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值就是系统 (传递函数) 的极点. 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值具有负实部, 就说 $\boldsymbol{A}$ 是稳定矩阵, 或 $\boldsymbol{A}$ 是 **胡尔维茨矩阵** (Hurwitz Matrix), 就称系统是稳定的. 传递函数的稳定性取决于传递函数分母的零点 (即系统的极点), 传递函数的分母就是系统的特征多项式.

### 3.4.4 线性变换下系统的能控性与能观测性

#### 1. 线性变换下系统能控性不变

系统 (3.4.1) 能控性矩阵定义为

$$\boldsymbol{Q}_c := [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}] \in \mathbb{R}^{n \times (nr)}.$$

如果能控性矩阵 $\boldsymbol{Q}_c$ 的秩等于系统阶次 $n$ (状态向量的维数) (矩阵的秩定义为其最大子矩阵非零行列式的维数), 即

$$\text{rank}[\boldsymbol{Q}_c] = \text{rank}[\boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}] = n,$$

那么系统 (3.4.1) 就是完全能控的或完全可控的, 简称系统能控或系统可控. 如果 $\mathrm{rank}[\boldsymbol{Q}_c] = i < n$, 系统就不完全能控或不完全可控, 简称系统不能控或系统不可控, 此时能控状态数目为 $i$, 不能控状态数目为 $n-i$ (不能确定哪几个状态变量可控, 哪几个不可控).

类似地, 相似变换后系统 (3.4.4)~(3.4.5) 的能控性矩阵为

$$\bar{\boldsymbol{Q}}_c := [\bar{\boldsymbol{B}}, \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{B}}, \bar{\boldsymbol{A}}^2\bar{\boldsymbol{B}}, \cdots, \bar{\boldsymbol{A}}^{n-1}\bar{\boldsymbol{B}}] \in \mathbb{R}^{n\times(nr)}.$$

相似变换下系统能控性是不变的, 说明 $\mathrm{rank}[\bar{\boldsymbol{Q}}_c] = \mathrm{rank}[\boldsymbol{Q}_c]$, 即变换后系统与原系统有相同数目的能控状态变量. 事实上, 使用式 (3.4.6), 有

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}[\bar{\boldsymbol{Q}}_c] &= [\bar{\boldsymbol{B}}, \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{B}}, \bar{\boldsymbol{A}}^2\bar{\boldsymbol{B}}, \cdots, \bar{\boldsymbol{A}}^{n-1}\bar{\boldsymbol{B}}]\\ &= \mathrm{rank}[\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}, (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}), (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^2(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}), \cdots, (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^{n-1}(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B})].\end{aligned}$$

因为

$$(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^i = \overbrace{(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})\cdot(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})\cdots(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})}^{i} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{T},$$

所以有

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}[\bar{\boldsymbol{Q}}_c] &= \mathrm{rank}[\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}, (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}), (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^2(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}), \cdots, (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^{n-1}(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B})]\\ &= \mathrm{rank}[\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}, (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}), (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{T})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}), \cdots, (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B})]\\ &= \mathrm{rank}[\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]\\ &= \mathrm{rank}\{\boldsymbol{T}^{-1}[\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]\}\\ &= \mathrm{rank}[\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Q}_c].\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{T}$ 是非奇异矩阵 (满秩的), 所以 $\mathrm{rank}[\boldsymbol{T}^{-1}] = n$. 因此有

$$\mathrm{rank}[\bar{\boldsymbol{Q}}_c] = \mathrm{rank}[\boldsymbol{Q}_c].$$

这里使用了 **矩阵秩的性质**

(1) 设 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times r}$, 则有

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}] \leqslant \min\{\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}], \mathrm{rank}[\boldsymbol{B}]\}.$$

(2) 设 $\boldsymbol{A}_i$ 的维数满足可相乘条件, 有

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k] \leqslant \min\{\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}_1], \mathrm{rank}[\boldsymbol{A}_2], \cdots, \mathrm{rank}[\boldsymbol{A}_k]\}.$$

(3) 如果 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 都是可逆方阵, 那么

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}] = \mathrm{rank}[\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}] = \mathrm{rank}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}] = \mathrm{rank}[\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}].$$

因此, 在非奇异线性变换下, 系统 (3.4.4)~(3.4.5) 与系统 (3.4.1) 有相同的能控性, 即系统的能控状态数目是相同的, 不能控状态的数目也是不变的.

**2. 线性变换下系统能观测性不变**

系统 (3.4.1) 能观测性矩阵定义为

$$\boldsymbol{Q}_o := \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(mn)\times n}.$$

如果能观测性矩阵 $\boldsymbol{Q}_o$ 的秩等于系统阶次 $n$ (状态向量的维数), 即

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{Q}_o] = n,$$

那么系统 (3.4.1) 就是完全能观测的或完全可观测的, 简称系统能观测或系统可观测. 如果 $\mathrm{rank}[\boldsymbol{Q}_o] = j < n$, 系统就不完全能观测或不完全可观测, 简称系统不能观测或不可观测, 此时能观测状态数目为 $j$, 不能观测状态数目为 $n - j$ (不能确定哪几个状态变量可观测, 哪几个不可观测).

类似地, 相似变换后系统 (3.4.4)~(3.4.5) 的能观测性矩阵为

$$\bar{\boldsymbol{Q}}_o := \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{C}} \\ \bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{A}} \\ \bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{A}}^2 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{A}}^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(mn)\times n}.$$

相似变换下系统能观测性是不变的, 说明 $\mathrm{rank}[\bar{\boldsymbol{Q}}_o] = \mathrm{rank}[\boldsymbol{Q}_o]$, 即变换后系统与原系统有相同数目能观测状态变量. 事实上, 使用式 (3.4.6), 有

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}[\bar{\boldsymbol{Q}}_o] &= \mathrm{rank}\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{C}} \\ \bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{A}} \\ \bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{A}}^2 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{A}}^{n-1} \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{CT} \\ (\boldsymbol{CT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}) \\ (\boldsymbol{CT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})^2 \\ \vdots \\ (\boldsymbol{CT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{CT} \\ (\boldsymbol{CT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}) \\ (\boldsymbol{CT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{T}) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{CT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{T}) \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{CT} \\ \boldsymbol{CAT} \\ \boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{T} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1}\boldsymbol{T} \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rank}\left\{\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{pmatrix}\boldsymbol{T}\right\} = \mathrm{rank}[\boldsymbol{Q}_o\boldsymbol{T}] = \mathrm{rank}[\boldsymbol{Q}_o]. \end{aligned}$$

这里仍使用了 $\boldsymbol{T}$ 是非奇异矩阵的假设. 因此, 在线性变换下, 系统 (3.4.4)~(3.4.5) 与系统 (3.4.1) 有相同的能观测性, 即系统的能观测状态数目是相同的, 不能观测状态的数目也是不变的.

## 3.5 状态空间规范型

考虑线性时不变单输入单输出连续时间系统:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + du(t), \end{cases} \tag{3.5.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}$ 和 $y(t) \in \mathbb{R}$ 分别为系统输入和输出, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $d \in \mathbb{R}$.

单输入单输出系统 (3.5.1) 包含 $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ 个参数, 其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 $n^2$ 个参数, 向量 $\boldsymbol{b}$ 有 $n$ 个参数, 向量 $\boldsymbol{c}$ 有 $n$ 个参数, 还有参数 $d$. 我们已经说明状态空间模型是不唯一的, 因为包含了太多的自由参数. 因此有必要确定某种规范型使得状态空间模型的参数数目尽可能少, 使得在某种条件下, 可将状态空间模型变换为唯一的模型表达, 这就是本节要研究的 4 种规范型: 控制器规范型、能控性规范型、观测器规范型、能观测性规范型, 它们都只有 $2n+1$ 个自由参数. 并且这 4 个规范型是唯一的, 且可以互相转换. 本节介绍通过非奇异线性变换将系统转换为这 4 种规范型的方法, 以及线性系统的对偶性与对偶原理.

对式 (3.5.1) 进行 **线性变换** (Linear Transformation) $\boldsymbol{x}(t) := \boldsymbol{T}\boldsymbol{z}(t)$ 或 $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{T}$ 为 **非奇异矩阵** (Non-Singular Matrix), 则可化为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{g}u(t), \quad \boldsymbol{z}(t_0) = \boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}_0, \\ y(t) = \boldsymbol{h}\boldsymbol{z}(t) + du(t), \end{cases} \tag{3.5.2}$$

其中

$$\boldsymbol{F} := \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}, \quad \boldsymbol{g} := \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{h} := \boldsymbol{c}\boldsymbol{T}. \tag{3.5.3}$$

如果状态空间模型 (3.5.1) 完全可控和 (或) 完全可观, 则可以通过非奇异线性变换将模型 (3.5.1) 化为 4 种规范型, 现分述如下.

有关 **友矩阵** (Companion Matrix) 及其特殊矩阵间的变换, 可参见论文“Transformations between some special matrices (一些特殊矩阵之间的相似变换)”[24].

### 3.5.1 控制器规范型

**控制器规范型** (Controller Canonical Form) 结构如下,

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_c(t) = \boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x}_c(t) + \boldsymbol{b}_c u(t), \\ \ y(t) \ = \boldsymbol{c}_c\boldsymbol{x}_c(t) + du(t), \end{cases} \tag{3.5.4}$$

其中下标 c 是英文控制器 controller 的第一个字母, 意思是控制器规范型,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_c &:= \boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_c \\ &= \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \boldsymbol{b}_c := \boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{c}_c := \boldsymbol{c}\boldsymbol{T}_c = [b_1, b_2, \cdots, b_n] \in \mathbb{R}^{1\times n},$$

变换矩阵为

$$\boldsymbol{T}_c := \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-1} \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{r}_n \end{pmatrix}^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$\boldsymbol{r}_n$ 为 $\boldsymbol{T}_{co}^{-1} := [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]^{-1}$ 的第 $n$ 行.

**证明** 由于 $\boldsymbol{r}_n$ 为 $\boldsymbol{T}_{co}^{-1}$ 的第 $n$ 行, 即 $\boldsymbol{T}_{co}^{-1} = \begin{pmatrix} * \\ \boldsymbol{r}_n \end{pmatrix}$, 其中 $*$ 为适当维数的矩阵. 故有

$$\boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{T}_{co} = \begin{pmatrix} * \\ \boldsymbol{r}_n \end{pmatrix}[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}] = \boldsymbol{I}_n.$$

上式第 $n$ 行为

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{b} = 0, \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = 0, \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{b} = 0, \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b} = 1. \end{cases}$$

于是有

$$\boldsymbol{b}_c = \boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-1} \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{r}_n \end{pmatrix}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{T}_c = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-1} \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{r}_n \end{pmatrix}\boldsymbol{T}_c = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{T}_c \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{T}_c \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_c \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{T}_c \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}_n.$$

把上式矩阵展开可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{T}_c = [1, 0, 0, 0, \cdots, 0] =: \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{T}_c = [0, 1, 0, 0, \cdots, 0] =: \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-3}\boldsymbol{T}_c = [0, 0, 1, 0, \cdots, 0] =: \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}, \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{T}_c = [0, 0, 0, 0, \cdots, 1] =: \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{3.5.5}$$

因此,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_c = \boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_c &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-1} \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{r}_n \end{pmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_c \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{T}_c \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{T}_c \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{2}\boldsymbol{T}_c \\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{T}_c \\ \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_{n-2}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{e}_{n-1}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.5.6}
$$

**凯莱–哈密尔顿定理** (Cayley–Hamilton Theorem) 告诉我们: 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$
\det[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}] = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n = 0,
$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 本身也满足上述方程, 即

$$
\boldsymbol{A}^n = -a_1\boldsymbol{A}^{n-1} - a_2\boldsymbol{A}^{n-2} - \cdots - a_n\boldsymbol{I}_n. \tag{3.5.7}
$$

式 (3.5.7) 两边左乘 $\boldsymbol{r}_n$, 右乘 $\boldsymbol{T}_c$, 并利用式 (3.5.5) 得到

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{T}_c &= -a_1\boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{T}_c - a_2\boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{T}_c - \cdots - a_n\boldsymbol{r}_n\boldsymbol{T}_c \\
&= -a_1\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} - a_2\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} - \cdots - a_n\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} \\
&= [-a_1, -a_2, \cdots, -a_n].
\end{aligned}
$$

将上式代入式 (3.5.6) 得证.

参考 3.3.2 节, 我们容易得到传递函数

$$
G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n}
$$

的 **控制器规范型实现**,

$$
\left\{
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u, \\
y &= [b_1, b_2, \cdots, b_n]\boldsymbol{x}.
\end{aligned}
\right.
$$

**控制器规范型的记忆方法**: 假设传递函数分子分母多项式按降次排列, 分母是首一多项式, 分子次数低于分母, 那么分母多项式的系数的相反数按顺序排在 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的第一行, $\boldsymbol{A}$ 的左下角是一个 $(n-1)$ 阶单位阵, 其余元为零, $\boldsymbol{b}$ 是一个单位向量 (第 1 个元为 1, 其余元为零的列向量), 分子多项式的系数作为行向量 $\boldsymbol{c}$. 控制器规范型的结构如图 3.5.1 所示.

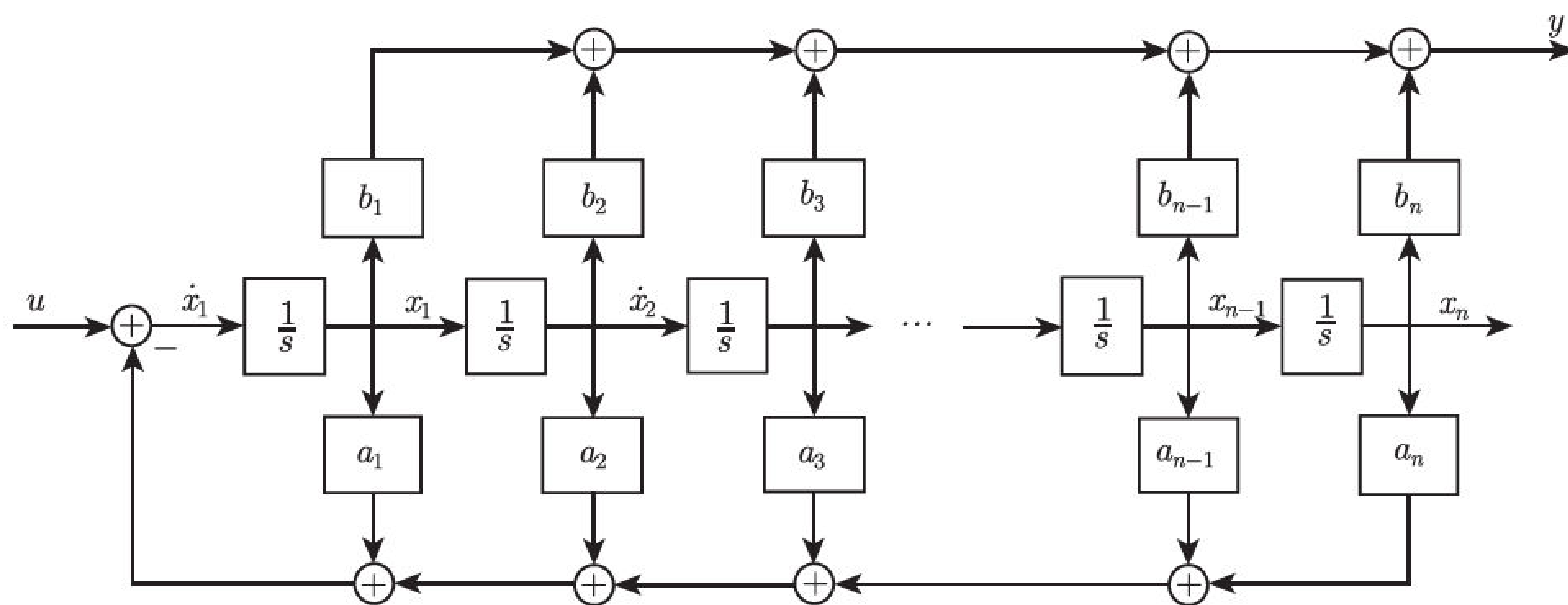



图 3.5.1 控制器规范型的结构框图

**例 3.5.1** 将下列传递函数化为控制器规范型实现,

$$G(s) = \frac{4s^2 + 5s + 6}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}.$$

**解** 传递函数的分母多项式阶次为 $n = 3$, 故对应的状态空间模型有 3 个状态变量. 该系统的控制器规范型实现为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y = [4,\ 5,\ 6] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

**例 3.5.2** 将下列传递函数化为控制器规范型实现,

$$G(s) = \frac{5s^3 + 14s^2 + 20s + 26}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}.$$

**解** 该传递函数分子与分母次数相同, 采用长除法, 把其变为

$$G(s) = \frac{4s^2 + 5s + 6}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4} + 5.$$

对应的控制器规范型实现为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y = [4,\ 5,\ 6]\boldsymbol{x} + 5u. \end{cases}$$

### 3.5.2 能控性规范型

**能控性规范型** (Controllability Canonical Form) 结构如下,

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_{co}(t) = \boldsymbol{A}_{co}\boldsymbol{x}_{co}(t) + \boldsymbol{b}_{co}u(t), \\ y(t) = \boldsymbol{c}_{co}\boldsymbol{x}_{co}(t) + du(t), \end{cases} \tag{3.5.8}$$

其中下标 co 是英文能控性 controllability 的前两个字母, 意思是能控性规范型,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{co} &:= \boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{co} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \boldsymbol{b}_{co} := \boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \\ \boldsymbol{c}_{co} &:= c\boldsymbol{T}_{co} =: [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n] \\ &= [\boldsymbol{cb}, \boldsymbol{cAb}, \boldsymbol{cA}^2\boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{cA}^{n-1}\boldsymbol{b}] \in \mathbb{R}^{1\times n}, \end{aligned}$$

变换矩阵为

$$\boldsymbol{T}_{co} := [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{Ab}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}] \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

**证明** 由于系统 $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, d]$ 完全能控, 故能控性矩阵 **满秩** (Full Rank), 即

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{Ab}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}] = n,$$

所以变换矩阵 $\boldsymbol{T}_{co} = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{Ab}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]$ 是 **可逆矩阵** (Invertible Matrix). 又

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{T}_{co} &= \boldsymbol{T}_{co}^{-1}[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{Ab}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}] \\ &= [\boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{Ab}, \boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}] = \boldsymbol{I}_n. \end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^n$ 为第 $i$ 个单位列向量 (即单位阵的第 $i$ 列), 则有

$$\begin{cases} \boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{b} = [1, 0, 0, 0, \cdots, 0]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{e}_1, \\ \boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{Ab} = [0, 1, 0, 0, \cdots, 0]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b} = [0, 0, 1, 0, \cdots, 0]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{e}_3, \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b} = [0, 0, 0, 0, \cdots, 1]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{e}_n. \end{cases} \tag{3.5.9}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_{co} &= \boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{b} = [1, 0, 0, \cdots, 0]^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{A}_{co} &= \boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{co} = \boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{Ab}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}] \\ &= [\boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{Ab}, \boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{b}] \\ &= [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \cdots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{b}]. \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

式 (3.5.7) 两边左乘 $\boldsymbol{T}_{co}^{-1}$, 右乘 $\boldsymbol{b}$, 并利用式 (3.5.9) 可得

$$\boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{b} = -a_1\boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b} - a_2\boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{b} - \cdots - a_n\boldsymbol{T}_{co}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$
\begin{aligned}
&= -a_1\boldsymbol{e}_n - a_2\boldsymbol{e}_{n-1} - \cdots - a_{n-1}\boldsymbol{e}_2 - a_n\boldsymbol{e}_1 \\
&= \begin{pmatrix} -a_n \\ -a_{n-1} \\ \vdots \\ -a_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

将上式代入式 (3.5.10) 得证.

能控性规范型和 (后面的) 能观测性规范型中参数 $\beta_i := \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{b}$ 称为 **马可夫参数** (Markov Parameter), 可对 $G(s)$ 采用 **长除法** (Long Division) 获得, 即把状态方程式 (3.5.1) 的传递函数化为

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} + d \\
&= s^{-1}\boldsymbol{c}\left(\boldsymbol{I}_n - \frac{\boldsymbol{A}}{s}\right)^{-1}\boldsymbol{b} + d \\
&= s^{-1}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}s^{-1} + \boldsymbol{A}^2s^{-2} + \boldsymbol{A}^3s^{-3} + \cdots)\boldsymbol{b} + d \\
&= d + \boldsymbol{c}\boldsymbol{b}s^{-1} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}s^{-2} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}s^{-3} + \cdots + \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{b}s^{-n} + \cdots \\
&= d + \beta_1 s^{-1} + \beta_2 s^{-2} + \beta_3 s^{-3} + \cdots
\end{aligned}
\tag{3.5.11}
$$

其中 $\beta_i := \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{i-1}\boldsymbol{b}$, $i = 1, 2, 3, \cdots$. 又设

$$
G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} + d.
$$

右边分式的分母分子同除以 $s^n$, 使用 **长除法** 可得

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{b_1 s^{-1} + b_2 s^{-2} + b_3 s^{-3} + \cdots + b_n s^{-n}}{1 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} + a_3 s^{-3} + \cdots + a_n s^{-n}} + d \\
&= d + b_1 s^{-1} + (b_2 - a_1 b_1)s^{-2} + (b_3 - a_2 b_1 - a_1 b_2 + a_1^2 b_1)s^{-3} + \cdots
\end{aligned}
\tag{3.5.12}
$$

比较式 (3.5.11) 与式 (3.5.12) 同次幂 $s^{-i}$ 的系数可得方程,

$$
\begin{cases}
\beta_1 = b_1, \\
\beta_2 = b_2 - a_1 b_1 = b_2 - a_1\beta_1, \\
\beta_3 = b_3 - a_2 b_1 - a_1(b_2 - a_1 b_1) = b_3 - a_2\beta_1 - a_1\beta_2, \\
\ \vdots \\
\beta_n == b_n - a_{n-1}\beta_1 - a_{n-2}\beta_2 - \cdots - a_1\beta_{n-1}.
\end{cases}
$$

求出 $b_i$ 得到

$$
\begin{cases}
b_1 = \beta_1, \\
b_2 = a_1\beta_1 + \beta_2, \\
b_3 = a_2\beta_1 + a_1\beta_2 + \beta_3, \\
\ \vdots \\
b_n = a_{n-1}\beta_1 + a_{n-2}\beta_2 + \cdots + a_1\beta_{n-1} + \beta_n.
\end{cases}
$$

即

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & 1 & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

求得

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & 1 & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

**传递函数的能控性规范型实现** 传递函数

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} + d$$

的 **能控性规范型实现** 为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n]\boldsymbol{x}(t) + du(t) \\ \quad = [b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n] \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & 1 & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{x}(t) + du(t). \end{cases}$$

**能控性规范型的记忆方法**: 假设传递函数分子分母多项式按降次排列, 分母是首一多项式, 分子次数低于分母, 那么分母多项式系数的相反数按倒序排在 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的最后一列, $\boldsymbol{A}$ 的左下角是一个 $(n-1)$ 阶单位阵, 其余元为零, $\boldsymbol{b}$ 是一个单位向量 (第 1 个元为 1, 其余元为零的列向量), 马可夫参数 $\beta_i$ 作为行向量 $\boldsymbol{c}$.

**注 3.5.1**　控制器规范型与能控性规范型的控制参数向量 $\boldsymbol{b}$ 都是一个单位列向量, 两个规范型的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵是斜对称的. 控制器规范型要简单, 其输出参数向量是传递函数分子多项式的系数构成的, 它可以从传递函数直接写出, 不像能控性规范型那样需要计算系统的马可夫参数.

### 3.5.3　观测器规范型

**观测器规范型** (Observer Canonical Form) 结构如下,

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_o(t) = \boldsymbol{A}_o \boldsymbol{x}_o(t) + \boldsymbol{b}_o u(t), \\ y(t) = \boldsymbol{c}_o \boldsymbol{x}_o(t) + du(t), \end{cases} \tag{3.5.13}$$

其中下标 o 是英文观测器 observer 的第一个字母, 意思是观测器规范型,

$$\boldsymbol{A}_o := \boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_o = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \boldsymbol{b}_o := \boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\boldsymbol{c}_o := \boldsymbol{c}\boldsymbol{T}_o = [1, 0, 0, \cdots, 0] \in \mathbb{R}^{1\times n},$$

变换矩阵为

$$\boldsymbol{T}_o := [\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{l}_n, \boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{l}_n, \cdots, \boldsymbol{l}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$\boldsymbol{l}_n$ 为 $\boldsymbol{T}_{ob}$ 的第 $n$ 列,

$$\boldsymbol{T}_{ob} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

**证明** 由于 $\boldsymbol{l}_n$ 为 $\boldsymbol{T}_{ob}$ 的第 $n$ 列, 即 $\boldsymbol{T}_{ob} = [*,\ \boldsymbol{l}_n]$, 故有

$$\boldsymbol{T}_{ob}^{-1}\boldsymbol{T}_{ob} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{n-1} \end{pmatrix} [*,\ \boldsymbol{l}_n] = \boldsymbol{I}_n.$$

上式第 $n$ 列为

$$\begin{cases} \boldsymbol{c}\boldsymbol{l}_n = 0, \\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{l}_n = 0, \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{l}_n = 0, \\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{l}_n = 1. \end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_o = \boldsymbol{c}\boldsymbol{T}_o &= \boldsymbol{c}[\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{l}_n, \boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{l}_n, \cdots, \boldsymbol{l}_n] \\ &= [\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{l}_n, \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{l}_n, \cdots, \boldsymbol{c}\boldsymbol{l}_n] \\ &= [1, 0, 0, \cdots, 0], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{T}_o &= \boldsymbol{T}_o^{-1}[\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{l}_n, \boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{l}_n, \cdots, \boldsymbol{l}_n] \\ &= [\boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{l}_n, \boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{l}_n, \cdots, \boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{l}_n] = \boldsymbol{I}_n, \end{aligned}$$

或

$$\begin{cases} \boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{l}_n = [1, 0, 0, 0, \cdots, 0]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{e}_1, \\ \boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{l}_n = [0, 1, 0, 0, \cdots, 0]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}^{n-3}\boldsymbol{l}_n = [0, 0, 1, 0, \cdots, 0]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{e}_3, \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{l}_n = [0, 0, 0, 0, \cdots, 1]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{e}_n. \end{cases} \tag{3.5.14}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_o &= \boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_o \\
&= \boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{l}_n, \boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{l}_n, \boldsymbol{A}^{n-3}\boldsymbol{l}_n, \cdots, \boldsymbol{l}_n] \\
&= [\boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{l}_n, \boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{l}_n, \boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{l}_n, \cdots, \boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{l}_n] \\
&= [\boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{l}_n, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_{n-1}].
\end{aligned} \tag{3.5.15}$$

式 (3.5.7) 两边左乘 $\boldsymbol{T}_o^{-1}$, 右乘 $\boldsymbol{l}_n$, 并利用式 (3.5.14) 得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{l}_n &= -a_1\boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{l}_n - a_2\boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{l}_n - \cdots - a_n\boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{l}_n \\
&= -a_1\boldsymbol{e}_1 - a_2\boldsymbol{e}_2 - \cdots - a_n\boldsymbol{e}_n \\
&= [-a_1, -a_2, \cdots, -a_n]^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

将上式代入式 (3.5.15) 得证.

**传递函数的观测器规范型实现** 传递函数

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} + d$$

的 **观测器规范型实现** 为

$$\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} u(t), \\
y(t) = [1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0]\boldsymbol{x}(t) + du(t).
\end{cases}$$

**观测器规范型的记忆方法**: 假设传递函数分子分母多项式按降次排列, 分母是首一多项式, 分子次数低于分母, 那么分母多项式的系数的相反数按顺序排在 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的第一列, $\boldsymbol{A}$ 的右上角是一个 $(n-1)$ 阶单位阵, 其余元为零, $\boldsymbol{c}$ 是一个单位行向量 (第 1 个元为 1, 其余元为零的行向量), 分子多项式的系数作为控制参数向量 $\boldsymbol{b}$.

**例 3.5.3** 将下列传递函数化为观测器规范型实现,

$$G(s) = \frac{4s^2 + 5s + 6}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}.$$

**解** 该系统对应的观测器规范型实现为

$$\begin{cases}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} u, \\
y = [1,\ 0,\ 0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.
\end{cases}$$

**例 3.5.4** 将下列传递函数化为观测器规范型实现,

$$G(s)=\frac{5s^3+14s^2+20s+26}{s^3+2s^2+3s+4}.$$

**解** 该传递函数分子与分母次数相同, 采用长除法, 把其变为

$$G(s)=\frac{4s^2+5s+6}{s^3+2s^2+3s+4}+5.$$

对应的观测器规范型实现为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-3&0&1\\-4&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}u,\\ y=[1,\ 0,\ 0]\boldsymbol{x}+5u.\end{cases}$$

### 3.5.4 能观测性规范型

**能观测性规范型** (Observability Canonical Form) 结构如下,

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_{ob}(t)=\boldsymbol{A}_{ob}\boldsymbol{x}_{ob}(t)+\boldsymbol{b}_{ob}u(t),\\ \ \ y(t)\ \ =\boldsymbol{c}_{ob}\boldsymbol{x}_{ob}(t)+du(t),\end{cases}\tag{3.5.16}$$

其中下标 ob 是英文能观测性 observability 的前两个字母, 意思是能观测性规范型,

$$\boldsymbol{A}_{ob}:=\boldsymbol{T}_{ob}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{ob}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_n&-a_{n-1}&-a_{n-2}&\cdots&-a_1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n},$$

$$\boldsymbol{b}_{ob}:=\boldsymbol{T}_{ob}^{-1}\boldsymbol{b}=:\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{cb}\\\boldsymbol{cAb}\\\boldsymbol{cA}^2\boldsymbol{b}\\\vdots\\\boldsymbol{cA}^{n-1}\boldsymbol{b}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n,$$

$$\boldsymbol{c}_{ob}:=\boldsymbol{c}\boldsymbol{T}_{ob}=[1,0,0,\cdots,0]\in\mathbb{R}^{1\times n},$$

变换矩阵为

$$\boldsymbol{T}_{ob}:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{cA}\\\vdots\\\boldsymbol{cA}^{n-1}\end{pmatrix}^{-1}\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

**证明**　由于系统 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},d]$ 完全能观测, 故能观测性矩阵满秩, 即

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{cA}\\ \vdots\\ \boldsymbol{cA}^{n-1}\end{pmatrix}=n,$$

所以变换矩阵 $\boldsymbol{T}_{ob}$ 是可逆的. 又

$$\boldsymbol{T}_{ob}^{-1}\boldsymbol{T}_{ob}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{cA}\\ \vdots\\ \boldsymbol{cA}^{n-1}\end{pmatrix}\boldsymbol{T}_{ob}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{cT}_{ob}\\ \boldsymbol{cAT}_{ob}\\ \vdots\\ \boldsymbol{cA}^{n-1}\boldsymbol{T}_{ob}\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}_n.$$

把上式展开可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{cT}_{ob}=[1,0,0,0,\cdots,0]=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{cAT}_{ob}=[0,1,0,0,\cdots,0]=\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{cA}^{n-1}\boldsymbol{T}_{ob}=[0,0,1,0,\cdots,0]=\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}},\\ \quad\vdots\\ \boldsymbol{cA}^{n-1}\boldsymbol{T}_{ob}=[0,0,0,0,\cdots,1]=\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}.\end{cases}\tag{3.5.17}$$

由此可得

$$\boldsymbol{c}_{ob}=\boldsymbol{cT}_{ob}=[1,0,0,\cdots,0],$$

$$\boldsymbol{A}_{ob}=\boldsymbol{T}_{ob}^{-1}\boldsymbol{AT}_{ob}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{cA}\\ \vdots\\ \boldsymbol{cA}^{n-2}\\ \boldsymbol{cA}^{n-1}\end{pmatrix}\boldsymbol{AT}_{ob}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{cAT}_{ob}\\ \boldsymbol{cA}^2\boldsymbol{T}_{ob}\\ \vdots\\ \boldsymbol{cA}^{n-1}\boldsymbol{T}_{ob}\\ \boldsymbol{cA}^{n}\boldsymbol{T}_{ob}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{cA}^{n}\boldsymbol{T}_{ob}\end{pmatrix}.\tag{3.5.18}$$

式 (3.5.7) 两边左乘 $\boldsymbol{c}$, 右乘 $\boldsymbol{T}_{ob}$, 并利用式 (3.5.17) 得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{cA}^n\boldsymbol{T}_{ob}&=-a_1\boldsymbol{cA}^{n-1}\boldsymbol{T}_{ob}-a_2\boldsymbol{cA}^{n-2}\boldsymbol{T}_{ob}-\cdots-a_n\boldsymbol{cT}_{ob}\\ &=[-a_n,-a_{n-1},\cdots,-a_1].\end{aligned}$$

将上式代入式 (3.5.18) 得证.

**传递函数的能观测性规范型实现** 传递函数

$$G(s)=\frac{b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n}+d$$

的 **能观测性规范型实现** 为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} u(t) \\ \quad\quad = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \quad\quad\quad + \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & 1 & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0]\boldsymbol{x}(t) + du(t). \end{cases}$$

**能观测性规范型的记忆方法**: 假设传递函数分子分母多项式按降次排列, 分母是首一多项式, 分子次数低于分母, 那么分母多项式系数的相反数按倒序排在 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的最后一行, $\boldsymbol{A}$ 的右上角是一个 $(n-1)$ 阶单位阵, 其余元为零, $\boldsymbol{c}$ 是一个单位向量 (第 1 个元为 1, 其余元为零的列向量), 马可夫参数 $\beta_i$ 作为列向量 $\boldsymbol{b}$.

**注 3.5.2** 观测器规范型与能观测性规范型的输出参数向量 $\boldsymbol{c}$ 都是一个单位行向量, 两个规范型的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵是斜对称的. 观测器规范型要简单, 其控制参数向量是传递函数分子多项式的系数构成的, 它可以从传递函数直接写出, 不像能观测性规范型那样需要计算系统的马可夫参数.

### 3.5.5 对偶性与规范型

#### 1. 线性系统的对偶原理

设两个线性系统的状态空间模型如下,

$$S_1: \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t), \end{cases} \tag{3.5.19}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ 为输入向量, $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ 为输出向量, $\boldsymbol{A}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B}(t) \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C}(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{D}(t) \in \mathbb{R}^{m\times r}$ 为系统矩阵;

$$S_2: \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \boldsymbol{A}_1(t)\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{B}_1(t)\boldsymbol{v}(t), \quad \boldsymbol{\xi}(t_0) = \boldsymbol{\xi}_0, \\ \boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{C}_1(t)\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{D}_1(t)\boldsymbol{v}(t), \end{cases} \tag{3.5.20}$$

$\boldsymbol{\xi}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $\boldsymbol{v}(t) \in \mathbb{R}^m$ 为输入向量, $\boldsymbol{z}(t) \in \mathbb{R}^r$ 为输出向量, $\boldsymbol{A}_1(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B}_1(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\boldsymbol{C}_1(t) \in \mathbb{R}^{r\times n}$ 和 $\boldsymbol{D}_1(t) \in \mathbb{R}^{r\times m}$ 为系统矩阵.

我们说系统 $S_1$ 与系统 $S_2$ 对偶, 系指满足下列关系:

$$\boldsymbol{A}_1(t) = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t), \quad \boldsymbol{B}_1(t) = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t), \quad \boldsymbol{C}_1(t) = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t), \quad \boldsymbol{D}_1(t) = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}(t).$$

系统 $S_1$ 与系统 $S_2$ 对偶, 有时也说成系统 $S_1$ 与系统 $S_2$ 是对偶的, 或系统 $S_1$ 是 $S_2$ 的对偶系统.

系统与其对偶系统是两个不同的系统, 它们有不同的输入输出关系. 系统 $S_1$ 与系统 $S_2$ 的输入维数是不同的, 输出维数也是不同的, 故对偶系统与原系统不是同一个系统. 尽管在状态方程中, 对偶系统有时也使用相同的输入输出和状态变量符号. 例如 $S_1$ 的对偶系统可以写作

$$S_2: \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{u}(t). \end{cases} \tag{3.5.21}$$

注: 这里的输入输出和状态变量与 $S_1$ 中是不同的. 对偶性对线性离散时间系统也有类似的结论, 不一一讨论.

**对偶性系统的性质:**

(1) 一个系统的对偶系统的对偶系统是它本身.

(2) 一个系统是能控的, 那么它的对偶系统是能观测的, 因为对偶系统能观测性矩阵等于原系统的能控性矩阵的转置.

(3) 一个系统是能观测的, 那么它的对偶系统是能控的, 因为对偶系统能控性矩阵等于原系统的能观测性矩阵的转置.

(4) 控制器规范型与观测器规范型对偶; 能控性规范型与能观测性规范型对偶.

**2. 规范型的对偶性**

读者可能已经注意到, 前面讨论的 4 种规范型系统参数矩阵存在下列关系:

$$\boldsymbol{A}_c = \boldsymbol{A}_o^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{b}_c = \boldsymbol{c}_o^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{c}_c = \boldsymbol{b}_o^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{A}_{co} = \boldsymbol{A}_{ob}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{b}_{co} = \boldsymbol{c}_{ob}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{c}_{co} = \boldsymbol{b}_{ob}^{\mathrm{T}}.$$

这揭示了规范型之间的对偶关系, 即**能控性规范型与能观测性规范型对偶**, **控制器规范型与观测器规范型对偶**. 下面以一个 3 阶系统为例加以说明.

**例 3.5.5** 设微分方程描述的系统为

$$y^{(3)}(t) + a_1 y^{(2)}(t) + a_2\dot{y}(t) + a_3 y(t) = b_1 u^{(2)}(t) + b_2\dot{u}(t) + b_3 u(t),$$

写出系统的传递函数和 4 种规范型.

**解** 对应的传递函数为

$$G(s) = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}.$$

其控制器规范型为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [b_1, b_2, b_3]\boldsymbol{x}(t). \end{cases}$$

由于

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{b_1 s^{-1} + b_2 s^{-2} + b_3 s^{-3}}{1 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} + a_3 s^{-3}} \\
&= b_1 s^{-1} + (b_2 - a_1 b_1) s^{-2} + [b_3 - a_2 b_1 - a_1(b_2 - a_1 b_1)] s^{-3} + \cdots \\
&=: \beta_1 s^{-1} + \beta_2 s^{-2} + \beta_3 s^{-3} + \cdots,
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{cases}
\beta_1 = b_1, \\
\beta_2 = b_2 - a_1 b_1 = b_2 - a_1 \beta_1, \\
\beta_3 = b_3 - a_2 b_1 - a_1(b_2 - a_1 b_1) = b_3 - a_2 \beta_1 - a_1 \beta_2
\end{cases}
$$

求出 $b_i$ 得到

$$
\begin{cases}
b_1 = \beta_1, \\
b_2 = a_1 \beta_1 + \beta_2, \\
b_3 = a_2 \beta_1 + a_1 \beta_2 + \beta_3.
\end{cases}
$$

即

$$
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.
$$

求得

$$
\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.
$$

对应的能控性规范型为

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\
y(t) = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] \boldsymbol{x}(t) \\
\qquad = [b_1, b_2, b_3] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{x}(t).
\end{cases}
$$

观测器规范型为

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} u(t), \\
y(t) = [1,\ 0,\ 0] \boldsymbol{x}(t)
\end{cases}
$$

能观测性规范型为

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} u(t) \\
\qquad = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} u(t), \\
y(t) = [1,\ 0,\ 0] \boldsymbol{x}(t).
\end{cases}
$$

关于状态空间规范型的结论.

(1) 控制器规范型、能控性规范型, 不管 $\boldsymbol{A}$ 矩阵中的自由元如何取值, 系统都是可控的, 即这两种规范型保证系统是可控的, 但不保证系统的能观测性.

(2) 类似地, 观测器规范型、能观测性规范型, 不管 $\boldsymbol{A}$ 矩阵中的自由元如何取值, 系统都是可观测的, 即这两种规范型保证系统是可观测的, 但不保证系统的能控性.

(3) 后面要讨论的对角标准形、约当标准形既不保证系统是可控的, 又不保证系统是可观测的.

**3. 单输入单输出系统**

线性时不变单输入单输出连续时间系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + du(t) \end{cases}$$

的对偶系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}v(t), \quad \boldsymbol{\xi}(t_0) = \boldsymbol{\xi}_0, \\ z(t) = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}(t) + dv(t). \end{cases}$$

**例 3.5.6** 写出下列单输入单输出系统的对偶系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [13,\ 14,\ 15]\boldsymbol{x}(t) + 16u(t). \end{cases}$$

**解** 该系统的对偶系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) + \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix} v(t), \\ z(t) = [10,\ 11,\ 12]\boldsymbol{\xi}(t) + 16v(t). \end{cases}$$

**4. 多输入多输出系统**

线性时不变多输入多输出连续时间系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$$

的对偶系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}(t), \quad \boldsymbol{\xi}(t_0) = \boldsymbol{\xi}_0, \\ \boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}(t). \end{cases}$$

**例 3.5.7** 写出下列 2 输入 3 输出系统的对偶系统

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t), \\
\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 \\ 22 & 23 & 24 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \\ 29 & 30 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t).
\end{cases}
$$

**解** 该系统的对偶系统为

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) + \begin{pmatrix} 16 & 19 & 22 \\ 17 & 20 & 23 \\ 18 & 21 & 24 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}(t), \\
\boldsymbol{z}(t) = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 14 \\ 11 & 13 & 15 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) + \begin{pmatrix} 25 & 27 & 29 \\ 26 & 28 & 30 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}(t).
\end{cases}
$$

**注 3.5.3** 从这个例子可以看出, 原系统有 2 个输入 3 个输出, 其对偶系统有 3 个输入 2 个输出, 因此对偶系统与原系统不是一个系统.

关于原系统与对偶系统的一些结论.

(1) 对偶系统的对偶系统是原系统.

(2) 如果原系统可控, 则对偶系统可观测 (不限定于规范型).

(3) 如果原系统可观测, 则对偶系统可控 (不限定于规范型).

## 3.6 状态空间标准形

状态空间规范型在控制理论中有特别重要的地位. 线性变换可以将状态空间模型中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化或约当化, 因此可以通过非奇异线性变换将状态空间模型化为对角标准形或约当标准形. 我们生活在一个真实的世界里, 状态空间模型的参数一般都是实数. 一个实矩阵的特征值可能是复数, 从而导致对角标准形或约当标准形中出现复数, 这是不希望的, 这也是我们不把标准形叫作规范型的原因. 4 种规范型是唯一的, 但是对角标准形和约当标准形是不唯一的, 鉴于其结构比较特殊, 本节简单加以讨论.

### 3.6.1 对角标准形实现

**1. 对角标准形**

考虑线性时不变 SISO 系统的状态空间模型:

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\
y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + du(t),
\end{cases}
\tag{3.6.1}
$$

其中 $u(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个对角矩阵, 那么系统 (3.6.1) 就称为 **对角标准形**. 对角标准形只依赖于矩阵 $\boldsymbol{A}$, 与 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 结构无关.

如果 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个可对角化矩阵 (即存在 $n$ 个独立的特征向量), 那么 $\boldsymbol{A}$ 能对角化, 系统可以通过相似变换化为对角标准形 (如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同, 那么 $\boldsymbol{A}$ 必可对角化). 线性时不变 SISO 系统 **对角标准形** (Diagonal Standard Form) 结构如下,

$$
\begin{cases}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} u, \\
y = [c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + du.
\end{cases}
$$

模型中对角元 $\lambda_i$ 是系统的特征值, 即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 对角化需要计算系统的特征值, 增加了计算复杂性. 实际系统中 $\boldsymbol{A}$ 一般是实矩阵, 实矩阵也可能包含复数特征值, 这也是我们不把对角标准形和约当标准形作为规范型的缘故.

**注 3.6.1**　对角标准形和下面要讨论的约当标准形, 既不保证系统能控, 又不保证系统能观测, 所以本书为了加以区别, 称为 **标准形** (Standard Form), 不称 **规范型** (Canonical Form).

下面的定理给出 **MIMO 系统对角标准形** 的结构, 以及一般状态空间模型化为对角标准形的方法 (假设 $\boldsymbol{A}$ 矩阵可对角化).

**定理 3.6.1　对角标准形变换** (Diagonal Standard Form Transformation)

考虑状态空间模型

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\
\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t),
\end{cases} \tag{3.6.2}
$$

其中 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^r$, $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{m\times r}$. 假设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 有 $n$ 个相异特征值 $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\cdots$, $\lambda_n$, 那么就可以通过相似变换化为对角标准形. 换句话说, 对于相似变换 $\bar{\boldsymbol{x}}(t) := \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, 如果取变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 等于 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量构成的矩阵, 那么状态空间模型

$$
\begin{cases}
\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) = \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(t), \quad \bar{\boldsymbol{x}}(t_0) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}_0, \\
\boldsymbol{y}(t) = \bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)
\end{cases} \tag{3.6.3}
$$

是对角标准形, 其中

$$
\bar{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n},
$$

$$
\bar{\boldsymbol{B}} := \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times r}, \quad \bar{\boldsymbol{C}} := \boldsymbol{C}\boldsymbol{T} \in \mathbb{C}^{m\times n}.
$$

**证明**　设 $\boldsymbol{p}_i \in \mathbb{R}^n$ 是对应于特征值 $s = \lambda_i$ 的非零特征向量. 根据特征向量的定义, 有

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i = \lambda_i\boldsymbol{p}_i, \ i = 1, 2, \cdots, n.
$$

写成矩阵形式为

$$
\boldsymbol{A}[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n] = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n]\text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n].
$$

取变换矩阵 $\boldsymbol{T} := [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n]$. 由上式可得

$$\boldsymbol{AT} = \boldsymbol{T}\mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n].$$

两边左乘 $\boldsymbol{T}^{-1}$ (因为特征向量构成的矩阵是非奇异的), 可知 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ 是对角阵, 故线性变换后的系统 (3.6.3) 是对角标准形.

**注 3.6.2** 从以上证明可知: 如果传递函数只有单极点, 那么可以化为对角标准形实现.

**注 3.6.3** 从以上证明可知: 对角标准形是不唯一的, 因为系统的特征向量是不唯一的. 事实上, 如果取 $\boldsymbol{T}_1 = \alpha\boldsymbol{T} = \alpha[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n]$, $\alpha \neq 0$, 则 $\bar{\boldsymbol{A}}_1 = \boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{AT}_1 = \bar{\boldsymbol{A}}$ 没有变, 但 $\bar{\boldsymbol{B}}_1 = \boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{B} = \dfrac{1}{\alpha}\bar{\boldsymbol{B}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{C}}_1 = \boldsymbol{CT}_1 = \alpha\bar{\boldsymbol{C}}$ 变化了.

**注 3.6.4** 如果 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 有相同特征值, 但存在 $n$ 个独立的特征向量, 则系统 (3.6.2) 也可以通过相似变换化为对角标准形.

对角化方法十分有用. 它可以简化一些运算, 下面是利用矩阵对角化变换的例子.

**例 3.6.1** 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 计算 $\boldsymbol{A}^{100}$.

**解** 计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 令

$$\det[s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}] = \begin{vmatrix} s+5 & 6 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + 5s + 6 = (s+2)(s+3) = 0,$$

所以 $s = \lambda_1 = -2$, $s = \lambda_2 = -3$. 两个特征值不相同, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 计算两个特征向量 $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$. 令 $\boldsymbol{Ap}_1 = \lambda_1\boldsymbol{p}_1$, 即

$$\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}.$$

分解为两个方程

$$-5p_{11} - 6p_{21} = -2p_{11}, \quad p_{11} = -2p_{21}.$$

只有一个独立方程, 故有无穷多解. 最简单取 $p_{21} = 1$, 有 $p_{11} = -2$, 故

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

再令 $\boldsymbol{Ap}_2 = \lambda_2\boldsymbol{p}_2$, 即

$$\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}.$$

分解为两个方程

$$-5p_{12} - 6p_{22} = -3p_{12}, \quad p_{12} = -3p_{22}.$$

取 $p_{22}=1$, 有 $p_{12}=-3$, 故 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}p_{12}\\p_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$. 构造变换矩阵

$$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2]=\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}.$$

因此有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Lambda}:=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}&=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&-6\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-2&-6\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&\\&-3\end{pmatrix},\\
\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{-1},\\
\boldsymbol{A}^2&=(\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{-1})^2=(\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{-1})(\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{-1})=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{T}^{-1},\\
\boldsymbol{A}^{100}&=(\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{-1})^{100}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}^{100}\boldsymbol{T}^{-1}\\
&=\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&\\&-3\end{pmatrix}^{100}\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^{100}&\\&(-3)^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-2^{101}&-3^{101}\\2^{100}&3^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-2^{101}+3^{100}&-3\times2^{101}+2\times3^{101}\\2^{100}-3^{100}&3\times2^{100}-2\times3^{100}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

注: 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 可以使用 MATLAB 命令 eig.

**例 3.6.2**　化下列线性系统状态方程为对角标准形,

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}-5&-6\\1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=[3,\ 4]\boldsymbol{x}(t)+5u(t).\end{cases}$$

**解**　上述例子已经把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化, 计算

$$\bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-5\end{pmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{c}\boldsymbol{T}=[3,\ 4]\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}=[-2,-5].$$

令 $\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$, 则有对角标准形,

$$\begin{cases}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}u(t)\\ \quad=\begin{pmatrix}-2&\\&-3\end{pmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\begin{pmatrix}7\\-5\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+5u(t)=[-2,\ -5]\bar{\boldsymbol{x}}(t)+5u(t).\end{cases}$$

**例 3.6.3** 下面是一些对角标准形例子.

(1) SISO 系统对角标准形:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}-1&&\\&-2&\\&&-3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=[8,\ 9,\ 1976]\boldsymbol{x}(t)+1.21u(t).\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}-1&&\\&-2+\mathrm{j}&\\&&-2-\mathrm{j}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=[6,\ 7,\ 1989]\boldsymbol{x}(t)+7.10u(t).\end{cases}$$

(2) 两输入两输出系统对角标准形:

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&&\\&-2&\\&&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&5\\6&7\\8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&12&13\\14&15&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}17&18\\19&20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix}.\end{cases}$$

**2. 传递函数的对角标准形实现 (并联实现)**

将传递函数 (阵) 化为状态空间模型称为 **实现** (Realization), 也就是用 4 个参数矩阵 [$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$] 实现传递函数 (阵). 并联实现就是把传递函数化为部分有理分式之和, 其框图是并联结构, 故称为 **并联实现**, 参见图 3.6.1. 当传递函数有 $n$ 个相异特征值时, 化为一次部分分式 (一些一次有理分式之和), 从而导出传递函数的对角标准形实现.

设系统的传递函数

$$G(s)=\frac{b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n}+d$$

有 $n$ 个不同极点 $s=\lambda_i,\ i=1,2,\cdots,n$, 那么 $G(s)$ 可以表示为

$$G(s)=\frac{b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots+b_n}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)}+d.$$

化为部分分式之和的形式,

$$G(s)=\frac{c_1}{s-\lambda_1}+\frac{c_2}{s-\lambda_2}+\cdots+\frac{c_n}{s-\lambda_n}+d,\quad c_i:=G(s)(s-\lambda_i)\Big|_{s=\lambda_i}.$$

这个传递函数为一些一次有理式之和 (参见图 3.6.1), 故其实现称为 **传递函数的并联实现**, 由下面推导可知, 拥有相异特征值的传递函数的并联实现是对角标准形.

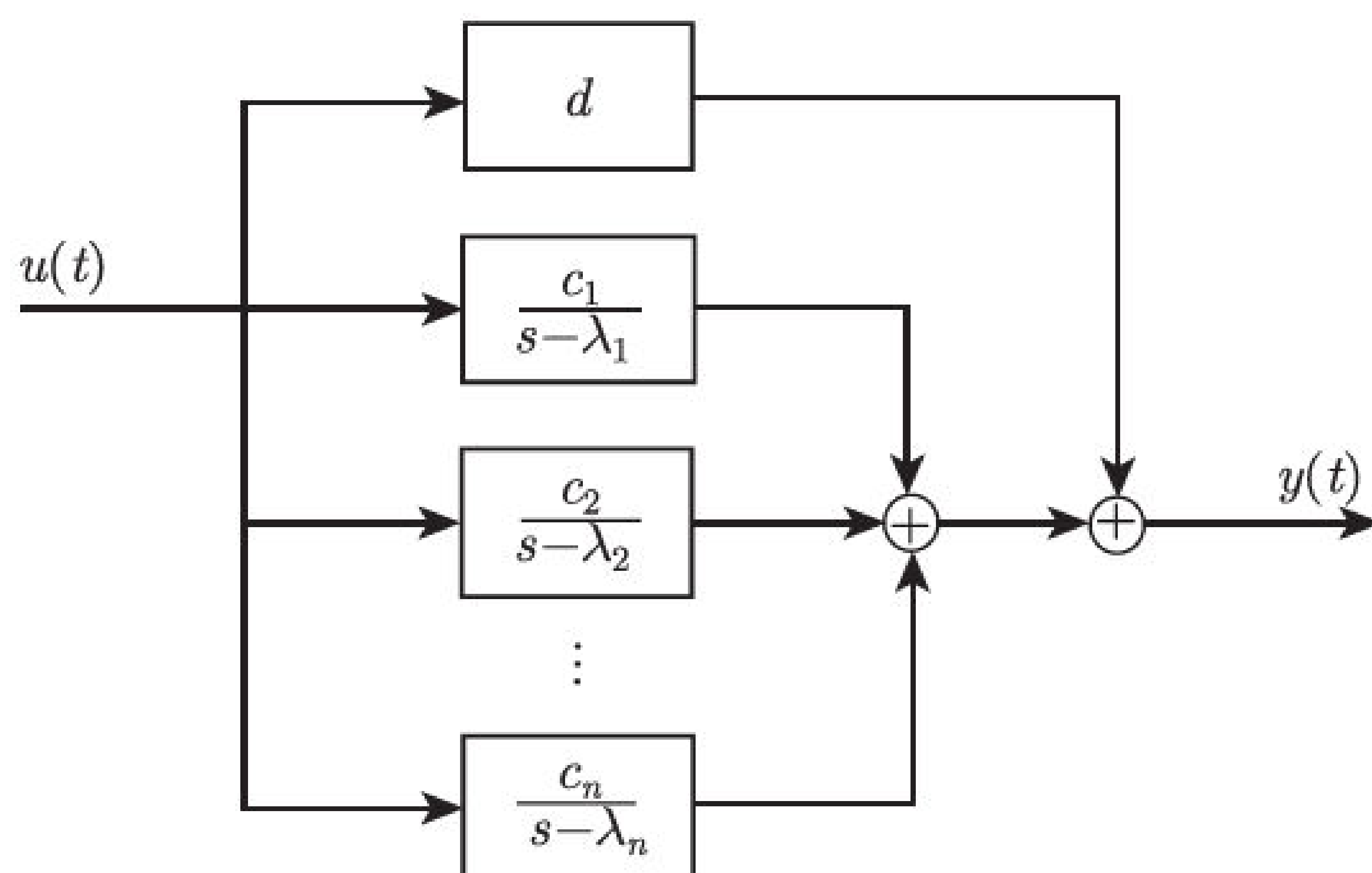



图 3.6.1　传递函数的并联框图

假设 $\lambda_i$ 互不相同, $c_i\neq 0$, 否则系统将会降阶, 传递函数存在零极点相消. 下面把这个传递函数化为对角标准形. 由输入输出关系 $y=G(s)u$ 可得

$$y=\frac{c_1u}{s-\lambda_1}+\frac{c_2u}{s-\lambda_2}+\cdots+\frac{c_nu}{s-\lambda_n}+du.$$

定义 $n$ 个状态变量 $x_i,\ i=1,2,\cdots,n$ 如下,

$$\begin{cases}x_1:=\dfrac{u}{s-\lambda_1},\\ x_2:=\dfrac{u}{s-\lambda_2},\\ \quad\vdots\\ x_n:=\dfrac{u}{s-\lambda_n}.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}(s-\lambda_1)x_1=u,\\(s-\lambda_2)x_2=u,\\ \quad\vdots\\(s-\lambda_n)x_n=u.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\dot{x}_1-\lambda_1x_1=u,\\ \dot{x}_2-\lambda_2x_2=u,\\ \quad\vdots\\ \dot{x}_n-\lambda_nx_n=u.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\dot{x}_1=\lambda_1x_1+u,\\ \dot{x}_2=\lambda_1x_2+u,\\ \quad\vdots\\ \dot{x}_n=\lambda_nx_n+u.\end{cases}$$

由此可以得到下列对角标准形,

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}u,\\ y=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n+du=[c_1,c_2,\cdots,c_n]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}+du.\end{cases}$$

从以上推导过程可知, 对于 $b_i\neq 0$, 如果另取状态变量为

$$x_1:=\frac{b_1u}{s-\lambda_1},\quad x_2:=\frac{b_2u}{s-\lambda_2},\quad x_3:=\frac{b_3u}{s-\lambda_3},\quad\cdots,\quad x_n=\frac{b_nu}{s-\lambda_n}.$$

那么可得对角标准形:

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\vdots\\\dot{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}u,\\ y=c_1/b_1x_1+c_2/b_2x_2+\cdots+c_n/b_nx_n+du=[c_1/b_1,c_2/b_2,\cdots,c_n/b_n]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+du.\end{cases}$$

**注 3.6.5** 由此说明, 一个传递函数的对角标准形是不唯一的. 但是, 一个传递函数的 4 种规范型: 控制器规范型、能控性规范型、观测器规范型、能观测性规范型都是唯一的, 且参数数目最少, SISO 系统有 $2n+1$ 个自由参数, 而对角标准形有 $3n+1$ 个自由参数, 下面的约当标准形的参数数目也大于 $2n+1$.

**注 3.6.6** 拥有相异极点的传递函数可以展开成一次有理分式的部分分式之和, 即一次有理分式之和, 其实现是并联实现, 即对角标准形实现.

### 3.6.2 约当标准形实现

**1. 约当标准形**

如果 $\boldsymbol{A}$ 矩阵有重特征值, 一般情况下不可对角化, 但可通过相似变换约当化, 化为约当标准形, 约当标准形对矩阵 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的结构也没有要求. SISO 系统 **约当标准形** (Jordan Standard Form) 结构如下,

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_1\\\dot{\boldsymbol{x}}_2\\\vdots\\\dot{\boldsymbol{x}}_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1&&&\\&\boldsymbol{J}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{J}_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\\\vdots\\\boldsymbol{x}_k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\\boldsymbol{b}_2\\\vdots\\\boldsymbol{b}_k\end{pmatrix}u,\\ y=[\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_k]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\\\vdots\\\boldsymbol{x}_k\end{pmatrix}+du,\end{cases}\tag{3.6.4}$$

其中 $\boldsymbol{x}_i\in\mathbb{R}^{n_i}$, $\boldsymbol{b}_i\in\mathbb{C}^{n_i}$, $\boldsymbol{c}_i\in\mathbb{C}^{1\times n_i}$, $d\in\mathbb{R}$, $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$, $n_i$ 是特征值 $s=\lambda_i$ 的重数, 如果 $s=\lambda_i$ 是单特征值, 那么 $\boldsymbol{J}_i=\lambda_i\in\mathbb{C}$; 一般情况下 $n_i\times n_i$ 约当块 $\boldsymbol{J}_i$ 的结构如下,

$$\boldsymbol{J}_i:=\begin{pmatrix}\lambda_i&1&&&\\&\lambda_i&1&&\\&&\lambda_i&&\\&&&\ddots&1\\&&&&\lambda_i\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n_i\times n_i},\ i=1,2,\cdots,k.\tag{3.6.5}$$

约当块是对角线上元都相等, 上次对角线上元均为 1 的矩阵.

对角标准形和约当标准形既不保证系统的能控性, 又不保证系统的能观测性, 这也是我们不把对角标准形和约当标准形作为规范型的缘故. SISO 系统约当标准形的参数也大于

$2n+1$. 一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不一定可对角化, 但一定能约当化. 因此, 一个系统总能通过相似变换化为约当标准形. 如果传递函数有重极点, 那么就可以化为约当标准形实现. 下面的定理给出 **MIMO 系统约当标准形** 的结构, 以及一般状态空间模型化为约当标准形的方法.

**定理 3.6.2 约当标准形变换** (Jordan Standard Form Transformation)

考虑状态空间模型

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t),\end{cases} \tag{3.6.6}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbb{R}^r$, $\boldsymbol{y}(t)\in\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{D}\in\mathbb{R}^{m\times r}$. 假设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的特征值 $s=\lambda_i$ 有 $n_i$ 重, $i=1,2,\cdots,k$, $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$. 如果不存在 $n$ 个独立的特征向量, 就不可能化为对角标准形. 在这种情况下, 通过相似变换化为约当标准形. 换句话说, 对于相似变换 $\bar{\boldsymbol{x}}(t):=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$, 可以通过构造变换矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得变换后的状态空间模型

$$\begin{cases}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(t), \quad \bar{\boldsymbol{x}}(t_0)=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}_0,\\ \boldsymbol{y}(t)=\bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\end{cases}$$

是约当标准形, 其中

$$\bar{\boldsymbol{A}}:=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_k\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n\times n},$$

$$\bar{\boldsymbol{B}}:=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times r}, \quad \bar{\boldsymbol{C}}:=\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\in\mathbb{C}^{m\times n},$$

$\boldsymbol{J}_i\in\mathbb{C}^{n_i\times n_i}$ 如式 (3.6.5) 所定义.

**证明** 设 $\boldsymbol{p}_{i1}\in\mathbb{R}^n$ 是对应于特征值 $s=\lambda_i$ 的特征向量, 根据特征向量的定义有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_{i1}=\lambda_i\boldsymbol{p}_{i1}, \tag{3.6.7}$$

$\boldsymbol{p}_{ij}$ 按下列方式计算,

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{p}_{ij}=\boldsymbol{p}_{i,j-1},\ j=2,3,\cdots,n_i,$$

或

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_{ij}=\boldsymbol{p}_{i,j-1}+\lambda_i\boldsymbol{p}_{ij},\ j=2,3,\cdots,n_i. \tag{3.6.8}$$

式 (3.6.7)、式 (3.6.8) 可以合并写为

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{p}_{i1},\boldsymbol{p}_{i2},\cdots,\boldsymbol{p}_{in_i}]=[\boldsymbol{p}_{i1},\boldsymbol{p}_{i2},\cdots,\boldsymbol{p}_{in_i}]\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_i\end{pmatrix},$$

或

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{p}_{i1},\boldsymbol{p}_{i2},\cdots,\boldsymbol{p}_{in_i}]=[\boldsymbol{p}_{i1},\boldsymbol{p}_{i2},\cdots,\boldsymbol{p}_{in_i}]\boldsymbol{J}_i.$$

令 $\boldsymbol{T}_i=[\boldsymbol{p}_{i1},\boldsymbol{p}_{i2},\cdots,\boldsymbol{p}_{in_i}]\in\mathbb{C}^{n\times n_i}$. 上式可简写为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_i=\boldsymbol{T}_i\boldsymbol{J}_i,\ i=1,2,\cdots,k.$$

联立写为

$$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_k]=[\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{J}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{J}_k],$$

或

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_k]=[\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_k]\mathrm{diag}[\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2,\cdots,\boldsymbol{J}_k].$$

构造变换矩阵

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}&=[\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_k]\\&=[\boldsymbol{p}_{11},\boldsymbol{p}_{12},\cdots,\boldsymbol{p}_{1n_1},\cdots,\boldsymbol{p}_{k1},\boldsymbol{p}_{k2},\cdots,\boldsymbol{p}_{kn_k}]\in\mathbb{C}^{n\times n}.\end{aligned}$$

则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\mathrm{diag}[\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2,\cdots,\boldsymbol{J}_k]$, 或 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\mathrm{diag}[\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2,\cdots,\boldsymbol{J}_k]$. 定理证毕.

**例 3.6.4** 将下列状态方程变换成约当标准形,

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&-5&4\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=[1,\ 2,\ 1]\boldsymbol{x}(t)+u(t).\end{cases}$$

**解** 计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 令

$$\det|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\-2&5&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0,$$

可以求得 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=2$. 计算对应的 3 个特征向量

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}p_{12}\\p_{22}\\p_{32}\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}p_{13}\\p_{23}\\p_{33}\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=\lambda_1\boldsymbol{p}_1$, 即

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&-5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{pmatrix}.$$

解方程得到一个特征向量

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

再求对应于 $\lambda_2=1$ 的另一广义特征向量 $\boldsymbol{p}_2$. 令 $\lambda_1\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=-\boldsymbol{p}_1$, 即

$$\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix}.$$

解之得

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

最后确定对应于 $\lambda_3=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}_3$. 令 $\lambda_3\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3$, 同理可得

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

于是构造变换矩阵

$$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此有

$$\boldsymbol{J}:=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{c}\boldsymbol{T}=[1,\ 2,\ 1] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = [4,\ 4,\ 9].$$

所以状态方程的约当标准形为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [4,\ 4,\ 9]\bar{\boldsymbol{x}}(t) + u(t). \end{cases}$$

**2. 传递函数的约当标准形实现 (并联实现)**

先考虑几个传递函数的约当标准形实现的例子, 然后推广到一般 $n$ 阶系统.

**例 3.6.5** 假设一个 3 阶系统有 3 个重极点, 其传递函数为

$$G(s)=\frac{b}{(s-\lambda)^3},$$

写出其状态空间模型.

**解** 这是一个 3 阶系统, 其输入输出有关系:

$$y=b\underbrace{\frac{1}{s-\lambda}\underbrace{\frac{1}{s-\lambda}\underbrace{\frac{u}{s-\lambda}}_{x_3}}_{x_2}}_{x_1},$$

定义状态变量:

$$x_3:=\frac{u}{s-\lambda},\quad x_2:=\frac{x_3}{s-\lambda},\quad x_1:=\frac{x_2}{s-\lambda},$$

或

$$\dot{x}_1=\lambda x_1+x_2,\quad \dot{x}_2=\lambda x_2+x_3,\quad \dot{x}_3=\lambda x_3+u.$$

则有 $y(t)=bx_1$. 对应的 **二对角标准形能控性实现** (约当标准形) 为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}u,$$

$$y=[b,\ 0,\ 0]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

**例 3.6.6** 假设一个 3 阶系统有 3 个重极点, 其传递函数为

$$G(s)=\frac{b_1s^2+b_2s+b_3}{(s-\lambda)^3},$$

推导其状态空间模型.

**解** 将这个传递函数展开成部分分式之和, 得到

$$G(s)=\frac{c_1}{(s-\lambda)^3}+\frac{c_2}{(s-\lambda)^2}+\frac{c_3}{s-\lambda},$$

其中

$$c_1:=G(s)(s-\lambda)^3\Big|_{s=\lambda}=b_1\lambda^2+b_2\lambda+b_3,$$

$$c_2:=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[G(s)(s-\lambda)^3]\Big|_{s=\lambda}=2b_1\lambda+b_2,$$

$$c_3:=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}[G(s)(s-\lambda)^3]\Big|_{s=\lambda}=2b_1.$$

输入输出关系为

$$y=\frac{c_1u}{(s-\lambda)^3}+\frac{c_2u}{(s-\lambda)^2}+\frac{c_3u}{s-\lambda},$$

定义状态变量:

$$x_3:=\frac{u}{s-\lambda},$$
$$x_2:=\frac{u}{(s-\lambda)^2}=\frac{x_3}{s-\lambda},$$
$$x_1:=\frac{u}{(s-\lambda)^3}=\frac{x_2}{s-\lambda}.$$

或

$$\dot{x}_1=\lambda x_1+x_2,\quad \dot{x}_2=\lambda x_2+x_3,\quad \dot{x}_3=\lambda x_3+u.$$

则 $y=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$. 对应的 **二对角标准形能控性实现** (约当标准形) 为

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}u,\\ y=[c_1,c_2,c_3]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.\end{cases}$$

这里的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵是一个约当块. 如果采用相反的顺序定义状态变量:

$$x_1:=\frac{u}{s-\lambda},$$
$$x_2:=\frac{u}{(s-\lambda)^2}=\frac{x_1}{s-\lambda},$$
$$x_3:=\frac{u}{(s-\lambda)^3}=\frac{x_2}{s-\lambda}.$$

或

$$\dot{x}_1=\lambda x_1+u,\quad \dot{x}_2=\lambda x_2+x_1,\quad \dot{x}_3=\lambda x_3+x_2.$$

则 $y(t)=c_1x_3+c_2x_2+c_3x_1$. 我们也得到一个 **二对角标准形能控性实现**:

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & 1 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}u,\\ y=[c_3,c_2,c_1]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.\end{cases}$$

这里的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵是一个约当块的转置, 也是一个约当块, 不过现在习惯采用上次对角元为 1 的约当块. 就像我们所说的特征向量, 一般是指 **右特征向量**, 其实还有 **左特征向量**.

**例 3.6.7** 把下列 6 阶系统化为约当标准形,

$$G(s)=\frac{c_1}{(s-\lambda_1)^3}+\frac{c_2}{(s-\lambda_1)^2}+\frac{c_3}{s-\lambda_1}+\frac{c_4}{s-\lambda_4}+\frac{c_5}{s-\lambda_5}+\frac{c_6}{s-\lambda_6},$$

其中 $c_i\neq 0$, $i=1$、3、4、5、6, 否则不是 6 阶系统.

**解** 由输入输出关系 $y=G(s)u$ 可得

$$y(t)=\frac{c_1u}{(s-\lambda_1)^3}+\frac{c_2u}{(s-\lambda_1)^2}+\frac{c_3u}{s-\lambda_1}+\frac{c_4u}{s-\lambda_4}+\frac{c_5u}{s-\lambda_5}+\frac{c_6u}{s-\lambda_6}.$$

这里分母按降次写, 是为了使状态空间模型 $\boldsymbol{A}$ 矩阵出现重特征值的约当块. 定义 6 个状态变量 $x_i$, $i=1$、2、3、4、5、6 如下,

$$\begin{cases}x_1:=\dfrac{u}{(s-\lambda_1)^3},\\ x_2:=\dfrac{u}{(s-\lambda_1)^2},\\ x_3:=\dfrac{u}{s-\lambda_1},\\ x_4:=\dfrac{u}{s-\lambda_4},\\ x_5:=\dfrac{u}{s-\lambda_5},\\ x_6:=\dfrac{u}{s-\lambda_6}.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{x_2}{s-\lambda_1},\\ x_2=\dfrac{x_3}{s-\lambda_1},\\ x_3=\dfrac{u}{s-\lambda_1},\\ x_4=\dfrac{u}{s-\lambda_4},\\ x_5=\dfrac{u}{s-\lambda_5},\\ x_6=\dfrac{u}{s-\lambda_6}.\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}(s-\lambda_1)x_1=x_2,\\(s-\lambda_1)x_2=x_3,\\(s-\lambda_1)x_3=u,\\(s-\lambda_4)x_4=u,\\(s-\lambda_5)x_5=u,\\(s-\lambda_6)x_6=u.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\dot{x}_1-\lambda_1x_1=x_2,\\\dot{x}_2-\lambda_1x_2=x_3,\\\dot{x}_3-\lambda_1x_3=u,\\\dot{x}_4-\lambda_4x_4=u,\\\dot{x}_5-\lambda_5x_5=u,\\\dot{x}_6-\lambda_6x_6=u.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\dot{x}_1=\lambda_1x_1+x_2,\\\dot{x}_2=\lambda_1x_2+x_3,\\\dot{x}_3=\lambda_1x_3+u,\\\dot{x}_4=\lambda_4x_4+u,\\\dot{x}_5=\lambda_5x_5+u,\\\dot{x}_6=\lambda_6x_6+u.\end{cases}$$

把它写成矩阵形式,

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\\\dot{x}_5\\\dot{x}_6\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}\lambda_1&1&0&0&0&0\\0&\lambda_1&1&0&0&0\\0&0&\lambda_1&0&0&0\\\hline 0&0&0&\lambda_4&0&0\\0&0&0&0&\lambda_5&0\\0&0&0&0&0&\lambda_6\end{array}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}u.$$

输出方程为

$$y=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4+c_5x_5+c_6x_6=[c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{pmatrix}.$$

**3. 一般 $n$ 阶系统传递函数的约当标准形实现**

传递函数当然可以化为约当标准形. 具体方法如下. 把传递函数

$$G(s)=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n}.$$

的分母表示为简单多项式的乘积, 则可以写为下列形式,

$$G(s)=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots+b_n}{(s-\lambda_1)^{n_1}(s-\lambda_2)^{n_2}\cdots(s-\lambda_k)^{n_k}},\quad n_1+n_2+\cdots+n_k=n.$$

化为部分分式之和的形式,

$$G(s)=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_{i1}}{(s-\lambda_i)^{n_i}}+\frac{c_{i2}}{(s-\lambda_i)^{n_i-1}}+\cdots+\frac{c_{in_i}}{s-\lambda_i}+b_0.$$

对应的约当标准形为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_{11}\\ \dot{x}_{12}\\ \dot{x}_{13}\\ \vdots\\ \dot{x}_{1n_1}\\ \hline \vdots\\ \hline \dot{x}_{k1}\\ \dot{x}_{k2}\\ \dot{x}_{k3}\\ \vdots\\ \dot{x}_{kn_k}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c|c}\overbrace{\left.\begin{matrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_1\end{matrix}\right\}n_1}^{n_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & \overbrace{\left.\begin{matrix}\lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_k\end{matrix}\right\}n_k}^{n_k}\end{array}\right)\begin{pmatrix}x_{11}\\ x_{12}\\ x_{13}\\ \vdots\\ x_{1n_1}\\ \hline \vdots\\ \hline x_{k1}\\ x_{k2}\\ x_{k3}\\ \vdots\\ x_{kn_k}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ \hline \vdots\\ \hline 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}u,$$

$$y=[c_{11},c_{12},c_{13},\cdots,c_{1n_1}|,\cdots|,c_{k1},c_{k2},c_{k3},\cdots,c_{kn_k}]\begin{pmatrix}x_{11}\\ x_{12}\\ x_{13}\\ \vdots\\ x_{1n_1}\\ \hline \vdots\\ \hline x_{k1}\\ x_{k2}\\ x_{k3}\\ \vdots\\ x_{kn_k}\end{pmatrix}+b_0u.$$

关于规范型、标准形的结论.

(1) 一个传递函数的 4 种规范型: 控制器规范型、能控性规范型、观测器规范型、能观测性规范型都是唯一的, 且参数数目最少, 都是 $2n+1$ 个自由参数 (对于 SISO 系统而言).

(2) 一个系统不一定能化为对角标准形. 当传递函数只有单极点, 或状态空间模型 $\boldsymbol{A}$ 矩阵可对角化时, 那么传递函数可用对角标准形 **实现** (Realization) (把传递函数变为状态空间模型的过程称为实现), 或可以通过相似变换把状态空间模型化为对角标准形. 对角标准形不是唯一的, 对角标准形有 $3n+1$ 个自由参数 (对于 SISO 系统而言).

(3) 一个系统总能化为约当标准形. 如果一个传递函数有重极点, 就可用约当标准形 **实现**, 状态空间模型可以通过相似变换化为约当标准形. 约当标准形也不是唯一的, 约当标准形的参数一般也大于 $2n+1$ 个 (对于 SISO 系统而言).

(4) 对角标准形和约当标准形既不保证系统的能控性, 又不保证系统的能观测性.

(5) 我们生活在一个真实世界, $\boldsymbol{A}$ 一般是实矩阵, 但其特征值可能是复数, 导致对角标准形和约当标准形中出现复数. 这是我们不采用对角标准形和约当标准形为规范型的原因.

### 3.6.3 传递函数的串联实现

串联实现就是把传递函数化为部分有理分式之积, 其框图是串联结构, 故称为 **串联实现**, 参见图 3.6.2. 为避免实现中出现复数, 本小节讨论的串联实现假设系统没有复数极点 (尽管该方法也适合有复数极点情形), 下一小节讨论有共轭复数极点的串联实现, 即三对角实现.

**1. 二阶系统**

考虑一个二阶系统

$$G(s)=\frac{b_2}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}.$$

这个系统有输入输出关系

$$y(t)=G(s)u(t)=\frac{b_2u(t)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}.$$

定义状态变量:

$$x_2(t):=\frac{u(t)}{s-\lambda_2},\quad x_1(t):=\frac{x_2(t)}{s-\lambda_1}.$$

或

$$\dot{x}_1(t)=\lambda_1x_1(t)+x_2(t),\quad \dot{x}_2(t)=\lambda_2x_2(t)+u(t).$$

则 $y(t)=b_2x_1(t)$. 对应的状态空间模型 (二对角实现) 为

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)\quad=[b_2,\ 0]\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}.\end{cases}$$

**2. 三阶系统**

考虑下列三阶系统

$$G(s)=\frac{b_3}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)}.$$

这个系统有输入输出关系

$$y(t) = b_3 \times \underbrace{\frac{1}{s-\lambda_1} \times \underbrace{\frac{1}{s-\lambda_2} \times \underbrace{\frac{u}{s-\lambda_3}}_{x_3}}_{x_2}}_{x_1},$$

定义状态变量:

$$x_3 := \frac{u}{s-\lambda_3}, \quad x_2 := \frac{x_3}{s-\lambda_2}, \quad x_1 := \frac{x_2}{s-\lambda_1}.$$

或

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + x_3, \quad \dot{x}_3 = \lambda_3 x_3 + u.$$

则 $y(t) = b_3 x_1$. 对应的状态空间模型 (二对角实现) 为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y(t) \quad = [b_3,\ 0,\ 0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

本书作者把这个状态空间模型称为 **二对角标准形**. 其特征是对角线上元为系统的特征值, 上次对角上元均为 1. 很类似于约当标准形, 但这里不要求特征值相同.

假设一个 $3 \times 3$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个相同的特征值 $\lambda$, 如果存在 3 个线性无关的特征向量, 就存在变换矩阵 $\boldsymbol{T}_1$ 将 $\boldsymbol{A}$ 对角化, 即

$$\boldsymbol{T}_1^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{T}_1 = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix};$$

如果存在两个线性无关的特征向量, 就存在变换矩阵 $\boldsymbol{T}_2$ 将 $\boldsymbol{A}$ 化为

$$\boldsymbol{T}_2^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{T}_2 = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix};$$

如果只存在一个线性无关的特征向量, 就存在变换矩阵 $\boldsymbol{T}_3$ 将 $\boldsymbol{A}$ 化为约当形:

$$\boldsymbol{T}_3^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{T}_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}.$$

后两种情况, 变换后的矩阵都是约当块. 这也说明约当标准形不唯一.

基于上述二阶和三阶无零点系统的状态空间模型实现, 本书作者提出二对角标准形. 下面讨论一般 $n$ 阶无零点系统的二对角标准形.

**3. $n$ 阶无零点系统**

假设 $n$ 阶系统的传递函数为

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \\
&= \frac{b_n}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)}.
\end{aligned} \tag{3.6.9}
$$

这个传递函数的串联结构如图 3.6.2 所示.

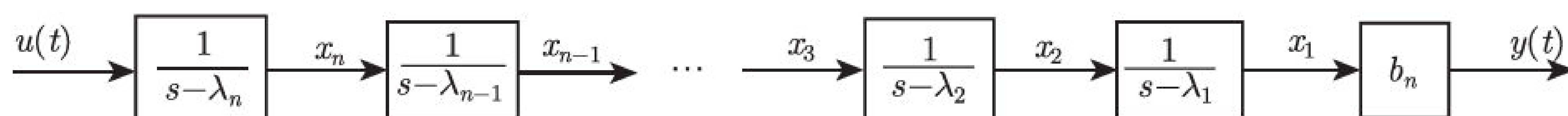



图 3.6.2 传递函数的串联框图 (无零点情形)

这个系统有输入输出关系

$$
y = b_n \times \underbrace{\frac{1}{s-\lambda_1}\cdots\underbrace{\frac{1}{s-\lambda_{n-1}}\underbrace{\frac{u}{s-\lambda_n}}_{x_n}}_{x_{n-1}}}_{x_1},
$$

定义状态变量:

$$
x_n := \frac{u}{s-\lambda_n}, \quad x_{n-1} := \frac{x_n}{s-\lambda_{n-1}}, \quad \cdots, \quad x_1 := \frac{x_2}{s-\lambda_1}.
$$

或

$$
\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + x_3, \quad \cdots, \quad \dot{x}_{n-1} = \lambda_{n-1}x_{n-1} + x_n, \quad \dot{x}_n = \lambda_n x_n + u.
$$

则输出方程为 $y(t) = b_n x_1$. 对应的 **二对角标准形能控性实现** 为

$$
\begin{cases}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\
y = [b_n, 0, \cdots, 0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.
\end{cases}
$$

可以断定, 不管系统的特征值是否相同, 这个实现总是能控的. 这个串联实现的结构如图 3.6.3 所示.

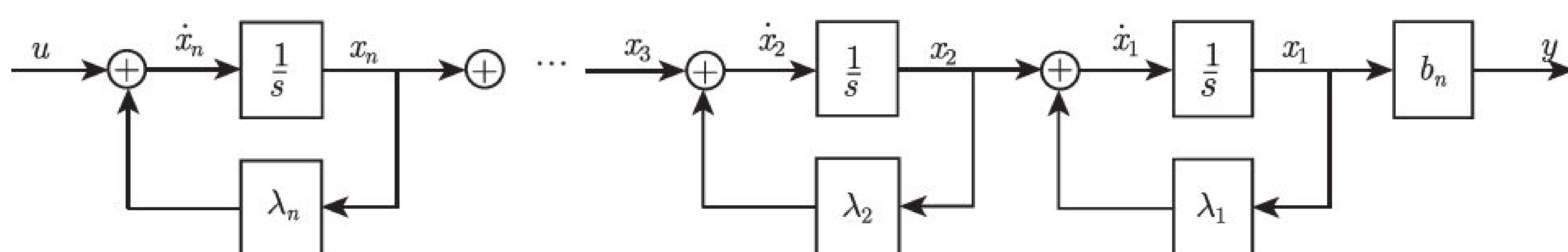



图 3.6.3 串联实现的结构图 (无零点情形)

**注 3.6.7**　综上所述, 一个无零点系统传递函数能够采用二对角标准形实现, 不管系统是否存在相同特征值.

**4. 一般 $n$ 阶系统**

假设 $n$ 阶系统的传递函数为

$$\begin{aligned}G(s)&=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}\cdots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\\&=\frac{b_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_m)(s-\lambda_{m+1})\cdots(s-\lambda_n)},\quad m\leqslant n,\ b_0\neq 0.\end{aligned}$$

因为

$$\frac{s-z_i}{s-\lambda_i}=1+\frac{\lambda_i-z_i}{s-\lambda_i}=1+\frac{\alpha_i}{s-\lambda_i},\quad \alpha_i:=\lambda_i-z_i\neq 0.$$

$$\begin{aligned}y&=\frac{b_0u(s-z_1)}{s-\lambda_1}\frac{s-z_2}{s-\lambda_2}\cdots\frac{s-z_m}{s-\lambda_m}\frac{1}{s-\lambda_{m+1}}\cdots\frac{1}{s-\lambda_n}\\&=b_0\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{u\left(1+\frac{\alpha_1}{s-\lambda_1}\right)}_{\xi_1}\left(1+\frac{\alpha_2}{s-\lambda_2}\right)}_{\xi_2}\cdots\left(1+\frac{\alpha_m}{s-\lambda_m}\right)}_{\xi_m}\frac{1}{s-\lambda_{m+1}}}_{x_{m+1}}\cdots\frac{1}{s-\lambda_n}}_{x_n}.\end{aligned}$$

定义中间变量

$$\xi_1:=\left(1+\frac{\alpha_1}{s-\lambda_1}\right)u,\quad \xi_2:=\left(1+\frac{\alpha_2}{s-\lambda_2}\right)\xi_1,\quad\cdots,\quad \xi_m:=\left(1+\frac{\alpha_m}{s-\lambda_m}\right)\xi_{m-1},$$

定义状态变量

$$\begin{aligned}&x_1:=\frac{\alpha_1}{s-\lambda_1}u,\quad x_2:=\frac{\alpha_2}{s-\lambda_2}\xi_1,\quad\cdots,\quad x_m:=\frac{\alpha_m}{s-\lambda_m}\xi_{m-1},\\&x_{m+1}:=\frac{1}{s-\lambda_{m+1}}\xi_m,\quad x_{m+2}:=\frac{1}{s-\lambda_{m+2}}x_{m+1},\quad\cdots,\quad x_n:=\frac{1}{s-\lambda_n}x_{n-1}.\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}&\xi_1=x_1+u,\\&\xi_2=\xi_1+x_2=x_1+x_2+u,\\&\xi_3=\xi_2+x_3=x_1+x_2+x_3+u,\\&\quad\vdots\\&\xi_m=\xi_{m-1}+x_m=x_1+x_2+\cdots+x_m+u,\\&\dot{x}_1=\lambda_1x_1+\alpha_1u,\\&\dot{x}_2=\lambda_2x_2+\alpha_2\xi_1=\alpha_2x_1+\lambda_2x_2+\alpha_2u,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_3 &= \lambda_3 x_3 + \alpha_3 \xi_2 = \alpha_3 x_1 + \alpha_3 x_2 + \lambda_3 x_3 + \alpha_3 u, \\
&\ \vdots \\
\dot{x}_m &= \lambda_m x_m + \alpha_m \xi_{m-1} = \alpha_m x_1 + \alpha_m x_2 + \cdots + \alpha_m x_{m-1} + \lambda_m x_m + \alpha_m u, \\
\dot{x}_{m+1} &= \lambda_{m+1} x_{m+1} + \xi_m = x_1 + x_2 + \cdots + x_m + \lambda_{m+1} + u, \\
\dot{x}_{m+2} &= \lambda_{m+2} x_{m+2} + x_{m+1}, \\
&\ \vdots \\
\dot{x}_n &= \lambda_n x_n + x_{n-1}.
\end{aligned}
$$

对应的**串联实现**为

$$
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \\ \hline \dot{x}_{m+1} \\ \dot{x}_{m+2} \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}
=
\left(\begin{array}{ccccc|cccc}
\lambda_1 & & & & & & & & \\
\alpha_2 & \lambda_2 & & & & & & & \\
\alpha_3 & \alpha_3 & \lambda_3 & & & & & & \\
\vdots & & & \ddots & & & & & \\
\alpha_m & \alpha_m & \cdots & \alpha_m & \lambda_m & & & & \\
\hline
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \lambda_{m+1} & & & \\
 & & & & & 1 & \lambda_{m+2} & & \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & & 1 & \lambda_n
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \\ \hline x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \hline 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u,
$$

$$
y(t) = [0, 0, \cdots, 0, b_0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.
$$

可以判断, 不管系统的特征值是否相同, 这个实现总是能控的.

### 3.6.4 三对角标准形

实系统的复特征值以共轭复数形式出现, 为避免在对角标准形和约当标准形中出现复数, 可采用三对角形实现. SISO 系统 **三对角标准形** (Tridiagonal Standard Form) 结构如下,

$$
\begin{cases}
\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{x}}_m \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 & & & \\ & \boldsymbol{R}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{R}_m \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_m \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} u, \\
y = [\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_n] \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_m \end{pmatrix} + du,
\end{cases}
\tag{3.6.10}
$$

对于实特征值 $s = \sigma_i$ 时, $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}$, 矩阵 $\boldsymbol{R}_i$, $\boldsymbol{b}_i$ 和 $\boldsymbol{c}_i$ 退化为标量 $R_i = \sigma_i \in \mathbb{R}$, $b_i = 1$ 和 $c_i \in \mathbb{R}$; 对于共轭特征值 $s = \sigma_i \pm \mathrm{j}\omega_i$ 时, $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^2$, 矩阵 $\boldsymbol{R}_i$、$\boldsymbol{b}_i$ 和 $\boldsymbol{c}_i$ 有结构

$$\boldsymbol{R}_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & \omega_i \\ -\omega_i & \sigma_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \boldsymbol{b}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^{1\times 2}.$$

与对角标准形和约当标准形不同, 实系统的三对角标准形的参数是实数.

如何将一个存在共轭复特征值的状态空间模型化为三对角标准形, 给出构造变换矩阵的方法是一个 **开放问题**, 值得读者研究. 我们将其总结为如下定理.

**定理 3.6.3　三对角标准形变换** (Tridiagonal Standard Form Transformation)

考虑 MIMO 状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t), \end{cases} \tag{3.6.11}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^r$, $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{m\times r}$. 假设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的实特征值 $s = \lambda_i$ 有 $n_i$ 重, $i = 1, 2, \cdots, p$, 共轭特征值 $s = \sigma_i \pm \mathrm{j}\omega_i$ 各不相同, $i = p+1, p+2, \cdots, p+q$, $q := (n - n_1 - n_2 - \cdots - n_p)/2$, 为了避免对角标准形和约当标准形中出现复数, 可以通过构造变换矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得相似变换 $\bar{\boldsymbol{x}}(t) := \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 将状态空间模型 (3.6.11) 变换为 **三对角标准形**:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) = \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(t), \quad \bar{\boldsymbol{x}}(t_0) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t), \end{cases}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J} & \\ & \boldsymbol{S} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$\bar{\boldsymbol{B}} := \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}, \quad \bar{\boldsymbol{C}} := \boldsymbol{C}\boldsymbol{T} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

$$\boldsymbol{J} := \mathrm{diag}[\boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{J}_2, \cdots, \boldsymbol{J}_p] \in \mathbb{R}^{n_1+n_2+\cdots+n_p},$$

$$\boldsymbol{S} := \mathrm{diag}[\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \cdots, \boldsymbol{R}_q] \in \mathbb{R}^{(2q)\times(2q)},$$

$$\boldsymbol{R}_i := \begin{pmatrix} \sigma_i & \omega_i \\ -\omega_i & \sigma_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

$\boldsymbol{J}_i \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}$ 如式 (3.6.5) 所定义.

这个定理可以推广到共轭特征值 $s = \sigma_i \pm \mathrm{j}\omega_i$ 有 $l_i$ 重的情况, $n_1 + n_2 + \cdots + n_p + 2(l_1 + l_2 + \cdots + l_q) = n$. 在这种情况下,

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J} & \\ & \boldsymbol{S} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$\boldsymbol{S} = \mathrm{diag}[\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \cdots, \boldsymbol{S}_q] \in \mathbb{R}^{(2l_1+2l_2+\cdots+2l_q)\times(2l_1+2l_2+\cdots+2l_q)},$$

$$\boldsymbol{S}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_i & \boldsymbol{R} & & & \\ & \boldsymbol{R}_i & \boldsymbol{R} & & \\ & & \boldsymbol{R}_i & \ddots & \\ & & & \ddots & \boldsymbol{R} \\ & & & & \boldsymbol{R}_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2l_i)\times(2l_i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, q,$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}.$$

这里, 我们称 $\boldsymbol{S}_i$ 为三角块, 类似于约当块.

### 3.6.5 传递函数的三对角标准形实现 (串联实现)

我们都是在实数域或实数空间上讨论控制系统的有关特性, 也就是说所考虑传递函数的分子分母多项式的系数都是实数. 如果一个传递函数有复数极点, 那么其对角标准形或约当标准形实现中有复数, 这是不希望的. 这也是对角标准形和约当标准形的欠缺之处. 三对角标准形可以避免状态空间实现存在复数的问题. 先考虑下列二阶复数极点传递函数 (注: 实系数传递函数的复数极点都是以共轭形式存在), 然后再推广到一般情形.

**1. 二阶系统复数极点传递函数的三对角标准形实现**

实系数传递函数的复数极点都是以共轭形式存在. 设二阶系统复数极点传递函数为

$$G(s)=\frac{b_1s+b_2}{(s-\sigma)^2+\omega^2},\quad \sigma\in\mathbb{R},\ \omega>0,\ b_1\in\mathbb{R},\ b_2\in\mathbb{R}. \tag{3.6.12}$$

其控制器规范型为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}2\sigma & -(\sigma^2+\omega^2)\\ 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}u,\\ y=[b_1,\ b_2]\boldsymbol{x}.\end{cases}$$

另两种实现为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\sigma & \omega^2\\ -1 & \sigma\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u,\\ y=\left(\dfrac{b_1\sigma+b_2}{\omega^2},\ b_1\right)\boldsymbol{x}\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\sigma & 100\omega^2\\ -0.01 & \sigma\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u,\\ y=\left(\dfrac{b_1\sigma+b_2}{100\omega^2},\ b_1\right)\boldsymbol{x}.\end{cases}$$

一种参数平衡 **三对角标准形** 实现为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u,\\ y=\left(\dfrac{b_1\sigma+b_2}{\omega},\ b_1\right)\boldsymbol{x}.\end{cases} \tag{3.6.13}$$

因为这种平衡实现状态空间模型的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵参数大小比较均衡, 容易实现, 我们把它作为复极点传递函数的三对角标准形. 传递函数的平衡实现有利于减小实现状态反馈的代价.

不难得到传递函数

$$G(s)=\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+\omega^2},\quad \sigma\in\mathbb{R},\ \omega>0 \tag{3.6.14}$$

的三对角标准形实现为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u,\\ y=(0,\ 1)\,\boldsymbol{x}.\end{cases} \tag{3.6.15}$$

传递函数

$$G(s)=\frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2},\quad \sigma\in\mathbb{R},\ \omega>0 \tag{3.6.16}$$

的三对角标准形实现为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u,\\ y=[1,\ 0]\,\boldsymbol{x}.\end{cases} \tag{3.6.17}$$

**例 3.6.8** 设系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{9s^2+27s+58}{s^3+5s^2+17s+13}.$$

**解** 这个例子可以使用 **MATLAB 函数** Residue 展开成部分分式, 方法 (程序) 如下.

```
1  >> format short
2  >> b=[0, 9, 27, 58]
3
4  b =
5         0       9      27      58
6
7  >> a=[1, 5, 17, 13]
8
9  a =
10        1       5      17      13
11
12 >> format rat
13 >> [r, p, k]=residue(b,a)
14
15 r =
16        5/2         +     2/3i
17        5/2         -     2/3i
18         4
19
20 p =
21        -2          +     3i
```

```
22          -2          -      3i
23          -1
24
25   k =
26          []
```

其中 b=[0, 9, 27, 58] 为分子多项式系数, a=[1, 5, 17, 13] 为分母多项式系数, [r, p, k]=residue(b, a) 产生部分分式中的参数. 使用 help residue 查一下 residue 的用法, 不难写出 G(s) 的部分分式:

$$G(s)=\frac{4}{s+1}+\frac{\frac{5}{2}+\frac{2}{3}\mathrm{j}}{s+2-3\mathrm{j}}+\frac{\frac{5}{2}-\frac{2}{3}\mathrm{j}}{s+2+3\mathrm{j}}.$$

其对角标准形实现为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2+3\mathrm{j}&0\\0&0&-2-3\mathrm{j}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}u,\\ y=\left(4,\frac{5}{2}+\frac{2}{3}\mathrm{j},\frac{5}{2}-\frac{2}{3}\mathrm{j}\right)\boldsymbol{x}.\end{cases}$$

这个对角标准形状态空间模型参数有复数, 不是我们希望的. 把 $G(s)$ 部分分式的后两项合并得到

$$G(s)=\frac{4}{s+1}+\frac{5s+6}{(s+2)^2+3^2}.$$

其三对角标准形实现为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&3\\0&-3&-2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}u,\\ y=\left(4,-\frac{4}{3},5\right)\boldsymbol{x}.\end{cases}$$

**2. 两个子系统串联的状态空间模型**

两个子系统串联构成的串联组合系统, 第 2 个子系统 $S_2$ 输出 $\boldsymbol{y}_2(t)$ 为第 1 个子系统 $S_1$ 的输入, 如图 3.6.4 所示, (我们没有按顺序排列两个子系统的目的是为了使组合系统状态空间模型的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵是一个上三角阵, 与约当块是上三角阵统一), 其中 $\boldsymbol{x}_i(t)\in\mathbb{R}^{n_i}$ 是第 $i$ 个子系统 $S_i$ 的 ($n_i$ 维) 状态变量, $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbb{R}^r$ 和 $\boldsymbol{y}_2(t)\in\mathbb{R}^{m_1}$ 分别为第 2 个子系统 $S_2$ 的输入向量和输出向量, $\boldsymbol{y}(t)\in\mathbb{R}^m$ 为组合系统的输出向量, $\boldsymbol{A}_i$, $\boldsymbol{B}_i$ 和 $\boldsymbol{C}_i$ 均为适当维数常数矩阵.

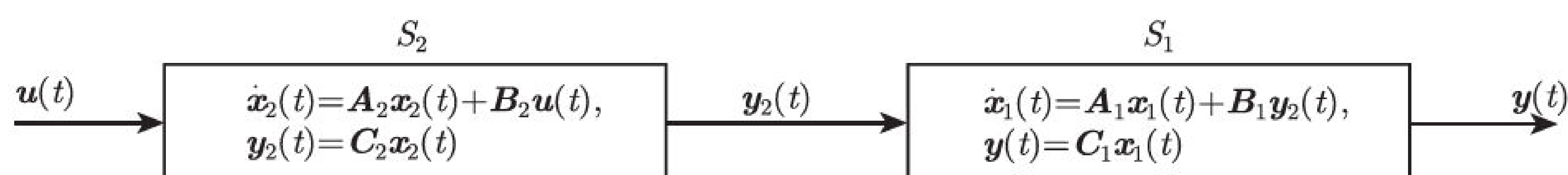



图 3.6.4 串联组合系统

参见图 3.6.4, 把第 2 个子系统输出 $\boldsymbol{y}_2(t)=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)$ 代入第 1 个子系统 $S_1$ 的状态中可得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)&=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{y}_2(t)\\&=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t).\end{aligned}$$

联立上式, $S_2$ 的状态方程和 $S_1$ 的输出方程, 可得 **串联组合系统的状态空间模型**,

$$\left\{\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)\\\dot{\boldsymbol{x}}_2(t)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_2\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\\boldsymbol{x}_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t),\\\boldsymbol{y}(t)\quad&=[\boldsymbol{C}_1,\ \boldsymbol{0}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\\boldsymbol{x}_2(t)\end{pmatrix}.\end{aligned}\right.\tag{3.6.18}$$

串联组合系统的状态向量 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ 是由两个子系统的状态向量构成的, 即

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\\boldsymbol{x}_2(t)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}.$$

仔细观察串联组合系统的状态空间模型 (3.6.18), 对于子系统输出方程中不直接含输入项的情形 (即 $\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{D}_2=\boldsymbol{0}$), 可以得出以下结论.

串联组合系统的输出 $\boldsymbol{C}$ 矩阵是第 1 个子系统输出参数矩阵 $\boldsymbol{C}_1$ 加上一些零元构成的; 串联组合系统的输入 $\boldsymbol{B}$ 矩阵是一些零元加上第 2 个子系统输入参数矩阵 $\boldsymbol{B}_2$ 构成的; 串联组合系统的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵是一个块上三角矩阵, 对角上块矩阵等于两个子系统的矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}$ 矩阵 (1, 2) 块等于第一个子系统输入参数矩阵 $\boldsymbol{B}_1$ 与第 2 个子系统输出参数矩阵 $\boldsymbol{C}_2$ 之积.

借助于串联组合系统的状态空间模型, 可以研究有重复数极点传递函数的三对角标准形实现, 留给读者讨论.

**3. 四阶系统重复数极点传递函数的三对角标准形实现**

考虑下列有重复数极点传递函数,

$$G(s)=\frac{b_1's+b_2'}{[(s+\sigma)^2+\omega^2]^2},\ \sigma\in\mathbb{R},\ \omega>0,\ b_1'\in\mathbb{R},\ b_2'\in\mathbb{R}.$$

把 $G(s)$ 写成下列形式

$$G(s)=\frac{b_1s+b_2}{(s+\sigma)^2+\omega^2}\frac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2}=:G_1(s)G_2(s),\ b_1:=b_1'/\omega,\ b_2:=b_2'/\omega,$$

其中

$$G_1(s):=\frac{b_1s+b_2}{(s+\sigma)^2+\omega^2},\quad G_2(s):=\frac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2}.$$

令

$$Y_2(s)=G_2(s)U(s)=\frac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2}U(s),$$

$$Y(s) = G_1(s)Y_2(s) = \frac{b_1 s + b_2}{(s+\sigma)^2 + \omega^2} Y_2(s).$$

因此, 这个系统可以看作两个子系统的串联. 第 2 个子系统 $S_2$ 的输入为 $u(t)$, 输出为 $y_2(t)$; 第 1 个子系统 $S_1$ 的输入为 $y_2(t)$, 输出为 $y(t)$, 参见图 3.6.5.

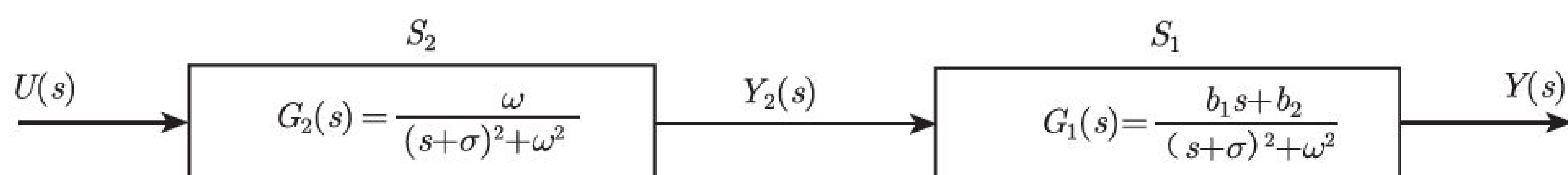



图 3.6.5 串联组合系统

参见式 (3.6.14)、式 (3.6.15), 可以写出第 2 个子系统的三对角标准形实现为

$$S_2: \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \omega \\ -\omega & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y_2 = [1,\ 0] \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3.6.19}$$

参见式 (3.6.12)、式 (3.6.13), 可以写出第 1 个子系统的三对角标准形实现为

$$S_1: \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \omega \\ -\omega & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} y_2, \\ y = \left( \frac{b_2 - b_1\sigma}{\omega}, b_1 \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3.6.20}$$

参照串联组合系统状态空间模型 (3.6.18), 可以得到三对角标准形实现为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & -\sigma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = \left( \frac{b_2 - b_1\sigma}{\omega}, b_1, 0, 0 \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3.6.21}$$

**4. $2k$ 阶系统重复数极点传递函数的三对角标准形实现**

可以将上述方法推广用于研究下列多重复数极点传递函数的三对角标准形

$$G(s) = \frac{b_1' s + b_2'}{[(s+\sigma)^2 + \omega^2]^k}, \quad \sigma \in \mathbb{R},\ \omega > 0,\ b_1' \in \mathbb{R},\ b_2' \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.$$

把 $G(s)$ 写成下列形式

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_2}{(s+\sigma)^2 + \omega^2} \frac{\omega}{(s+\sigma)^2 + \omega^2} \cdots \frac{\omega}{(s+\sigma)^2 + \omega^2}$$

$$=: G_1(s)G_2(s)\cdots G_2(s), \quad b_1 := b_1'/\omega^{k-1},\ b_2 := b_2'/\omega^{k-1}.$$

依次运用两两子系统串联即可得到其三对角形实现.

### 3.6.6　利用 MATLAB 函数进行模型转换

利用 MATLAB 函数可进行系统模型之间的相互转换. MATLAB 提供了很多命令, 使得模型间的变换十分简单 (但不一定是规范型或标准形). 例如, 函数 tf2ss 把传递函数变换为状态空间模型, c2d 把连续时间模型变换为离散时间模型, ss2tf 把状态空间模型转化为传递函数, d2c 把离散时间模型转化为连续时间模型. 还设置了传递函数模型 tf, 状态空间模型 ss 等函数. 这些命令使用起来特别方便, 其用法可借助于 MATLAB 的 help 命令查询, 例如 help tf 可查函数 tf 的用法. 假设要产生传递函数

$$Gs = \frac{4s^2+5s+6}{s^3+2s^2+3s+4},$$

可使用下面命令:

```
1  >> Gs=tf([0,4,5,6], [1,2,3,4])
2
3  Transfer function:
4      4 s^2 + 5 s + 6
5  ---------------------
6  s^3 + 2 s^2 + 3 s + 4
```

将上述传递函数变换为状态空间模型的命令为 ss1=ss(Gs), 运行如下,

```
1  >> ss1=ss(Gs)
2  a =
3                x1       x2      x3
4      x1        -2    -0.75    -0.5
5      x2         4        0       0
6      x3         0        2       0
7
8  b =
9           u1
10     x1    2
11     x2    0
12     x3    0
13
14 c =
15               x1       x2      x3
16     y1         2    0.625   0.375
17
18 d =
19          u1
20     y1    0
21
22 Continuous-time model.
```

这个状态空间模型的数学表达式为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -0.75 & -0.50 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y = [2, 0.625, 0.375] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 0u. \end{cases}$$

下面是产生分子分母同次数的传递函数, 以及转化传递函数为状态空间模型的命令:

```
1   >> Gs2=tf([4,5,6,7], [1,2,3,4])
2
3   Transfer function:
4   4 s^3 + 5 s^2 + 6 s + 7
5   -----------------------
6    s^3 + 2 s^2 + 3 s + 4
7
8   >> ss2=ss(Gs2)
9
10  a =
11                x1      x2      x3
12      x1        -2   -0.75    -0.5
13      x2         4       0       0
14      x3         0       2       0
15
16  b =
17            u1
18      x1     2
19      x2     0
20      x3     0
21
22  c =
23                 x1         x2         x3
24      y1       -1.5      -0.75    -0.5625
25
26  d =
27            u1
28      y1     4
29
30  Continuous-time model.
```

对应的传递函数为

$$G(s) = \frac{4s^3 + 5s^2 + 6s + 7}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4},$$

状态空间模型为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -0.75 & -0.50 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y \quad = [-1.5, -0.75, -0.5625] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 4u. \end{cases}$$

此外, 产生采样周期为 2 的离散时间传递函数命令如下,

```
1  >> Gz=tf([0,4,5,6], [1,2,3,4],2)
2
3  Transfer function:
4      4 z^2 + 5 z + 6
5  ---------------------
6  z^3 + 2 z^2 + 3 z + 4
7
8  Sampling time: 2
```

当然, 这些命令可直接写到 m 文件中, 就可在 MATLAB 环境下运行.

## 3.7 多变量系统传递矩阵的计算

描述线性时不变 SISO 系统输入输出映射关系的一种方式是传递函数. 多变量系统的输入输出关系可用状态空间模型描述, 线性时不变多变量系统可以用传递函数矩阵描述. 传递函数矩阵有时简称为 **传递函数阵** 或 **传递矩阵** (Transfer Matrix).

多变量系统即多输入多输出系统, 其示意图如图 3.7.1 所示. 多变量系统有多个输入, 构成一个输入向量 $\boldsymbol{u}(t) := [u_1(t), u_2(t), \cdots, u_r(t)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^r$ ($r$ 个输入), 多个输出构成一个输出向量 $\boldsymbol{y}(t) := [y_1(t), y_2(t), \cdots, y_m(t)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$ ($m$ 个输出).

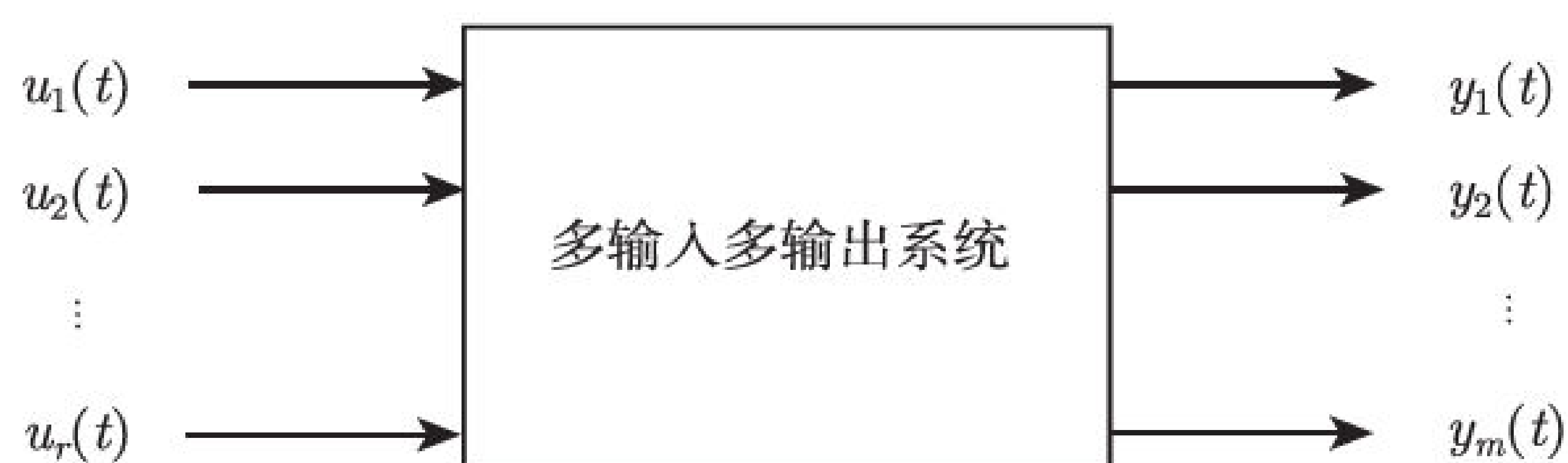



图 3.7.1 多输入多输出系统

线性时不变多变量系统的输入输出关系可以表达为

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{U}(s), \tag{3.7.1}$$

或

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mr}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_r(s) \end{pmatrix}, \tag{3.7.2}$$

其中 $\boldsymbol{Y}(s) := \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{pmatrix} = \mathscr{L}[\boldsymbol{y}(t)] \in \mathbb{R}^m$ 为输出向量 $\boldsymbol{y}(t)$ 的拉氏变换, $\boldsymbol{U}(s) := \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_r(s) \end{pmatrix} =$ $\mathscr{L}[\boldsymbol{u}(t)] \in \mathbb{R}^r$ 为输入向量 $\boldsymbol{u}(t)$ 的拉氏变换, $\boldsymbol{G}(s)$ 为系统的传递函数矩阵:

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mr}(s) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times r},$$

$G_{ij}(s)$ 是第 $j$ 个输入 $u_j(t)$ 到第 $i$ 个输出 $y_i(t)$ 的传递函数. 式 (3.7.2) 可以分解为 $m$ 个多输入单输出 (子) 系统, 第 $i$ 个子系统为

$$\begin{aligned} Y_i(s) &= G_{i1}(s)U_1(s) + G_{i2}(s)U_2(s) + \cdots + G_{ir}(s)U_r(s) \\ &= \sum_{j=1}^{r} G_{ij}(s)U_j(s), \quad i = 1, 2, \cdots, m. \end{aligned} \tag{3.7.3}$$

两输入两输出系统结构图如图 3.7.2 所示.

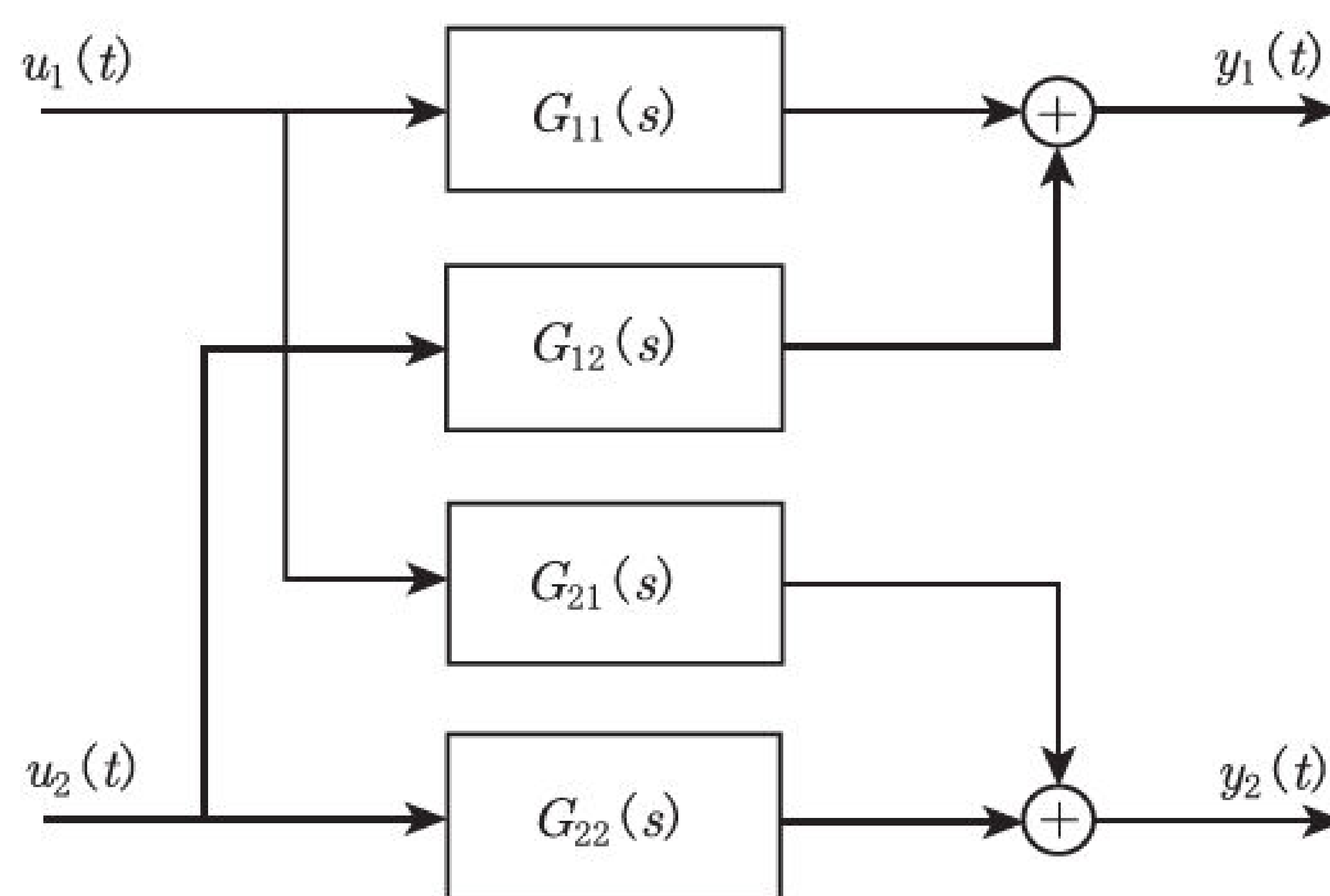



图 3.7.2 两输入两输出系统

### 3.7.1 多变量系统误差传递函数矩阵

设多变量反馈系统如图 3.7.3 所示 (负反馈), 其中 $\boldsymbol{G}(s) \in \mathbb{R}^{m\times r}$ 为前向通道的传递矩阵, $\boldsymbol{H}(s) \in \mathbb{R}^{r\times m}$ 为反馈通道的传递矩阵, 下面推导从输入 $\boldsymbol{R}(s) \in \mathbb{R}^r$ 到输出 $\boldsymbol{Y}(s) \in \mathbb{R}^m$ 的闭环系统传递矩阵. 求闭环传递矩阵有两种方法, 下面分别介绍.

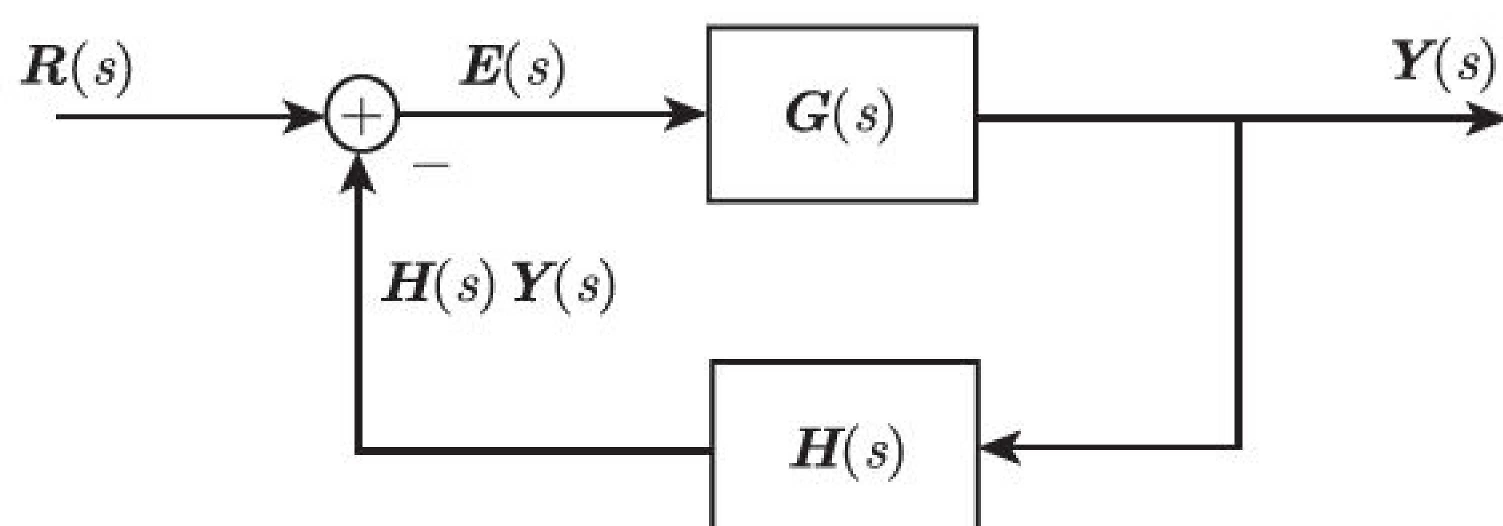



图 3.7.3 多变量反馈系统

由图 3.7.3 可知, 误差信号为

$$\boldsymbol{E}(s) = \boldsymbol{R}(s) - \boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{Y}(s).$$

将 $\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{E}(s)$ 代入上式可得

$$\boldsymbol{E}(s) = \boldsymbol{R}(s) - \boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{E}(s).$$

把右边第 2 项移到左边可得

$$[\boldsymbol{I}_r + \boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{G}(s)]\boldsymbol{E}(s) = \boldsymbol{R}(s).$$

求解得到

$$\boldsymbol{E}(s) = [\boldsymbol{I}_r + \boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{G}(s)]^{-1}\boldsymbol{R}(s). \tag{3.7.4}$$

由式 (3.7.4) 可得从输入 $\boldsymbol{R}(s) \in \mathbb{R}^r$ 到误差信号 $\boldsymbol{E}(s) \in \mathbb{R}^r$ 的 **误差传递函数矩阵** (Error Transfer Function Matrix) 为

$$\boldsymbol{G}_e(s) = [\boldsymbol{I}_r + \boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{G}(s)]^{-1} \in \mathbb{R}^{r\times r}. \tag{3.7.5}$$

### 3.7.2 多变量系统闭环传递函数矩阵

使用式 (3.7.4), 我们有

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{E}(s) = \boldsymbol{G}(s)[\boldsymbol{I}_r + \boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{G}(s)]^{-1}\boldsymbol{R}(s).$$

故从输入 $\boldsymbol{R}(s) \in \mathbb{R}^r$ 到输出 $\boldsymbol{Y}(s) \in \mathbb{R}^m$ 的 **闭环系统传递矩阵** 为

$$\boldsymbol{G}_b(s) = \boldsymbol{G}(s)[\boldsymbol{I}_r + \boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{G}(s)]^{-1} \in \mathbb{R}^{m\times r}. \tag{3.7.6}$$

下面给出传递矩阵的另一个表达式. 由图 3.7.3 可知,

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{E}(s) = \boldsymbol{G}(s)[\boldsymbol{R}(s) - \boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{Y}(s)],$$

或

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{R}(s) - \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{Y}(s).$$

把右边第 2 项移到左边可得

$$[\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{H}(s)]\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{R}(s).$$

求解得到

$$\boldsymbol{Y}(s)=[\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{H}(s)]^{-1}\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{R}(s). \tag{3.7.7}$$

故从输入 $\boldsymbol{R}(s)\in\mathbb{R}^r$ 到输出 $\boldsymbol{Y}(s)\in\mathbb{R}^m$ 的 **闭环传递函数矩阵** (Closed-Loop Transfer Function Matrix) 为

$$\boldsymbol{G}_b(s)=[\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{H}(s)]^{-1}\boldsymbol{G}(s)\in\mathbb{R}^{m\times r}. \tag{3.7.8}$$

尽管式 (3.7.6) 与式 (3.7.8) 两个闭环传递矩阵的形式不同, 但可以证明它们是相等的 (读者可证明之), 即

$$\boldsymbol{G}(s)[\boldsymbol{I}_r+\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{G}(s)]^{-1}=[\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{H}(s)]^{-1}\boldsymbol{G}(s).$$

### 3.7.3 求闭环传递矩阵的例子

**例 3.7.1** 设一个多变量系统的前向通道和反馈通道传递函数矩阵分别为

$$\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{2}{s+1} & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}(s)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{s+1}\end{pmatrix},$$

求系统的闭环传递函数矩阵.

**解** 这是一个 $r=2$ 输入、$m=2$ 输出系统. 先采用第 1 种方法, 计算

$$\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{s+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{2}{s+1} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{s} & -\dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{2}{(s+1)^2} & 0\end{pmatrix},$$

从输入 $\boldsymbol{R}(s)$ 到误差信号 $\boldsymbol{E}(s)$ 的 **误差传递矩阵** 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_e(s)&=[\boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{G}(s)]^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}\dfrac{s-1}{s} & -\dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{2}{(s+1)^2} & 1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{s(s+1)^3}{s^4+2s^3-1}\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1}{s+1}\\ -\dfrac{2}{(s+1)^2} & \dfrac{s-1}{s}\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{s^4+2s^3-1}\begin{pmatrix}s(s+1)^3 & s(s+1)^2\\ -2s(s+1) & (s-1)(s+1)^3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

按照式 (3.7.6) 可得闭环传递矩阵:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_b(s)&=\boldsymbol{G}(s)[\boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{G}(s)]^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{2}{s+1} & 0\end{pmatrix}\frac{1}{s^4+2s^3-1}\begin{pmatrix}s(s+1)^3 & s(s+1)^2\\ -2s(s+1) & (s-1)(s+1)^3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$
= \frac{1}{s^4+2s^3-1}\begin{pmatrix} s^3+3s^2+s+1 & s(s+1)^2 \\ 2s(s+1)^2 & 2s(s+1) \end{pmatrix}.
$$

再采用第 2 种方法, 计算

$$
\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{H}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{2}{s+1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{(s+1)^2} \\ -\dfrac{2}{s+1} & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
[\boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{H}(s)]^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{s-1}{s} & \dfrac{1}{(s+1)^2} \\ -\dfrac{2}{s+1} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{s(s+1)^3}{s^4+2s^3-1}\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{(s+1)^2} \\ \dfrac{2}{s+1} & \dfrac{s-1}{s} \end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{s^4+2s^3-1}\begin{pmatrix} s(s+1)^3 & -s(s+1) \\ 2s(s+1)^2 & (s-1)(s+1)^3 \end{pmatrix}.
$$

按照式 (3.7.8) 可得闭环传递矩阵:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G}_b(s) &= [\boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{H}(s)]^{-1}\boldsymbol{G}(s) \\
&= \frac{1}{s^4+2s^3-1}\begin{pmatrix} s(s+1)^3 & -s(s+1) \\ 2s(s+1)^2 & (s-1)(s+1)^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{2}{s+1} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{s^4+2s^3-1}\begin{pmatrix} s^3+3s^2+s+1 & s(s+1)^2 \\ 2s(s+1)^2 & 2s(s+1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

这个例子验证了两种方法求得的传递函数矩阵是相等的.

**例 3.7.2**　设一个多变量系统的前向通道和反馈通道传递函数矩阵分别为

$$
\boldsymbol{G}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+1} \\ 0 & \dfrac{2}{s+1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \dfrac{3}{s+1} \end{pmatrix},
$$

求系统的闭环传递函数矩阵. 这个反馈多变量系统框图如图 3.7.4 所示.

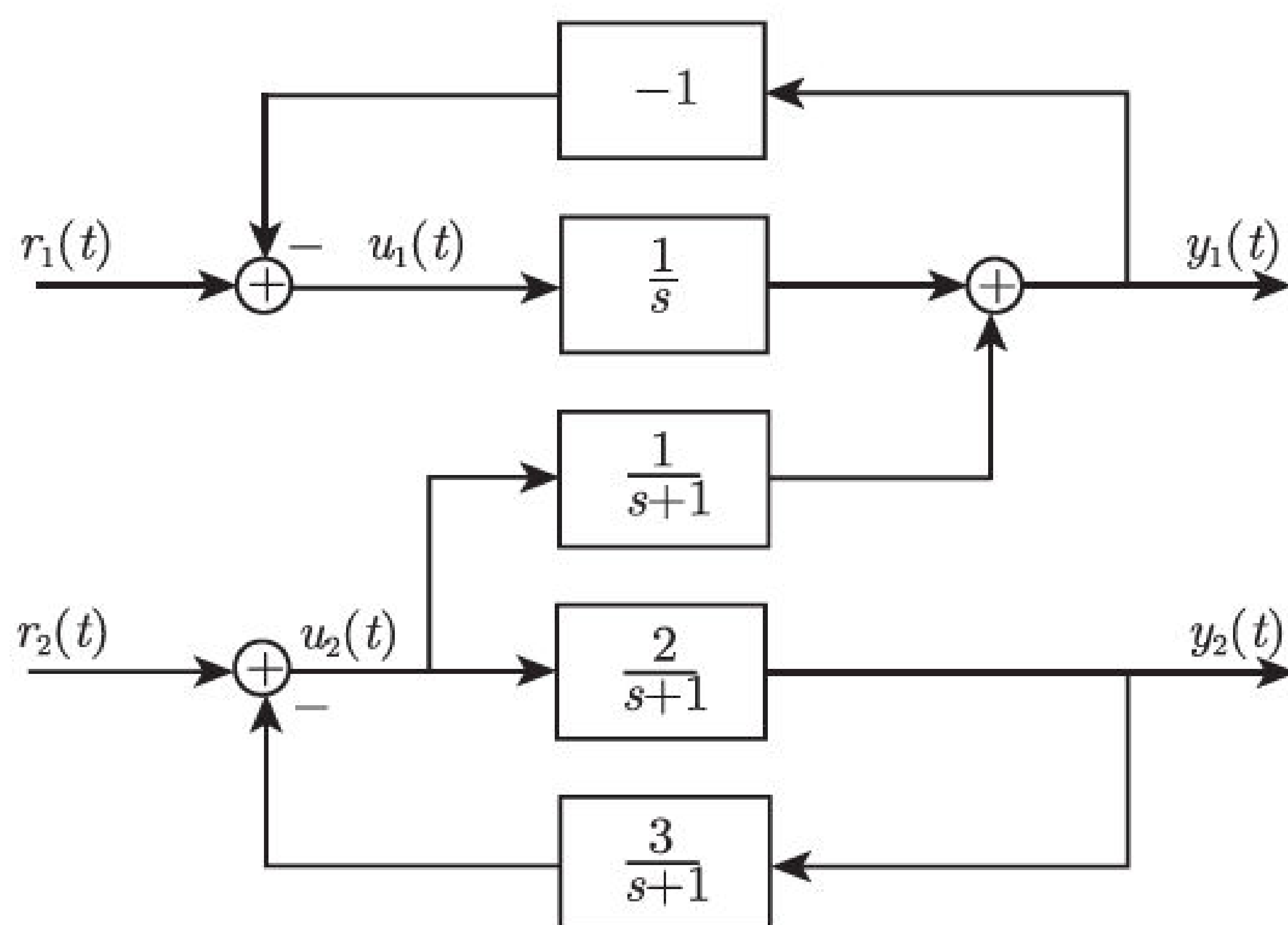



图 3.7.4　反馈多变量系统框图

**解** 这是一个 $r=2$ 输入、$m=2$ 输出系统. 先采用第 1 种方法, 计算

$$\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & \dfrac{3}{s+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+1}\\ 0 & \dfrac{2}{s+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{s} & -\dfrac{1}{s+1}\\ 0 & \dfrac{6}{(s+1)^2}\end{pmatrix},$$

从输入 $\boldsymbol{R}(s)$ 到误差信号 $\boldsymbol{E}(s)$ 的 **误差传递矩阵** 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_e(s)&=[\boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{G}(s)]^{-1}\\&=\begin{pmatrix}\dfrac{s-1}{s} & -\dfrac{1}{s+1}\\ 0 & 1+\dfrac{6}{(s+1)^2}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{s(s+1)^2}{(s-1)(s^2+2s+7)}\begin{pmatrix}\dfrac{s^2+2s+7}{(s+1)^2} & \dfrac{1}{s+1}\\ 0 & \dfrac{s-1}{s}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\dfrac{s}{s-1} & \dfrac{s(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+7)}\\ 0 & \dfrac{(s+1)^2}{s^2+2s+7}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

按照式 (3.7.6) 可得闭环传递矩阵:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_b(s)&=\boldsymbol{G}(s)[\boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{G}(s)]^{-1}\\&=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+1}\\ 0 & \dfrac{2}{s+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{s}{s-1} & \dfrac{s(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+7)}\\ 0 & \dfrac{(s+1)^2}{s^2+2s+7}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s-1} & \dfrac{s(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+7)}\\ 0 & \dfrac{2(s+1)}{s^2+2s+7}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

再采用第 2 种方法, 计算

$$\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{H}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+1}\\ 0 & \dfrac{2}{s+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & \dfrac{3}{s+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{s} & \dfrac{3}{(s+1)^2}\\ 0 & \dfrac{6}{(s+1)^2}\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{H}(s)]^{-1}&=\begin{pmatrix}\dfrac{s-1}{s} & \dfrac{3}{(s+1)^2}\\ 0 & 1+\dfrac{6}{(s+1)^2}\end{pmatrix}\\&=\frac{s(s+1)^2}{(s-1)(s^2+2s+7)}\begin{pmatrix}\dfrac{s^2+2s+7}{(s+1)^2} & -\dfrac{3}{(s+1)^2}\\ 0 & \dfrac{s-1}{s}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\dfrac{s}{s-1} & -\dfrac{3s}{(s-1)(s^2+2s+7)}\\ 0 & \dfrac{(s+1)^2}{s^2+2s+7}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

按照式 (3.7.8) 可得闭环传递矩阵:

$$\boldsymbol{G}_b(s)=[\boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{H}(s)]^{-1}\boldsymbol{G}(s)$$

$$
=\begin{pmatrix} \dfrac{s}{s-1} & -\dfrac{3s}{(s-1)(s^2+2s+7)} \\ 0 & \dfrac{(s+1)^2}{s^2+2s+7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+1} \\ 0 & \dfrac{2}{s+1} \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{s-1} & \dfrac{s(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+7)} \\ 0 & \dfrac{2(s+1)}{s^2+2s+7} \end{pmatrix}.
$$

这个例子也验证了两种方法求得的传递函数矩阵是相等的.

也可以根据图 3.7.4 中变量之间的关系, 列写方程, 导出输入输出间的关系, 从而获得系统的闭环传递矩阵. 由图 3.7.4, 可得控制输入 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$, 参考输入 $r_1(t)$ 和 $r_2(t)$, 以及系统输出 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 之间的关系:

$$
y_1(t)=\frac{1}{s}u_1(t)+\frac{1}{s+1}u_2(t),\quad y_2(t)=\frac{2}{s+1}u_2(t),
$$

$$
u_1(t)=r_1(t)+y_1(t),\quad u_2(t)=r_2(t)-\frac{3}{s+1}y_2(t).
$$

消除 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$, 可得参考输入 $r_1(t)$ 和 $r_2(t)$ 到系统输出 $y_1(t)$, $y_2(t)$ 之间的关系

$$
y_1(t)=\frac{1}{s}[r_1(t)+y_1(t)]+\frac{1}{s+1}[r_2(t)-\frac{3}{s+1}y_2(t)],
$$

$$
y_2(t)=\frac{2}{s+1}[r_2(t)-\frac{3}{s+1}y_2(t)].
$$

整理得到

$$
\frac{s-1}{s}y_1(t)+\frac{3}{(s+1)^2}y_2(t)=\frac{1}{s}r_1(t)+\frac{1}{s+1}r_2(t),
$$

$$
\frac{s^2+2s+7}{(s+1)^2}y_2(t)=\frac{2}{s+1}r_2(t).
$$

它们写成矩阵形式为

$$
\begin{pmatrix} \dfrac{s-1}{s} & \dfrac{3}{(s+1)^2} \\ 0 & \dfrac{s^2+2s+7}{(s+1)^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+1} \\ 0 & \dfrac{2}{s+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1(s) \\ r_2(s) \end{pmatrix}.
$$

求解得到

$$
\begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{s-1}{s} & \dfrac{3}{(s+1)^2} \\ 0 & \dfrac{s^2+2s+7}{(s+1)^2} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+1} \\ 0 & \dfrac{2}{s+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1(s) \\ r_2(s) \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} \dfrac{s}{s-1} & -\dfrac{3s}{(s-1)(s^2+2s+7)} \\ 0 & \dfrac{(s+1)^2}{s^2+2s+7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+1} \\ 0 & \dfrac{2}{s+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1(s) \\ r_2(s) \end{pmatrix}
$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s-1} & \dfrac{s(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+7)} \\ 0 & \dfrac{2(s+1)}{s^2+2s+7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1(s) \\ r_2(s) \end{pmatrix},$$

所以系统的闭环传递函数为

$$\boldsymbol{G}_b(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s-1} & \dfrac{s(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+7)} \\ 0 & \dfrac{2(s+1)}{s^2+2s+7} \end{pmatrix}.$$

它与上面的结果是一样的.

## 3.8 思考题

1. 求下列系统的传递函数,

(1) $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -2\sigma & -\sigma^2-\omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y = [b_1,\ b_2]\boldsymbol{x}. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -\sigma & \omega^2 \\ -1 & -\sigma \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y = \left( \dfrac{-b_1\sigma + b_2}{\omega^2},\ b_1 \right) \boldsymbol{x}. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -\sigma & 100\omega^2 \\ -0.01 & -\sigma \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y = \left( \dfrac{-b_1\sigma + b_2}{100\omega^2},\ b_1 \right) \boldsymbol{x}. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -\sigma & \omega \\ -\omega & -\sigma \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y = \left( \dfrac{-b_1\sigma + b_2}{\omega},\ b_1 \right) \boldsymbol{x}. \end{cases}$

这个题说明一个系统的传递函数是唯一的, 但状态空间模型是不唯一的.

2. 求下列状态空间系统的特征多项式、传递函数,

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [b_1, b_2, b_3]\boldsymbol{x}(t). \end{cases}$$

3. 求下列友矩阵的特征多项式,

$$A_c = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$A_{co} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$A_o = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$A_{ob} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

4. 写出下列系统传递函数的 4 种规范型,

(1) $G(s) = \dfrac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$, (2) $G(s) = \dfrac{6s^2+22s+18}{(s+1)(s+2)(s+3)}$.

5. 写出下列单输入单输出系统的对偶系统,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [7,\ 1998]x(t) + 7.17u(t). \end{cases}$$

6. 写出下列单输入单输出系统的对偶系统,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [13,\ 14,\ 1967]x(t) + 10.15u(t). \end{cases}$$

7. 写出下列 2 输入单输出系统的对偶系统,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [16,\ 17,\ 18]x(t) + [1963,\ 3.09]u(t). \end{cases}$$

8. 写出下列单输入 2 输出系统的对偶系统,

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} u(t), \\ \boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 1931 \\ 16 & 17 & 2013 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 8.17 \\ 3.26 \end{pmatrix} u(t). \end{cases}$$

9. 求下列系统的传递函数矩阵, 以及对偶系统的传递函数矩阵,

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} u(t), \\ \boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 7 & 1922 \\ 9 & 2015 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 3.22 \\ 5.26 \end{pmatrix} u(t). \end{cases}$$

10. 写出下列系统传递函数的对角标准形,

$$(1) G_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \qquad (2) G_2(s) = \frac{6s^2+22s+18}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

11. 写出下列系统传递函数的约当标准形,

$$(1)\ G(s) = \frac{5s^2+13s+9}{(s^2+2s+1)(s+2)},$$

$$(2)\ G(s) = \frac{3s^2+8s+6}{s^3+3s^2+3s+1},$$

$$(3)\ G(s) = \frac{1}{s^3+3s^2+3s+1}.$$

12. 举例把状态空间模型化为规范型.
13. 举例把状态空间模型化为对角标准形或约当标准形.
14. 举例求状态空间规范型和标准形的传递函数.
15. 考虑一个两输入两输出多变量系统, 其前向通道和反馈通道传递函数矩阵分别为

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{s+2} \\ \dfrac{3}{s+2} & \dfrac{4}{s+3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

求系统的闭环传递函数矩阵 (负反馈).

16. 设一个多变量系统的前向通道和反馈通道传递函数矩阵分别为

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{2}{s+1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}(s) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{s} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s+1} \end{pmatrix},$$

求系统的闭环传递函数矩阵.

17. 设一个多变量系统的前向通道和反馈通道传递函数矩阵分别为

$$\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{s-1} \\ \dfrac{3}{s-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}(s)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s-1} \end{pmatrix},$$

求系统的闭环传递函数矩阵.

18. 将下列离散状态空间模型化为 4 种规范型,

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}u(k), \\ \quad y(k) \quad =[1,\ 0]\boldsymbol{x}(k). \end{cases}$$

19. 设离散系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}u(k), \\ \quad y(k) \quad =[7,\ 8]\boldsymbol{x}(k), \end{cases}$$

求系统的传递算子, 把该系统化为差分方程模型.

20. 计算下列斜对角矩阵的行列式,

$$\bar{\boldsymbol{\Lambda}}:=\operatorname{adiag}[a_1,a_2,\cdots,a_n]=\begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \cdot & & \\ a_n & & & \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{n\times n}.$$

21. 计算下列矩阵的行列式,

$$(1)\ \boldsymbol{A}=[x_iy_j]=\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{n\times n},$$

$$(2)\ \boldsymbol{A}=[x_i+y_j]=\begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & \cdots & x_1+y_n \\ x_2+y_1 & x_2+y_2 & \cdots & x_2+y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n+y_1 & x_n+y_2 & \cdots & x_n+y_n \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{n\times n},$$

$$(3)\ \boldsymbol{A}=\left(\frac{1}{x_i+y_j}\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_1+y_1} & \dfrac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \dfrac{1}{x_1+y_n} \\ \dfrac{1}{x_2+y_1} & \dfrac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \dfrac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{x_n+y_1} & \dfrac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \dfrac{1}{x_n+y_n} \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{n\times n}.$$

22. 计算下列矩阵的特征多项式,

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n)\times(2n)}$.

(2) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n)\times(2n)}$.

(3) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(4) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

即矩阵的四周元为 1, 内部元都为零.

23. 设 $\lambda_{\max}[\boldsymbol{X}]$ 表示 $\boldsymbol{X}$ 的最大特征值, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是列满秩或行满秩长方阵, 证明:

(1) $\lambda_{\max}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}] = 1$.

(2) $\lambda_{\max}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}] = 1$.

(3) $\lambda_{\max}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}] = \lambda_{\max}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}]$.

24. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times n$ 矩阵, 且

$$\det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n,$$

证明 $[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]$ 的伴随矩阵为

$$\begin{aligned}\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] = &(s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \cdots + a_{n-2}s + a_{n-1})\boldsymbol{I} \\ &+(s^{n-2} + a_1 s^{n-3} + \cdots + a_{n-3}s + a_{n-2})\boldsymbol{A} + \cdots + (s + a_1)\boldsymbol{A}^{n-2} + \boldsymbol{A}^{n-1};\end{aligned}$$

进一步说明存在严格真有理函数 $\alpha_i(s)$ 使得

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \alpha_0(s)\boldsymbol{I} + \alpha_1(s)\boldsymbol{A} + \alpha_2(s)\boldsymbol{A}^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(s)\boldsymbol{A}^{n-1}.$$

这说明存在解析函数 $\beta_i(t)$ 使得下式成立,

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \beta_0(t)\boldsymbol{I} + \beta_1(t)\boldsymbol{A} + \beta_2(t)\boldsymbol{A}^2 + \cdots + \beta_{n-1}(t)\boldsymbol{A}^{n-1}.$$

第 4 章
CHAPTER 4

# 线性系统的运动分析

上一章讨论了系统的状态空间描述、规范型、标准形以及系统传递函数的实现问题. 本章将讨论 (多变量) 线性系统的运动分析, 即线性系统状态方程的求解, 状态转移矩阵及其性质、转移矩阵的计算、特殊矩阵的转移矩阵计算、线性时变状态空间系统的解.

本章讨论的一些特殊矩阵的转移矩阵计算问题, 可参见作者 2013 年发表在国际期刊 *Applied Mathematics and Computation* 上的论文 "Computation of matrix exponentials of special matrices (特殊矩阵矩阵指数的计算)" [26].

## 4.1 线性状态空间系统的解

本节讨论线性时不变状态空间系统的解, 包括零输入齐次状态方程的解.

### 4.1.1 线性时不变齐次状态方程的解

当输入为零时, 线性时不变连续时间状态空间模型退化为 **齐次状态方程**:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{4.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

可以采用幂级数方法和拉普拉斯变换方法求解.

**1. 幂级数方法**

一种最简单的方法是假设状态向量可以展开为下列级数,

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1 t + \boldsymbol{\alpha}_2 t^2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_i t^i + \cdots \tag{4.1.2}$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}^n$ 是待定向量. 上式对 $t$ 求导得到

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 t + 3\boldsymbol{\alpha}_3 t^2 + \cdots + i\boldsymbol{\alpha}_i t^{i-1} + \cdots \tag{4.1.3}$$

将式 (4.1.2) 代入式 (4.1.1) 得到

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1 t + \boldsymbol{\alpha}_2 t^2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_i t^i + \cdots) \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 t + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 t^2 + \cdots + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i t^i + \cdots\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

令式 (4.1.3) 与式 (4.1.4) 相等, 得到

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 t + 3\boldsymbol{\alpha}_3 t^2 + \cdots + i\boldsymbol{\alpha}_i t^{i-1} + \cdots \\ &\quad = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 t + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 t^2 + \cdots + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i t^i + \cdots\end{aligned}$$

比较上式两边 $t$ 的同次幂系数, 可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_0, \\ 2\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \\ 3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \\ \quad\vdots \\ i\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_0, \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \dfrac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_0, \\ \boldsymbol{\alpha}_3 = \dfrac{1}{3}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \dfrac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}_0, \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_i = \dfrac{1}{i}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} = \dfrac{1}{i!}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{\alpha}_0. \end{cases}$$

将上式 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 表达式代入式 (4.1.2) 得到

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3 + \cdots + \frac{1}{i!}\boldsymbol{A}^it^i + \cdots\right)\boldsymbol{\alpha}_0.$$

令 $t = 0$ 代入上式, 可知 $\boldsymbol{\alpha}_0 = \boldsymbol{x}(0)$. 因此, 式 (4.1.1) **齐次状态方程的解** 为

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3 + \cdots + \frac{1}{i!}\boldsymbol{A}^it^i + \cdots\right)\boldsymbol{x}(0). \tag{4.1.5}$$

回顾指数函数的 **泰勒级数展开** (Taylor series expansion):

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots$$

据此定义 **矩阵指数函数**,

$$\exp(\boldsymbol{A}t) := \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3 + \cdots + \frac{1}{i!}\boldsymbol{A}^it^i + \cdots \tag{4.1.6}$$

所以 **齐次状态方程的解** 可以表示为

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0). \tag{4.1.7}$$

如果系统的输出方程为

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

那么系统 **零输入响应** (即零输入时系统的输出) 为

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0).$$

这样问题就转换为如何求解矩阵指数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$.

由式 (4.1.7) 可得

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_0}\boldsymbol{x}(0), \quad \boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_0}\boldsymbol{x}(0) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0).$$

因此, 将

$$\boldsymbol{\Phi}(t) := \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3 + \cdots \tag{4.1.8}$$

称为线性时不变连续时间系统的 **状态转移矩阵** (State Transition Matrix) 或 **转移矩阵** (Transition Matrix). 有时把状态转移矩阵定义为

$$\boldsymbol{\Phi}(t,\tau) := \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}.$$

它相当于 $\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)$. 特别对于时变系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$, 转移矩阵定义为

$$\boldsymbol{\Phi}(t,\tau) := \exp\left[\int_{\tau}^{t} \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t\right]. \tag{4.1.9}$$

本书采用前一种方法. 如果有多个转移矩阵, 可用下标加以区别. 如 $\boldsymbol{\Phi}_A(t) := \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 或 $\boldsymbol{\Phi}_A(t,\tau) := \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转移矩阵.

**例 4.1.1** 设系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

计算系统的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 和状态方程的解 $\boldsymbol{x}(t)$.

**解** 对于本例, 有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_2, \quad \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}^3 = \cdots = \boldsymbol{I}_2.$$

状态转移矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t) &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3 + \cdots \\ &= \boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{I}_2t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{I}_2t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{I}_2t^3 + \cdots \\ &= \left(1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots\right)\boldsymbol{I}_2 \\ &= \mathrm{e}^t\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \\ & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

状态方程的解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \\ & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 2\mathrm{e}^t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

从这个例子我们可以总结出: 单位阵 $\boldsymbol{I}$ 的转移矩阵等于 $\mathrm{e}^t$ 乘以该单位阵, 即

$$\boldsymbol{\Phi}_I(t) = \exp(\boldsymbol{I}t) = \mathrm{e}^t\boldsymbol{I}.$$

**例 4.1.2** 设系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

计算系统的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 和状态方程的解 $\boldsymbol{x}(t)$.

**解** 对于本例, 有

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad A^3=A^4=\cdots=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

这个线性时不变系统的状态转移矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t)&=\mathrm{e}^{At}=I_3+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+\cdots\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}t+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}t^2+\frac{1}{3!}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}t^3+\cdots\\&=\begin{pmatrix}1&t&\dfrac{t^2}{2!}\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

状态方程的解为

$$\begin{aligned}x(t)&=\boldsymbol{\Phi}(t)x(0)=\mathrm{e}^{At}x(0)\\&=\begin{pmatrix}1&t&\dfrac{t^2}{2!}\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2t+3t^2\\2+6t\\6\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**2. 拉普拉斯变换方法**

对式 (4.1.1) 两边取拉普拉斯变换有

$$sX(s)-x(0)=AX(s),$$

或

$$\begin{aligned}(sI_n-A)X(s)&=x(0),\\X(s)&=(sI_n-A)^{-1}x(0).\end{aligned}$$

进行拉普拉斯反变换有

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[(sI_n-A)^{-1}]x(0). \tag{4.1.10}$$

与式 (4.1.7) 比较, 可知线性时不变连续时间系统的 **矩阵指数** 等于 $(sI_n-A)^{-1}$ 的拉普拉斯反变换:

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{At}=\mathscr{L}^{-1}[(sI_n-A)^{-1}]. \tag{4.1.11}$$

**例 4.1.3** 设系统的状态方程为

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}-3&-2\\1&0\end{pmatrix}x(t),\quad \begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},$$

求状态方程的解 $x(t)$.

**解**　用拉普拉斯变换方法求解. 本题中,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s+3 & 2\\ -1 & s\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}(s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A})^{-1}&=\frac{\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A}]}{\det[s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A}]}=\frac{1}{(s+3)s+2}\begin{pmatrix}s & -2\\ 1 & s+3\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\dfrac{s}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & -\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\\ \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

进行拉普拉斯反变换得到状态转移矩阵,

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp(\boldsymbol{A}t)=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}]\\ =&\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\\ \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

状态方程的解为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}&=\boldsymbol{\Phi}(t)\begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\\ \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}(-a-2b)\mathrm{e}^{-t}+(2a+2b)\mathrm{e}^{-2t}\\ (a+2b)\mathrm{e}^{-t}-(a+b)\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

### 4.1.2　线性时不变状态空间系统的解

设状态方程模型为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t),\end{cases}\tag{4.1.12}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbb{R}^r$, $\boldsymbol{y}(t)\in\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{D}\in\mathbb{R}^{m\times r}$.

**1. 积分方法 (一)**

式 (4.1.12) 的第 1 个方程两边左乘以 $\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}$ 移项可得

$$\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t).$$

上式两边从 $t_0$ 到 $t$ 积分可得

$$\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(t)-\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t_0}\boldsymbol{x}(t_0)=\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

两边左乘 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$, 移项得到状态解和输出解分别为

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$
= \boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{4.1.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \\
&= \boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \boldsymbol{C}\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \\
&= \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \boldsymbol{C}\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t).
\end{aligned} \tag{4.1.14}
$$

系统的输出可分为零输入 ($\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{0}$) 响应 $\boldsymbol{y}_1(t)$ 和零状态 ($\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{0}$) 响应 $\boldsymbol{y}_2(t)$ 之和, 即 $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}_1(t) + \boldsymbol{y}_2(t)$, 其中

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1(t) &= \boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) \\
&= \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0), \\
\boldsymbol{y}_2(t) &= \boldsymbol{C}\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \\
&= \boldsymbol{C}\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t).
\end{aligned}
$$

**2. 积分方法 (二)**

令 $\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_1(t)$ 是状态解, 代入式 (4.1.12) 的第 1 个方程可得

$$
\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_1(t) + \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t) = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t).
$$

所以有

$$
\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t).
$$

两边左乘 $\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}$, 积分可得

$$
\boldsymbol{x}_1(t) - \boldsymbol{x}_1(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau.
$$

故

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_1(t) \\
&= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\left[\boldsymbol{x}_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \\
&= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned} \tag{4.1.15}
$$

又 $\boldsymbol{x}(t_0) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_0}\boldsymbol{x}_1(t_0)$. 解得 $\boldsymbol{x}_1(t_0) = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t_0}\boldsymbol{x}(t_0)$. 代入式 (4.1.15) 可得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t_0}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

### 3. 拉普拉斯变换方法

对式 (4.1.12) 的第 1 个方程两边取拉普拉斯变换有

$$s\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s),$$

则

$$\begin{aligned}&(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s),\\&\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0)+(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s).\end{aligned}\tag{4.1.16}$$

因为两个函数卷积的拉普拉斯变换等于它们拉普拉斯变换的乘积:

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\mathscr{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=F_1(s)F_2(s),$$

或

$$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)]=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

这里把 $(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}$ 视为 $F_1(s)$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$ 视为 $F_2(s)$, 所以对式 (4.1.16) 进行拉普拉斯反变换有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0)+\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)]\\&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{4.1.17}$$

这里利用了关系 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}]$. 又将 $t=t_0$ 代入式 (4.1.17) 得

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_0}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_0}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^t\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\left[\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_0}\boldsymbol{x}(0)+\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(-t+t_0)}\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]+\int_{t_0}^t\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\left[\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_0}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]+\int_{t_0}^t\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^t\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

**例 4.1.4** 设系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}-3&-2\\1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u(t),\quad\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

求在单位阶跃函数 $u(t)=1(t)$ 作用下状态方程的解.

**解** 由例 4.1.3 可知,

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp(\boldsymbol{A}t)=\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{b}u(\tau)\mathrm{d}\tau &= \int_0^t \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t+\tau}+2\mathrm{e}^{-2t+2\tau} & -2\mathrm{e}^{-t+\tau}+2\mathrm{e}^{-2t+2\tau} \\ \mathrm{e}^{-t+\tau}-\mathrm{e}^{-2t+2\tau} & 2\mathrm{e}^{-t+\tau}-\mathrm{e}^{-2t+2\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{-t+\tau}+2\mathrm{e}^{-2t+2\tau} \\ 2\mathrm{e}^{-t+\tau}-\mathrm{e}^{-2t+2\tau} \end{pmatrix}\mathrm{d}\tau = \begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{-t+\tau}+\mathrm{e}^{-2t+2\tau} \\ 2\mathrm{e}^{-t+\tau}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t+2\tau} \end{pmatrix}\Bigg|_{\tau=0}^{t} \\ &= \begin{pmatrix} -2+1 \\ 2-\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t} \\ 2\mathrm{e}^{-t}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}-1 \\ -2\mathrm{e}^{-t}+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\dfrac{3}{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

利用式 (4.1.17), 我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{b}u(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}-1 \\ -2\mathrm{e}^{-t}+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\dfrac{3}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3\mathrm{e}^{-t}+4\mathrm{e}^{-2t} \\ 3\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}-1 \\ -2\mathrm{e}^{-t}+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\dfrac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t}+3\mathrm{e}^{-2t}-1 \\ \mathrm{e}^{-t}-\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\dfrac{3}{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

## 4.2 状态转移矩阵及其性质

本节讨论线性时不变系统状态转移矩阵的性质和计算方法.

### 4.2.1 状态转移矩阵的定义

线性时不变系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n} \tag{4.2.1}$$

的 **状态转移矩阵** (State Transition Matrix) 定义为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp(\boldsymbol{A}t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\cdots \tag{4.2.2}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵指数为 $\exp(\boldsymbol{A})$. 因此, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转移矩阵等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与时间 $t$ 乘积的矩阵指数.

### 4.2.2 状态转移矩阵的性质

根据状态转移矩阵的定义, 对于常数矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 转移矩阵有下列性质.

**1. 转移矩阵的初值** (the Initial Value of the Transition Matrix)

转移矩阵初值等于单位阵, 即

$$\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{I}_n. \tag{4.2.3}$$

**2. 转置矩阵的转移矩阵** (the Transition Matrix of the Transposed Matrix)

转置矩阵的转移矩阵等于转移矩阵的转置, 即

$$\boldsymbol{\Phi}_{A^{\mathrm{T}}}(t)=\boldsymbol{\Phi}_A^{\mathrm{T}}(t). \tag{4.2.4}$$

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转移矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(t)$, 则转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的转移矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t)$, 这是因为

$$\exp(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t)=[\exp(\boldsymbol{A}t)]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t).$$

**3. 转移矩阵的导数** (the Derivative of the Transition Matrix)

转移矩阵对时间 $t$ 的微分存在, 且

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{A}. \tag{4.2.5}$$

即 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 与 $\boldsymbol{A}$ 是可乘法次序交换矩阵.

**4. 转移矩阵导数初值** (the Initial Value of the Derivative of the Transition Matrix)

转移矩阵导数初值等于矩阵 $\boldsymbol{A}$, 即

$$\boldsymbol{A}=\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)|_{t=0}=\dot{\boldsymbol{\Phi}}(0). \tag{4.2.6}$$

这个性质给出了由转移矩阵求 $\boldsymbol{A}$ 的方法. 由这两条性质可知: $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是矩阵微分方程

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t),\ \boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{I}_n$$

的唯一解.

**5. 转移矩阵的逆** (the Inverse of the Transition Matrix)

转移矩阵的逆存在, 且

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\boldsymbol{\Phi}(-t),\quad \boldsymbol{\Phi}^{-1}(-t)=\boldsymbol{\Phi}(t). \tag{4.2.7}$$

这可由下列等式求得,

$$\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{\Phi}(t-t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(-t)=\boldsymbol{\Phi}(-t)\boldsymbol{\Phi}(t).$$

**6. 转移矩阵的幂** (the Power of the Transition Matrix)

转移矩阵的幂满足关系:

$$\boldsymbol{\Phi}^m(t)=\boldsymbol{\Phi}(mt),\quad \boldsymbol{\Phi}^{-m}(t)=\boldsymbol{\Phi}(-mt). \tag{4.2.8}$$

这可由下列事实得到,

$$\boldsymbol{\Phi}^m(t)=(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t})^m=\mathrm{e}^{m\boldsymbol{A}t}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(mt)}=\boldsymbol{\Phi}(mt).$$

**例 4.2.1** 设状态转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp(\boldsymbol{A}t)=\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$, $\boldsymbol{\Phi}^{m}(t)$, $\boldsymbol{A}$.

**解** 根据转移矩阵的定义有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) &= \exp(-\boldsymbol{A}t)=\exp(\boldsymbol{A}(-t))=\boldsymbol{\Phi}(-t)\\ &=\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{t}+2\mathrm{e}^{2t} & -2\mathrm{e}^{t}+2\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{2t} & 2\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix},\\ \boldsymbol{\Phi}^{m}(t) &= \exp[m\boldsymbol{A}t]=\exp[\boldsymbol{A}(mt)]=\boldsymbol{\Phi}(mt)\\ &=\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-mt}+2\mathrm{e}^{-2mt} & -2\mathrm{e}^{-mt}+2\mathrm{e}^{-2mt} \\ \mathrm{e}^{-mt}-\mathrm{e}^{-2mt} & 2\mathrm{e}^{-mt}-\mathrm{e}^{-2mt} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由于

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)=\boldsymbol{A}\exp(\boldsymbol{A}t)=\exp(\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{A},$$

所以当 $t=0$ 时, 有

$$\boldsymbol{A}=\dot{\boldsymbol{\Phi}}(0)=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}-4\mathrm{e}^{-2t} & 2\mathrm{e}^{-t}-4\mathrm{e}^{-2t} \\ -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}_{t=0}=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**7. 转移矩阵乘法** (the Multiplication of the Transition Matrices)

转移矩阵乘法是可交换的, 即

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(t_1)=\boldsymbol{\Phi}(t_1)\boldsymbol{\Phi}(t), \tag{4.2.9}$$

且

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}(t\pm t_1)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(\pm t_1)=\boldsymbol{\Phi}(\pm t_1)\boldsymbol{\Phi}(t),\\ &\boldsymbol{\Phi}(t-t_2)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1-t_2).\end{aligned}$$

事实上,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t\pm t_1)&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t\pm t_1)}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(\pm t_1)}=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(\pm t_1),\\ \boldsymbol{\Phi}(t-t_2)&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_2)}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_1+t_1-t_2)}\\ &=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_1)}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_1-t_2)}=\boldsymbol{\Phi}(t-t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1-t_2).\end{aligned}$$

这个性质可以推广到一般情形:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}(t+t_1+t_2+\cdots+t_m)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_2)\cdots\boldsymbol{\Phi}(t_m),\\ &\boldsymbol{\Phi}(t-t_m)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1-t_2)\boldsymbol{\Phi}(t_2-t_3)\cdots\boldsymbol{\Phi}(t_{m-1}-t_m).\end{aligned}$$

上式说明了 **转移矩阵的转移性质** (the Transition Property of the Transition Matrix).

**8. 状态向量的转移特性** (the Transition Property of the State Vector)

对于任意初始条件 $\boldsymbol{x}(t_1)$, 线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ 的解可表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_1)\boldsymbol{x}(t_1).$$

事实上, 给定初值 $\boldsymbol{x}(0)$, 根据式 (4.1.7), 有

$$\boldsymbol{x}(t_1)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_1}\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\Phi}(t_1)\boldsymbol{x}(0).$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_1+t_1)}\boldsymbol{x}(0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_1)}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_1}\boldsymbol{x}(0)\\&=\boldsymbol{\Phi}(t-t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1)\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_1)\boldsymbol{x}(t_1).\end{aligned}$$

或

$$\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t-t_1)\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t_1-t)\boldsymbol{x}(t).$$

这说明系统状态转移具有可逆性, 状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 可由 $\boldsymbol{x}(t_1)$ 转移而来, $\boldsymbol{x}(t_1)$ 也可由 $\boldsymbol{x}(t)$ 转移而来.

**9. 可交换阵和的转移矩阵** (the Transition Matrix of the sum of Commutable Matrices)

若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是可交换阵 ($\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$), 则

$$\boldsymbol{\Phi}_{A+B}(t)=\boldsymbol{\Phi}_A(t)\boldsymbol{\Phi}_B(t)=\boldsymbol{\Phi}_B(t)\boldsymbol{\Phi}_A(t), \tag{4.2.10}$$

即 $\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$; 否则 $\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t}\neq\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t}\neq\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$. 这是因为矩阵指数 $\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t}$ 展开后包含了 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积项 (乘积项与次序有关),

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t}&=\boldsymbol{I}_n+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2t^2+\cdots\\&=\boldsymbol{I}_n+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2)t^2+\cdots\\\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t}&=\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots\right)\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{B}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{B}^2t^2+\cdots\right)\\&=\boldsymbol{I}_n+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2)t^2+\cdots\\\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t}-\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t}&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB})t^2+\cdots\end{aligned}$$

只有当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时, $\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t}-\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t}=\boldsymbol{0}$.

**10. 相似矩阵的转移矩阵** (the Transition Matrix of the Similarity Matrix)

如果存在非奇异相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$ (这称为相似变换), 那么就说 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是相似矩阵, 且有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_A(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}_B(t)\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\boldsymbol{P}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t}\boldsymbol{P}^{-1}.\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

事实上, 根据状态转移矩阵的定义有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_A(t)&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{PBP}^{-1}t}\\&=\boldsymbol{I}_n+(\boldsymbol{PBP}^{-1})t+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{PBP}^{-1})^2t^2+\frac{1}{3!}(\boldsymbol{PBP}^{-1})^3t^3+\cdots\\&=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{PBP}^{-1}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{PB}^2\boldsymbol{P}^{-1}t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{PB}^3\boldsymbol{P}^{-1}t^3+\cdots\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{B}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{B}^2t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{B}^3t^3 + \cdots\right)\boldsymbol{P}^{-1}$$
$$= \boldsymbol{P}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}_B(t)\boldsymbol{P}^{-1}.$$

进一步, 如果 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 可对角化, 其特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, $\boldsymbol{P}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量构成的可逆矩阵, 则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n] =: \boldsymbol{\Lambda},$$

或 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$ 和

$$\boldsymbol{\Phi}_\Lambda(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}t} = \mathrm{diag}[\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n t}], \tag{4.2.12}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_A(t) = \boldsymbol{P}\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\mathrm{diag}[\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n t}]\boldsymbol{P}^{-1}. \tag{4.2.13}$$

**11. 块对角阵的转移矩阵** (the Transition Matrix of Block Diagonal Matrix)

设 $\boldsymbol{A} = \mathrm{blockdiag}[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_m]$, 则有

$$\boldsymbol{\Phi}_A(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \mathrm{blockdiag}[\boldsymbol{\Phi}_{A_1}(t), \boldsymbol{\Phi}_{A_2}(t), \cdots, \boldsymbol{\Phi}_{A_m}(t)]$$
$$= \mathrm{blockdiag}[\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1 t}, \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_2 t}, \cdots, \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_m t}]. \tag{4.2.14}$$

这一性质很容易根据转移矩阵的级数定义加以证明.

### 4.2.3 状态转移矩阵的计算

**例 4.2.2** 假设 $\boldsymbol{\Phi}(t) := \boldsymbol{\Phi}_A(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 是 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ 的转移矩阵, 引入线性变换 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ ($\boldsymbol{T}$ 是可逆矩阵), 变换后的系统为

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}}(t)$$

或

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) = \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}(t), \quad \bar{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}, \tag{4.2.15}$$

则变换后系统的状态转移矩阵为

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{T}. \tag{4.2.16}$$

事实上, 根据状态转移矩阵的定义有

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t) := \boldsymbol{\Phi}_{\bar{A}}(t) = \mathrm{e}^{\bar{\boldsymbol{A}}t} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}t}$$
$$= \boldsymbol{I}_n + (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})t + \frac{1}{2!}(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^2t^2 + \frac{1}{3!}(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^3t^3 + \cdots$$
$$= \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{T}t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{T}t^3 + \cdots$$
$$= \boldsymbol{T}^{-1}\left(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3 + \cdots\right)\boldsymbol{T}$$
$$= \boldsymbol{T}^{-1}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{T}.$$

**例 4.2.3** 计算 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的转移矩阵.

**解** 计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 令

$$\det[s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A}]=\begin{vmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{vmatrix}=s^2+3s+2=(s+1)(s+2)=0,$$

所以 $s=\lambda_1=-1$, $s=\lambda_2=-2$. 两个特征值不相同, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 计算两个特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$. 令 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=\lambda_1\boldsymbol{p}_1$, 即

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}.$$

分解为两个方程

$$-3p_{11}-2p_{21}=-p_{11},\quad p_{11}=-p_{21}.$$

只有一个独立方程, 有无穷多解. 最简单取 $p_{21}=-1$, 有 $p_{11}=1$, 故

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

再令 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=\lambda_2\boldsymbol{p}_2$, 即

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}.$$

分解为两个方程

$$-3p_{12}-2p_{22}=-2p_{12},\quad p_{12}=-2p_{22}.$$

取 $p_{22}=-1$, 有 $p_{12}=2$, 故 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. 构造变换矩阵

$$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2]=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Lambda} &:= \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & \\ & -2 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{-1}, \\
\boldsymbol{\Phi}(t) &:= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{-1}t}=\boldsymbol{T}\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{T}^{-1} \\
&=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \\ & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 2\mathrm{e}^{-2t} \\ -\mathrm{e}^{-t} & -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化, 但总是可约当化, 且有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}^{-1}$, 其中 $\boldsymbol{J}$ 为约当矩阵, 定义如下

$$\boldsymbol{J}=\mathrm{blockdiag}[\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2,\cdots,\boldsymbol{J}_k]\in\mathbb{F}^{n\times n},$$

其中 $\boldsymbol{J}_i$ 是约当块. 令 $\boldsymbol{T}$ 是由广义特征向量构成的可逆变换矩阵, 因此有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t) &:= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}^{-1}t} \\ &= \boldsymbol{T}\mathrm{blockdiag}[\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}_1 t}, \mathrm{e}^{\boldsymbol{J}_2 t}, \cdots, \mathrm{e}^{\boldsymbol{J}_k t}]\boldsymbol{T}^{-1} \in \mathbb{F}^{n\times n}.\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

## 4.3 转移矩阵的计算方法

矩阵指数函数或状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 的计算是非常重要的. 尽管 MATLAB 提供了一个函数 expm 可以计算转移矩阵 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$, 但掌握一些基本方法计算一些简单矩阵和特殊矩阵的矩阵指数也是必要的. 下面讨论计算方阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的转移矩阵.

### 4.3.1 拉普拉斯变换公式

**1. 拉普拉斯变换的定义**

$F(s)$ 表示时域函数 $f(t)$ 的 **拉普拉斯变换** (Laplace Transform), 定义为

$$F(s) := \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,$$

其中 $f(t)$ 称为原函数, $F(s)$ 称为象函数, 是频域 $s = \sigma + \mathrm{j}\omega$ 上的函数, $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$.

设 $\delta(t)$ 代表单位脉冲函数, 定义为

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon\to\infty} \begin{cases} \dfrac{1}{\epsilon}, & 0 \leqslant t \leqslant \epsilon, \\ 0, & t > \epsilon. \end{cases}$$

它代表宽度为零, 高度为无穷大, 面积为 1 的一个冲击. $1(t)$ 代表单位阶跃函数, 定义为

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

**2. 一些典型函数的拉氏变换公式**

(1) $\mathscr{L}[\delta(t)] = \int_0^\infty \delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = 1.$

(2) $\mathscr{L}[\delta(t-\tau)] = \int_0^\infty \delta(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-s\tau}.$

(3) $\mathscr{L}[1(t)] = \int_0^\infty 1(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{s}.$

(4) $\mathscr{L}[t] = \int_0^\infty t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{s^2}.$

(5) $\mathscr{L}[t^2] = \int_0^\infty t^2\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \dfrac{2!}{s^3}.$

(6) $\mathscr{L}[t^n] = \int_0^\infty t^n\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \dfrac{n!}{s^{n+1}}.$

(7) $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-\sigma t}] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{s+\sigma}.$

(8) $\mathscr{L}[t\mathrm{e}^{-\sigma t}]=\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{(s+\sigma)^2}$.

(9) $\mathscr{L}[t^2\mathrm{e}^{-\sigma t}]=\int_0^\infty t^2\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{2!}{(s+\sigma)^3}$.

(10) $\mathscr{L}[t^n\mathrm{e}^{-\sigma t}]=\int_0^\infty t^n\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{n!}{(s+\sigma)^{n+1}}$.

(11) $\mathscr{L}[\sin(\omega t)]=\int_0^\infty \sin(\omega t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

(12) $\mathscr{L}[\cos(\omega t)]=\int_0^\infty \cos(\omega t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{s}{s^2+\omega^2}$.

(13) $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-\sigma t}\sin(\omega t)]=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma t}\sin(\omega t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$.

(14) $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-\sigma t}\cos(\omega t)]=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma t}\cos(\omega t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$.

**3. 拉普拉斯反变换的定义**

将象函数 $F(s)$ 变换成与之对应的原函数 $f(t)$ 的过程, 称之为拉普拉斯反变换. **拉普拉斯反变换** 或拉普拉斯逆变换 (Inverse Laplace Transform) 定义为

$$f(t):=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s,$$

式中 $c$ 是大于 $F(s)$ 所有极点实部的常数.

如果把 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 分成各个部分之和, 即

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)+\cdots+F_n(s).$$

若 $F_1(s)$, $F_2(s)$, $\cdots$, $F_n(s)$ 的拉氏变换很容易由拉氏变换表查得, 那么

$$\begin{aligned}f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]&=\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]+\mathscr{L}^{-1}[F_2(s)]+\cdots+\mathscr{L}^{-1}[F_n(s)]\\&=f_1(t)+f_2(t)+\cdots+f_n(t).\end{aligned}$$

当 $F(s)$ 不能简单地分解成各个部分之和时, 可采用部分分式法将 $F(s)$ 分解成各个部分之和, 然后对每一部分查拉氏变换表, 得到其对应的拉氏反变换函数, 其和就是 $F(s)$ 的拉氏反变换, 或者根据拉普拉斯反变换的定义利用留数法求原函数.

**4. 典型二阶系统输出响应**

典型二阶系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2},$$

其中 $\xi$ 为阻尼比, $\omega_n>0$ 为自然振荡频率.

脉冲输入时的系统输出响应为

$$\begin{aligned}g(t)&=\mathscr{L}^{-1}[G(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\right]\\&=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n)^2}\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\, \mathrm{e}^{-\xi\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t).$$

阶跃输入时的系统输出响应为

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}\right] \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+2\xi\omega_n}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\right] \\
&= 1 - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n)^2} - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\frac{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n)^2}\right] \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-\xi\omega_n t}\left[\cos(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t)\right] \\
&= 1 - \frac{\mathrm{e}^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t+\theta), \quad \theta = \arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}.
\end{aligned}$$

读者可验证: 阶跃响应的导数等于脉冲响应, 即 $y'(t) = g(t)$.

### 4.3.2 拉普拉斯反变换法

拉普拉斯反变换法求解矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转移矩阵公式如下:

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})^{-1}], \tag{4.3.1}$$

其中 $\mathscr{L}^{-1}$ 为拉普拉斯反变换.

**例 4.3.1** 计算二阶对角阵

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$$

的转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$.

**解** 由于

$$\begin{aligned}
s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{\Lambda} &= \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-\lambda_1 & 0 \\ 0 & s-\lambda_2 \end{pmatrix}, \\
(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{\Lambda})^{-1} &= \frac{\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{\Lambda}]}{\det[s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{\Lambda}]} = \frac{1}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}\begin{pmatrix} s-\lambda_2 & 0 \\ 0 & s-\lambda_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s-\lambda_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s-\lambda_2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

进行拉普拉斯反变换得到转移矩阵,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}(t) &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}t} = \mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{\Lambda})^{-1}] \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}.
\end{aligned}$$

**例 4.3.2** 计算二阶约当矩阵

$$\boldsymbol{J}_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$$

的转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$.

**解**　由于

$$s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{J}_2=\begin{pmatrix} s-\lambda & -1 \\ & s-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}(s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{J}_2)^{-1}&=\frac{\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{J}_2]}{\det[s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{J}_2]}=\frac{1}{(s-\lambda)^2}\begin{pmatrix} s-\lambda & 1 \\ & s-\lambda \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{s-\lambda} & \dfrac{1}{(s-\lambda)^2} \\ & \dfrac{1}{s-\lambda} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

进行拉普拉斯反变换得到转移矩阵,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t)&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}_2t}=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{J}_2)^{-1}]\\ &=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} & t\mathrm{e}^{\lambda t} \\ & \mathrm{e}^{\lambda t} \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{2\times 2}.\end{aligned}$$

**例 4.3.3**　计算三阶约当矩阵

$$\boldsymbol{J}_3=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{3\times 3}$$

的转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$.

**解**　由于

$$s\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{J}_3=\begin{pmatrix} s-\lambda & -1 & \\ & s-\lambda & -1 \\ & & s-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}(s\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{J}_3)^{-1}&=\frac{\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{J}_3]}{\det[s\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{J}_3]}=\frac{1}{(s-\lambda)^3}\begin{pmatrix} (s-\lambda)^2 & s-\lambda & 1 \\ & (s-\lambda)^2 & s-\lambda \\ & & (s-\lambda)^2 \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{s-\lambda} & \dfrac{1}{(s-\lambda)^2} & \dfrac{1}{(s-\lambda)^3} \\ & \dfrac{1}{s-\lambda} & \dfrac{1}{(s-\lambda)^2} \\ & & \dfrac{1}{s-\lambda} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

进行拉普拉斯反变换得到转移矩阵,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t)&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}_3t}=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{J}_3)^{-1}]\\ &=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} & t\mathrm{e}^{\lambda t} & \dfrac{t}{2!}\mathrm{e}^{\lambda t} \\ & \mathrm{e}^{\lambda t} & t\mathrm{e}^{\lambda t} \\ & & \mathrm{e}^{\lambda t} \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{3\times 3}.\end{aligned}$$

**例 4.3.4**　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -\sigma & -\omega \\ \omega & -\sigma \end{pmatrix},\quad \sigma,\ \omega\geqslant 0,$$

用拉普拉斯变换方法求解 $\boldsymbol{\Phi}(t)$.

**解**　由于

$$s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -\sigma & -\omega \\ \omega & -\sigma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s+\sigma & \omega \\ -\omega & s+\sigma \end{pmatrix},$$

$$(s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A}]}{\det[s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A}]}=\frac{1}{(s+\sigma)^2+\omega^2}\begin{pmatrix} s+\sigma & -\omega \\ \omega & s+\sigma \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \dfrac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega^2} & \dfrac{-\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2} \\ \dfrac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2} & \dfrac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega^2} \end{pmatrix}.$$

进行拉普拉斯反变换得到转移矩阵,

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}]$$
$$=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\sigma t}\cos(\omega t) & -\mathrm{e}^{-\sigma t}\sin(\omega t) \\ \mathrm{e}^{-\sigma t}\sin(\omega t) & \mathrm{e}^{-\sigma t}\cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

上面直接给出了利用拉普拉斯反变换计算转移矩阵的例子, 下面给出一个通用计算公式.

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵, 且其特征多项式为

$$\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n,$$

参见第 3 章思考题 24, 可知 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 的伴随矩阵为

$$\begin{aligned}\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]&=(s^{n-1}+a_1s^{n-2}+\cdots+a_{n-2}s+a_{n-1})\boldsymbol{I}\\&\quad+(s^{n-2}+a_1s^{n-3}+\cdots+a_{n-3}s+a_{n-2})\boldsymbol{A}+\cdots\\&\quad+(s^2+a_1s+a_2)\boldsymbol{A}^{n-3}+(s+a_1)\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^{n-1}\\&=\boldsymbol{A}^{n-1}+(s+a_1)\boldsymbol{A}^{n-2}+(s^2+a_1s+a_2)\boldsymbol{A}^{n-3}+\cdots\\&\quad+(s^{n-2}+a_1s^{n-3}+\cdots+a_{n-3}s+a_{n-2})\boldsymbol{A}\\&\quad+(s^{n-1}+a_1s^{n-2}+\cdots+a_{n-2}s+a_{n-1})\boldsymbol{I}.\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}&=\frac{\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]}{\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]}\\&=\frac{1}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\boldsymbol{A}^{n-1}\\&\quad+\frac{s+a_1}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\boldsymbol{A}^{n-2}\\&\quad+\frac{s^2+a_1s+a_2}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\boldsymbol{A}^{n-3}+\cdots\\&\quad+\frac{s^{n-2}+a_1s^{n-3}+\cdots+a_{n-3}s+a_{n-2}}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\boldsymbol{A}\\&\quad+\frac{s^{n-1}+a_1s^{n-2}+\cdots+a_{n-2}s+a_{n-1}}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\boldsymbol{I}.\end{aligned}$$

对上式进行拉普拉斯反变换可得转移矩阵. 可见这种方法对高维矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的计算极其复杂. 上式说明存在严格真有理函数 $\alpha_i(s)$ 使得下式成立 [读者可从上式找出 $\alpha_i(s)$],

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\alpha_0(s)\boldsymbol{I}+\alpha_1(s)\boldsymbol{A}+\alpha_2(s)\boldsymbol{A}^2+\cdots+\alpha_{n-1}(s)\boldsymbol{A}^{n-1}.$$

进行 Laplace 反变换得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t) &= \mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\\ &= \mathscr{L}^{-1}[\alpha_0(s)]\boldsymbol{I}+\mathscr{L}^{-1}[\alpha_1(s)]\boldsymbol{A}+\mathscr{L}^{-1}[\alpha_2(s)]\boldsymbol{A}^2+\cdots+\mathscr{L}^{-1}[\alpha_{n-1}(s)]\boldsymbol{A}^{n-1},\end{aligned}$$

或

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\alpha_0(t)\boldsymbol{I}+\alpha_1(t)\boldsymbol{A}+\alpha_2(t)\boldsymbol{A}^2+\cdots+\alpha_{n-1}(t)\boldsymbol{A}^{n-1}, \tag{4.3.2}$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha_i(t) &:= \mathscr{L}^{-1}[\alpha_i(s)],\\ \alpha_0(s) &:= \frac{s^{n-1}+a_1s^{n-2}+\cdots+a_{n-2}s+a_{n-1}}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\boldsymbol{I},\\ \alpha_1(s) &:= \frac{s^{n-2}+a_1s^{n-3}+\cdots+a_{n-3}s+a_{n-2}}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\boldsymbol{A},\\ &\ \vdots\\ \alpha_{n-3}(s) &:= \frac{s^2+a_1s+a_2}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\boldsymbol{A}^{n-3},\\ \alpha_{n-2}(s) &:= \frac{s+a_1}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\boldsymbol{A}^{n-2},\\ \alpha_{n-1}(s) &:= \frac{1}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\boldsymbol{A}^{n-1}.\end{aligned}$$

**例 4.3.5** 对于 $2\times 2$ 矩阵,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

把其特征多项式记为

$$\begin{aligned}\det[s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A}] &= \begin{pmatrix} s-1 & -2\\ -1 & s\end{pmatrix}\\ &= s^2-s-2=:s^2+a_1s+a_2.\end{aligned}$$

那么有

$$\begin{aligned}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} &= \frac{\operatorname{adj}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]}{\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]}=\frac{1}{s^2+a_1s+a_2}\boldsymbol{A}+\frac{s+a_1}{s^2+a_1s+a_2}\boldsymbol{I}_2\\ &= \frac{1}{s^2-s-2}\boldsymbol{A}+\frac{s-1}{s^2-s-2}\boldsymbol{I}_2=\frac{1}{(s+1)(s-2)}\boldsymbol{A}+\frac{s-1}{(s+1)(s-2)}\boldsymbol{I}_2\\ &= \left(\frac{-1/3}{s+1}+\frac{1/3}{s-2}\right)\boldsymbol{A}+\left(\frac{2/3}{s+1}+\frac{1/3}{s-2}\right)\boldsymbol{I}_2.\end{aligned}$$

进行 Laplace 反变换

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t) &= \mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\\ &= \left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t}\right)\boldsymbol{A}+\left(\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t}\right)\boldsymbol{I}_2\\ &= \left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t}\right)\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\left(\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{2t} & -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{2t} \\ -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t} & \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.
$$

### 4.3.3 级数展开方法

级数展开方法就是使用转移矩阵的定义式:

$$
\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^3 t^3}{3!} + \cdots \tag{4.3.3}
$$

**例 4.3.6** 计算二阶对角阵

$$
\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}[\lambda_1,\ \lambda_2]
$$

的转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$.

**解** 因为

$$
\boldsymbol{\Lambda}^k = \boldsymbol{\Lambda}^{k-1}\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}.
$$

于是有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}(t) &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^3 t^3}{3!} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} t + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \\ & \lambda_2^2 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!}\begin{pmatrix} \lambda_1^3 & \\ & \lambda_2^3 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{(\lambda_1 t)^2}{2!} + \frac{(\lambda_1 t)^3}{3!} + \cdots & \\ & 1 + \lambda_2 t + \frac{(\lambda_2 t)^2}{2!} + \frac{(\lambda_2 t)^3}{3!} + \cdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & \\ & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

由此类推, 如果 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$, 则有

$$
\boldsymbol{\Phi}_\Lambda(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}t} = \mathrm{diag}[\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n t}].
$$

**例 4.3.7** 设

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix},
$$

用级数展开方法求解 $\boldsymbol{\Phi}(t)$.

**解** 当 $b = a$ 时, 情形比较简单, 这里从略. 当 $a \neq b$ 时, 有

$$
\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & \frac{a^2 - b^2}{a - b} \\ 0 & b^2 \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a^2 & \frac{a^2 - b^2}{a - b} \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & a^2 + ab + b^2 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & \frac{a^3 - b^3}{a - b} \\ 0 & b^3 \end{pmatrix},
$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} a^3 & a^2+ab+b^2 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a^4 & a^3+a^2b+ab^2+b^3 \\ 0 & b^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & \dfrac{a^4-b^4}{a-b} \\ 0 & b^4 \end{pmatrix},$$
$$A^k = A^{k-1}A = \begin{pmatrix} a^k & \dfrac{a^k-b^k}{a-b} \\ 0 & b^k \end{pmatrix}.$$

因为

$$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b} = \frac{1-1}{a-b} + \frac{at-bt}{a-b} + \frac{t^2}{2!}\frac{a^2-b^2}{a-b} + \frac{t^3}{3!}\frac{a^3-b^3}{a-b} + \cdots$$
$$= t + \frac{t^2}{2!}\frac{a^2-b^2}{a-b} + \frac{t^3}{3!}\frac{a^3-b^3}{a-b} + \cdots$$

于是有

$$\Phi(t) = e^{At} = I_n + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}t + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} a^2 & \dfrac{a^2-b^2}{a-b} \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!}\begin{pmatrix} a^3 & \dfrac{a^3-b^3}{a-b} \\ 0 & b^3 \end{pmatrix} + \cdots$$
$$= \begin{pmatrix} 1+at+\dfrac{(at)^2}{2!}+\dfrac{(at)^3}{3!}+\cdots & t+\dfrac{t^2}{2!}\dfrac{a^2-b^2}{a-b}+\dfrac{(at)^3}{3!}\dfrac{a^3-b^3}{a-b}+\cdots \\ 0 & 1+bt+\dfrac{(bt)^2}{2!}+\dfrac{(bt)^3}{3!}+\cdots \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{at} & \dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b} \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix}.$$

当 $b=a$ 时,

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

的转移矩阵可以这样求解:

$$\lim_{b\to a}\Phi(t) = \lim_{b\to a}\begin{pmatrix} e^{at} & \dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b} \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at} & te^{at} \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}.$$

从这个例子可知, 当 $A$ 是对角阵时, 其对角线上元为系统的特征值, 这种方法才可行, 但也很复杂. 如果 $A$ 是非三角阵, 这种方法几乎不可行.

如果存在相似变换矩阵 $P$ 和矩阵 $\Lambda$ 使得 $A = P\Lambda P^{-1}$, 那么

$$\Phi(t) = Pe^{\Lambda t}P^{-1}.$$

如果 $A$ 可对角化, $P$ 是由 $A$ 的特征向量构成的可逆矩阵, $\Lambda$ 是由 $A$ 的特征值 $\lambda_i$ 构成的对角阵, 即 $\Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$, 那么有

$$\Phi(t) = P\mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}]P^{-1}.$$

**例 4.3.8** 计算下列矩阵的转移矩阵,

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

**解** 利用 Laplace 反变换求解:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t)&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}t}=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})^{-1}]\\&=\mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{pmatrix}s-\lambda & -1\\ 0 & s-\lambda\end{pmatrix}^{-1}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s-\lambda} & \dfrac{1}{(s-\lambda)^2}\\ 0 & \dfrac{1}{s-\lambda}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda t} & t\mathrm{e}^{\lambda t}\\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**例 4.3.9** 计算下列三阶约当矩阵的转移矩阵,

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}.$$

**解** 利用 Laplace 反变换求解:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t)&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}t}=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})^{-1}]\\&=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda t} & t\mathrm{e}^{\lambda t} & \dfrac{t^2}{2}\mathrm{e}^{\lambda t}\\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda t} & t\mathrm{e}^{\lambda t}\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

### 4.3.4 凯莱—哈密尔顿方法

**1. 特征值相异情形**

(因为该方法是根据凯莱–哈密尔顿引理推导出来的, 所以我们取这个名称)

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\alpha_0\boldsymbol{I}_n+\alpha_1\boldsymbol{A}+\alpha_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+\alpha_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1},$$

$\alpha_i$ 通过下面的方法确定. 用 $\boldsymbol{A}$ 的 **特征值** (Eigenvalue) $s_i$ 代替上式中的 $\boldsymbol{A}$ 可得

$$\mathrm{e}^{s_it}=\alpha_0+\alpha_1s_i+\alpha_2s_i^2+\cdots+\alpha_{n-1}s_i^{n-1}. \tag{4.3.4}$$

当 $s_i$ 互不相同时, 共有 $n$ 个独立方程, 不难求得

$$\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & s_1 & s_1^2 & \cdots & s_1^{n-1}\\ 1 & s_2 & s_2^2 & \cdots & s_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & s_n & s_n^2 & \cdots & s_n^{n-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{s_1t}\\ \mathrm{e}^{s_2t}\\ \vdots\\ \mathrm{e}^{s_nt}\end{pmatrix}.$$

**2. 有重特征值情形**

对于有重根情形, 假设第 1 个特征值 $s_1$ 为 $m$ 重, 其余的 $s_{m+1}, s_{m+2}, \cdots, s_n$ 都是互异特征值, 那么只有 $n-m+1$ 个独立方程:

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{s_1t}=\alpha_0+\alpha_1s_1+\alpha_2s_1^2+\cdots+\alpha_{n-1}s_1^{n-1},\\ \mathrm{e}^{s_it}=\alpha_0+\alpha_1s_i+\alpha_2s_i^2+\cdots+\alpha_{n-1}s_i^{n-1},\quad i=m+1,m+2,\cdots,n.\end{cases}$$

则上式第 1 个方程两边对 $s_1$ 求 $(m-1)$ 次导数, 可增加得到 $m-1$ 个方程,

$$\begin{cases} te^{s_1 t} &= \alpha_1 + 2\alpha_2 s_1 + 3\alpha_3 s_1^2 + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1} s_1^{n-2}, \\ t^2 e^{s_1 t} &= 2\alpha_2 + 3!\alpha_3 s_1 + 4\times 3\alpha_4 s_1^2 + \cdots + (n-1)(n-2)\alpha_{n-1} s_1^{n-3}, \\ t^3 e^{s_1 t} &= 3!\alpha_3 + 4!\alpha_3 s_1 + 5\times 4\times 3\alpha_4 s_1^2 + \cdots + (n-1)(n-2)(n-3)\alpha_{n-1} s_1^{n-4}, \\ &\vdots \\ t^{m-1} e^{s_1 t} &= (m-1)!\alpha_{m-1} + m!\alpha_{m-1} s_1 + \cdots + (n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)\alpha_{n-1} s_1^{n-m}. \end{cases}$$

这样仍是 $n$ 个方程, 故可解出 $\alpha_i,\ i=0,1,\cdots,n-1$. 再把 $\alpha_i$ 代入 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的表达式中, 可求得转移矩阵, 从而求得 $e^{\boldsymbol{A}t}$.

### 4.3.5 用 MATLAB 函数计算转移矩阵

状态方程的求解可归结为计算状态转移矩阵, 即转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}$. 对于给定矩阵 $\boldsymbol{A}$, MATLAB 将提供了一个函数 expm 可以计算 $e^{\boldsymbol{A}t}$. 例如, 计算矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的转移矩阵的 **MATLAB 命令** 为

```
1  >> t=sym('t');
2  >> A=[-3, -2; 1, 0]
3
4  A =
5        -3     -2
6         1      0
7
8  >> expm(A*t)
9
10 ans =
11 [      2*exp(-2*t)-exp(-t), -2*exp(-t)+2*exp(-2*t)]
12 [         exp(-t)-exp(-2*t),     -exp(-2*t)+2*exp(-t)]
```

这与例 4.1.3 的结果一样.

## 4.4 特殊矩阵的转移矩阵计算

本节讨论一些特殊矩阵的转移矩阵计算问题, 可参见 *Applied Mathematics and Computation* 上的论文 "Computation of matrix exponentials of special matrices (特殊矩阵矩阵指数的计算)" [26].

### 4.4.1 基本函数级数公式

计算特殊矩阵的转移矩阵, 需要掌握下列 **级数公式**.

**1. 指数级数**

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \frac{1}{5!}t^5 + \cdots$$

$$\mathrm{e}^{-t}=1-t+\frac{1}{2!}t^2-\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{5!}t^5+\cdots$$

**2. 双曲级数**

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(t):=\cosh(t)&=\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}=1+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4+\frac{1}{6!}t^6+\cdots\\ \mathrm{sh}(t):=\sinh(t)&=\frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}=t+\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{5!}t^5+\frac{1}{7!}t^7+\cdots\end{aligned}$$

**3. 三角级数**

令 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$, 由

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}=\cos(t)+\mathrm{j}\sin(t)=1+\mathrm{j}t-\frac{1}{2!}t^2-\mathrm{j}\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{4!}t^4+\mathrm{j}\frac{1}{5!}t^5+\cdots$$

比较实部和虚部可得三角级数:

$$\begin{aligned}\cos(t)&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}}{2}=1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{6!}t^6+\cdots\\ \sin(t)&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}}{\mathrm{j}2}=t-\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{5!}t^5-\frac{1}{7!}t^7+\cdots\end{aligned}$$

**4. 双曲函数与三角函数关系**

下列关系式成立:

$$\mathrm{ch}(t)=\cos(\mathrm{j}t),\quad \mathrm{sh}(t)=\mathrm{j}\sin(\mathrm{j}t),\quad \cos(t)=\mathrm{ch}(\mathrm{j}t),\quad \sin(t)=\mathrm{j}\mathrm{sh}(\mathrm{j}t).$$

### 4.4.2 基本矩阵的转移矩阵

下面计算一些特殊矩阵的转移矩阵.

**1. 单位阵** (Identity Matrix)

$n$ 阶单位阵 $\boldsymbol{I}_n$ 的转移矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp(\boldsymbol{I}_nt)&=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{I}_nt+\frac{1}{2!}\boldsymbol{I}_n^2t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{I}_n^3t^3+\cdots\\ &=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{I}_nt+\frac{1}{2!}\boldsymbol{I}_nt^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{I}_nt^3+\cdots\\ &=\left(1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3+\cdots\right)\boldsymbol{I}_n=\mathrm{e}^t\boldsymbol{I}_n.\end{aligned}\tag{4.4.1}$$

**2. 斜单位阵** (Anti-Identity Matrix)

斜单位阵有时称为交换阵 (Exchange Matrix). 斜单位阵用 $\bar{\boldsymbol{I}}$ 表示. 定义 $n$ 阶斜单位阵:

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{I}}_n&:=\mathrm{adiag}[1,1,\cdots,1]\\ &=\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & 1 & \\ & \cdot & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}.\end{aligned}$$

由于

$$\bar{\boldsymbol{I}}_n^{2i}=\boldsymbol{I}_n,\quad \bar{\boldsymbol{I}}_n^{2i-1}=\bar{\boldsymbol{I}}_n,\ i=1,2,3,\cdots$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t) &= \exp(\bar{\boldsymbol{I}}_n t) = \boldsymbol{I}_n + \bar{\boldsymbol{I}}_n t + \frac{1}{2!}\bar{\boldsymbol{I}}_n^2 t^2 + \frac{1}{3!}\bar{\boldsymbol{I}}_n^3 t^3 + \frac{1}{4!}\bar{\boldsymbol{I}}_n^4 t^4 + \cdots \\ &= \boldsymbol{I}_n + \bar{\boldsymbol{I}}_n t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{I}_n t^2 + \frac{1}{3!}\bar{\boldsymbol{I}}_n t^3 + \frac{1}{4!}\boldsymbol{I}_n t^4 + \cdots \\ &= \left(\boldsymbol{I}_n + \frac{1}{2!}\boldsymbol{I}_n t^2 + \frac{1}{4!}\boldsymbol{I}_n t^4 + \cdots\right) + \left(\bar{\boldsymbol{I}}_n t + \frac{1}{3!}\bar{\boldsymbol{I}}_n t^3 + \frac{1}{5!}\bar{\boldsymbol{I}}_n t^5 + \cdots\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \cdots\right)\boldsymbol{I}_n + \left(t + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \cdots\right)\bar{\boldsymbol{I}}_n \\ &= \mathrm{ch}(t)\boldsymbol{I}_n + \mathrm{sh}(t)\bar{\boldsymbol{I}}_n \\ &= \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\boldsymbol{I}_n + \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\bar{\boldsymbol{I}}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}.\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

**3. 对角阵** (Diagonal Matrix)

对角阵定义为

$$\boldsymbol{\Lambda} := \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n] \in \mathbb{F}^{n\times n}.$$

由于

$$\boldsymbol{\Lambda}^i = \mathrm{diag}[\lambda_1^i, \lambda_2^i, \cdots, \lambda_n^i] \in \mathbb{F}^{n\times n},\ i = 1, 2, 3, \cdots$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t) &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}t} = \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{\Lambda}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{\Lambda}^2 t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{\Lambda}^3 t^3 + \cdots \\ &= \mathrm{diag}[\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n t}] \in \mathbb{F}^{n\times n}.\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

**4. 斜对角阵** (Anti-Diagonal Matrix)

斜对角阵用 $\bar{\boldsymbol{\Lambda}}$ 表示, $n$ 阶斜对角阵的定义如下

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\Lambda}} &:= \mathrm{adiag}[a_1, a_2, \cdots, a_n] \\ &= \begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \cdot & & \\ a_n & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n},\ a_i a_{n-i+1} = d^2.\end{aligned}$$

由于

$$\bar{\boldsymbol{\Lambda}}^{2i} = \begin{pmatrix} (a_1 a_n)^i & & & \\ & (a_2 a_{n-1})^i & & \\ & & \ddots & \\ & & & (a_n a_1)^i \end{pmatrix} = d^{2i}\boldsymbol{I}_n, \quad \bar{\boldsymbol{\Lambda}}^{2i-1} = d^{2i-2}\bar{\boldsymbol{\Lambda}},\ i = 1, 2, 3, \cdots$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t) &= \mathrm{e}^{\bar{\boldsymbol{\Lambda}}t} = \boldsymbol{I}_n + \bar{\boldsymbol{\Lambda}}t + \frac{1}{2!}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}^2 t^2 + \frac{1}{3!}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}^3 t^3 + \frac{1}{4!}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}^4 t^4 + \cdots \\ &= \left(\boldsymbol{I}_n + \frac{1}{2!}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}^2 t^2 + \frac{1}{4!}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}^4 t^4 + \cdots\right) + t\left(\boldsymbol{I}_n + \frac{1}{3!}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}^2 t^2 + \frac{1}{5!}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}^4 t^4 + \cdots\right)\bar{\boldsymbol{\Lambda}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2!}d^2 t^2 + \frac{1}{4!}d^4 t^4 + \cdots\right)\boldsymbol{I}_n + t\left(1 + \frac{1}{3!}d^2 t^2 + \frac{1}{5!}d^4 t^4 + \cdots\right)\bar{\boldsymbol{\Lambda}} \\ &= \mathrm{ch}(dt)\boldsymbol{I}_n + \mathrm{sh}(dt)\bar{\boldsymbol{\Lambda}}/d \in \mathbb{F}^{n\times n}.\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

**5. 约当矩阵** (Jordan Matrix)

先计算一个三阶约当矩阵

$$J_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times 3}$$

的转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$. $J_3$ 的各次幂如下,

$$J_3^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ & \lambda^2 & 2\lambda \\ & & \lambda^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times 3},$$

$$J_3^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ & & \lambda^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times 3},$$

$$J_3^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \dfrac{k(k-1)}{2!}\lambda^{k-2} \\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ & & \lambda^k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times 3}.$$

所以

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}(t) = \exp(J_3 t) &= I_3 + J_3 t + \frac{1}{2!}J_3^2 t^2 + \frac{1}{3!}J_3^3 t^3 + \frac{1}{4!}J_3^4 t^4 + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} & t\mathrm{e}^{\lambda t} & \dfrac{t^2}{2!}\mathrm{e}^{\lambda t} \\ & \mathrm{e}^{\lambda t} & t\mathrm{e}^{\lambda t} \\ & & \mathrm{e}^{\lambda t} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}. \end{aligned}$$

对于 $n$ 阶约当 (Jordan) 矩阵

$$J_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n},$$

其各次幂如下,

$$J_n^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & & \\ & \lambda^2 & 2\lambda & \ddots & \\ & & \lambda^2 & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 2\lambda \\ & & & & \lambda^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n},$$

$$J_n^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 & & \\ & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & \ddots & \\ & & \lambda^3 & 3\lambda^2 & \ddots & 1 \\ & & & \lambda^3 & \ddots & 3\lambda \\ & & & & \ddots & 3\lambda^2 \\ & & & & & \lambda^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n},$$

$$\boldsymbol{J}_n^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2!}\lambda^{k-2} & \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\lambda^{k-3} & \cdots & \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!}\lambda^{k-n+1}\\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2!}\lambda^{k-2} & & \vdots\\ & & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \ddots & \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\lambda^{k-3}\\ & & & \ddots & \ddots & \frac{k(k-1)}{2!}\lambda^{k-2}\\ & & & & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ & & & & & \lambda^k\end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t)&=\exp(\boldsymbol{J}_n t)=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{J}_n t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{J}_n^2t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{J}_n^3t^3+\frac{1}{4!}\boldsymbol{J}_n^4t^4+\cdots\\ &=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda t} & t\mathrm{e}^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}\mathrm{e}^{\lambda t} & \frac{t^3}{3!}\mathrm{e}^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{\lambda t}\\ & \mathrm{e}^{\lambda t} & t\mathrm{e}^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}\mathrm{e}^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\mathrm{e}^{\lambda t}\\ & & \mathrm{e}^{\lambda t} & t\mathrm{e}^{\lambda t} & & \vdots\\ & & & \mathrm{e}^{\lambda t} & \ddots & \frac{t^2}{2!}\mathrm{e}^{\lambda t}\\ & & & & \ddots & t\mathrm{e}^{\lambda t}\\ & & & & & \mathrm{e}^{\lambda t}\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{n\times n}.\end{aligned}\tag{4.4.5}$$

**6. 斜块单位阵** (Anti-Block Identity Matrix)

一个 $(2n)\times(2n)$ 斜块单位阵定义为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{I}_n & \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(2n)\times(2n)}.$$

由于 $\boldsymbol{A}^{2i}=\boldsymbol{I}_{2n},\quad \boldsymbol{A}^{2i+1}=\boldsymbol{A}$, 正负斜单位阵的转移矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t)&:=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}_{2n}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4+\cdots\\ &=\left(\boldsymbol{I}_{2n}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4+\cdots\right)+\left(\boldsymbol{A}t+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\frac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5t^5+\cdots\right)\\ &=\left(\boldsymbol{I}_{2n}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{I}_{2n}t^2+\frac{1}{4!}\boldsymbol{I}_{2n}t^4+\cdots\right)+\left(\boldsymbol{A}t+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}t^3+\frac{1}{5!}\boldsymbol{A}t^5+\cdots\right)\\ &=\cosh(t)\boldsymbol{I}_{2n}+\sinh(t)\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{(2n)\times(2n)}.\end{aligned}$$

这个结果可以推广到下列斜块单位阵:

$\boldsymbol{A}=\mathrm{adiag}[\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{I}_n,\cdots,\boldsymbol{I}_n]\in\mathbb{R}^{(kn)\times(kn)}$.

**7. 斜正负块单位阵** (Positive Negative Block Anti-Identity Matrix)

一个 $(2n)\times(2n)$ 正负斜块单位阵定义为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_n\\ -\boldsymbol{I}_n & \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(2n)\times(2n)}.$$

由于 $\boldsymbol{A}^2=-\boldsymbol{I}_{2n}$, $\boldsymbol{A}^3=-\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{I}_{2n}$, $\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^6=-\boldsymbol{I}_{2n}$, $\boldsymbol{A}^7=-\boldsymbol{A}$, $\cdots$, 斜正负块单位阵的转移矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t) &:= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}_{2n}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4+\cdots\\ &=\left(\boldsymbol{I}_{2n}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4+\cdots\right)+\left(\boldsymbol{A}t+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\frac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5t^5+\cdots\right)\\ &=\left(\boldsymbol{I}_{2n}-\frac{1}{2!}\boldsymbol{I}_{2n}t^2+\frac{1}{4!}\boldsymbol{I}_{2n}t^4-\cdots\right)+\left(\boldsymbol{A}t-\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}t^3+\frac{1}{5!}\boldsymbol{A}t^5-\cdots\right)\\ &=\cos(t)\boldsymbol{I}_{2n}+\sin(t)\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{(2n)\times(2n)}.\end{aligned}$$

这个结果可以推广到下列斜正负块单位阵:

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{adiag}[\boldsymbol{I}_n,-\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{I}_n,-\boldsymbol{I}_n,\cdots,\boldsymbol{I}_n,-\boldsymbol{I}_n]\in\mathbb{R}^{(2kn)\times(2kn)}.$$

**8. 正负交错单位阵** (Positive Negative Alternating Identity Matrix)

正负交错单位阵定义为

$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}[1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1}]$.

其转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\mathrm{diag}[\mathrm{e}^t,\mathrm{e}^{-t},\mathrm{e}^t,\mathrm{e}^{-t},\cdots,\mathrm{e}^{(-1)^{n-1}t}]\in\mathbb{R}^{n\times n}. \tag{4.4.6}$$

**9. 正负交错斜单位阵** (Positive Negative Alternating Anti-Identity Matrix)

正负交错斜单位阵定义为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\mathrm{adiag}[1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1}]\\ &=\begin{pmatrix} & & & & 1\\ & & & -1 & \\ & & 1 & & \\ & -1 & & & \\ & \cdot & & & \\ (-1)^{n-1} & & & & \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{A}^2=-\boldsymbol{I}_n$, $\boldsymbol{A}^3=-\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{I}_n$, $\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^6=-\boldsymbol{I}_n$, $\boldsymbol{A}^7=-\boldsymbol{A}$, $\cdots$, 正负交错斜单位阵的转移矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t) &:= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4+\cdots\\ &=\left(\boldsymbol{I}_n+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4+\cdots\right)+\left(\boldsymbol{A}t+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\frac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5t^5+\cdots\right)\\ &=\left(\boldsymbol{I}_n-\frac{1}{2!}\boldsymbol{I}_nt^2+\frac{1}{4!}\boldsymbol{I}_nt^4-\cdots\right)+\left(\boldsymbol{A}t-\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}t^3+\frac{1}{5!}\boldsymbol{A}t^5-\cdots\right)\\ &=\cos(t)\boldsymbol{I}_n+\sin(t)\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}.\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

**10. 双对角单位阵** (Dual-Diagonal Identity Matrix)

双对角单位阵定义为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 1 \\ & 1 & & & & 1 & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & & & 1 & \\ 1 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

当 $n$ 为偶数时, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n + \bar{\boldsymbol{I}}_n$. 因为 $\boldsymbol{I}_n$ 与 $\bar{\boldsymbol{I}}_n$ 是可交换阵, 根据 **可交换阵和的转移矩阵** 性质 (4.2.10), 利用式 (4.4.1)、式 (4.4.2), 我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_A(t) &:= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \exp(\boldsymbol{I}_n t + \bar{\boldsymbol{I}}_n t) = \exp(\boldsymbol{I}_n t)\exp(\bar{\boldsymbol{I}}_n t) \\ &= \mathrm{e}^t \boldsymbol{I}_n \left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\boldsymbol{I}_n + \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\bar{\boldsymbol{I}}_n\right) = \frac{\mathrm{e}^{2t}+1}{2}\boldsymbol{I}_n + \frac{\mathrm{e}^{2t}-1}{2}\bar{\boldsymbol{I}}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}.\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

当 $n = 2k+1$ 为奇数时, $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}[\boldsymbol{I}_k, 0, \boldsymbol{I}_k] + \bar{\boldsymbol{I}}_{2k+1}$. 因为 $[\boldsymbol{I}_k, 0, \boldsymbol{I}_k]$ 与 $\bar{\boldsymbol{I}}_{2k+1}$ 是可交换阵, 根据 **可交换阵和的转移矩阵** 性质 (4.2.10), 利用式 (4.4.1)、式 (4.4.2) 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_A(t) &:= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \exp(\mathrm{diag}[\boldsymbol{I}_k, 0, \boldsymbol{I}_k]t + \bar{\boldsymbol{I}}_{2k+1}t) = \exp(\mathrm{diag}[\boldsymbol{I}_k, 0, \boldsymbol{I}_k]t)\exp(\bar{\boldsymbol{I}}_{2k+1}t) \\ &= \mathrm{diag}[\mathrm{e}^t\boldsymbol{I}_k, 1, \mathrm{e}^t\boldsymbol{I}_k]\left(\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}\boldsymbol{I}_{2k+1} + \frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}\bar{\boldsymbol{I}}_{2k+1}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t\boldsymbol{I}_k & & \\ & 1 & \\ & & \mathrm{e}^t\boldsymbol{I}_k \end{pmatrix}\left(\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}\boldsymbol{I}_n + \frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}\begin{pmatrix} & & \bar{\boldsymbol{I}}_k \\ & 1 & \\ \bar{\boldsymbol{I}}_k & & \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{e}^{2t}+1}{2}\boldsymbol{I}_k & & \\ & \frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2} & \\ & & \frac{\mathrm{e}^{2t}+1}{2}\boldsymbol{I}_k \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}\begin{pmatrix} & & \mathrm{e}^t\bar{\boldsymbol{I}}_k \\ & 1 & \\ \mathrm{e}^t\bar{\boldsymbol{I}}_k & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{e}^{2t}+1}{2}\boldsymbol{I}_k & & \\ & \frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2} & \\ & & \frac{\mathrm{e}^{2t}+1}{2}\boldsymbol{I}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & \frac{\mathrm{e}^{2t}-1}{2}\bar{\boldsymbol{I}}_k \\ & \frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2} & \\ \frac{\mathrm{e}^{2t}-1}{2}\bar{\boldsymbol{I}}_k & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{e}^{2t}+1}{2}\boldsymbol{I}_k & 0 & \frac{\mathrm{e}^{2t}-1}{2}\bar{\boldsymbol{I}}_k \\ 0 & \mathrm{e}^t & 0 \\ \frac{\mathrm{e}^{2t}-1}{2}\bar{\boldsymbol{I}}_k & 0 & \frac{\mathrm{e}^{2t}+1}{2}\boldsymbol{I}_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

可推广到 **双对角块单位阵** (Dual-Diagonal Block Identity Matrix)

$$A = \begin{pmatrix} I_p & & & & & I_p \\ & I_p & & & I_p & \\ & & I_p & I_p & & \\ & & & \cdot & & \\ & & I_p & I_p & & \\ & I_p & & & I_p & \\ I_p & & & & & I_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(np)\times(np)}.$$

**11．块单位阵** (Block Identity Matrix)

由单位阵构成的块单位阵如下，

$$A = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n)\times(2n)}.$$

因为

$$A^2 = 2A, \quad A^3 = 2^2 A, \quad A^4 = 2^3 A, \quad A^k = 2^{k-1} A,\ k = 2, 3, \cdots$$

块单位阵的转移矩阵为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}(t) := \mathrm{e}^{At} &= I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{4!}A^4t^4 + \cdots \\
&= I_{2n} + At + \frac{1}{2!}2At^2 + \frac{1}{3!}2^2At^3 + \frac{1}{4!}2^3At^4 + \cdots \\
&= I_{2n} + \left(t + \frac{1}{2!}2t^2 + \frac{1}{3!}2^2t^3 + \frac{1}{4!}2^3t^4 + \cdots\right)A \\
&= I_{2n} + \frac{1}{2}\left(2t + \frac{1}{2!}(2t)^2 + \frac{1}{3!}(2t)^3 + \frac{1}{4!}(2t)^4 + \cdots\right)A \\
&= I_{2n} + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t} - 1)A \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{e}^{2t}+1}{2}I_n & \dfrac{\mathrm{e}^{2t}-1}{2}I_n \\ \dfrac{\mathrm{e}^{2t}-1}{2}I_n & \dfrac{\mathrm{e}^{2t}+1}{2}I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n)\times(2n)}.
\end{aligned}$$

可进一步推广到

$$A = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n)\times(2n)}.$$

$$A = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n)\times(2n)}.$$

$$A = \begin{pmatrix} I_n & I_n & \cdots & I_n \\ I_n & I_n & \cdots & I_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I_n & I_n & \cdots & I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(kn)\times(kn)}.$$

$$A = \begin{pmatrix} -I_n & I_n & \cdots & I_n \\ I_n & -I_n & \cdots & I_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I_n & I_n & \cdots & -I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(kn)\times(kn)}.$$

**12. 壹矩阵** (Unity Matrix)

元全为 1 的矩阵简称为壹矩阵, 定义如下,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

因为

$$\boldsymbol{A}^2=n\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^3=n^2\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^4=n^3\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^k=n^{k-1}\boldsymbol{A},\ k=2,3,\cdots$$

壹矩阵的转移矩阵为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}(t):=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4+\cdots\\
&=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}n\boldsymbol{A}t^2+\frac{1}{3!}n^2\boldsymbol{A}t^3+\frac{1}{4!}n^3\boldsymbol{A}t^4+\cdots\\
&=\boldsymbol{I}_n+\left(t+\frac{1}{2!}nt^2+\frac{1}{3!}n^2t^3+\frac{1}{4!}n^3t^4+\cdots\right)\boldsymbol{A}\\
&=\boldsymbol{I}_n+\frac{1}{n}\left(nt+\frac{1}{2!}(nt)^2+\frac{1}{3!}(nt)^3+\frac{1}{4!}(nt)^4+\cdots\right)\boldsymbol{A}\\
&=\boldsymbol{I}_n+\frac{1}{n}(\mathrm{e}^{nt}-1)\boldsymbol{A}\\
&=\begin{pmatrix}
\dfrac{\mathrm{e}^{nt}+n-1}{n} & \dfrac{\mathrm{e}^{nt}-1}{n} & \dfrac{\mathrm{e}^{nt}-1}{n} & \cdots & \dfrac{\mathrm{e}^{nt}-1}{n}\\
\dfrac{\mathrm{e}^{nt}-1}{n} & \dfrac{\mathrm{e}^{nt}+n-1}{n} & \dfrac{\mathrm{e}^{nt}-1}{n} & \cdots & \dfrac{\mathrm{e}^{nt}-1}{n}\\
\dfrac{\mathrm{e}^{nt}-1}{n} & \dfrac{\mathrm{e}^{nt}-1}{n} & \dfrac{\mathrm{e}^{nt}+n-1}{n} & \cdots & \vdots\\
\vdots & \vdots & & \cdots & \dfrac{\mathrm{e}^{nt}-1}{n}\\
\dfrac{\mathrm{e}^{nt}-1}{n} & \dfrac{\mathrm{e}^{nt}-1}{n} & \cdots & \dfrac{\mathrm{e}^{nt}-1}{n} & \dfrac{\mathrm{e}^{nt}+n-1}{n}
\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}.
\end{aligned}$$

### 4.4.3　关系矩阵的转移矩阵

**1. 平方单位阵** (Square Identity Matrix)

幂方单位阵定义为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$. 由此可得 $\boldsymbol{A}^{2k-1}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^{2k}=\boldsymbol{I}$, $k=1,2,\cdots$. 幂方单位阵的转移矩阵为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}(t):=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4+\cdots\\
&=\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4+\cdots\right)+\left(\boldsymbol{A}t+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\frac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5t^5+\cdots\right)\\
&=\left(1+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4+\cdots\right)\boldsymbol{I}+\left(t+\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{5!}t^5+\cdots\right)\boldsymbol{A}\\
&=\mathrm{ch}(t)\boldsymbol{I}+\mathrm{sh}(t)\boldsymbol{A}.
\end{aligned}\tag{4.4.10}$$

**2. 平方反单位阵** (Square Anti-Identity Matrix)

幂方反单位阵定义为 $\boldsymbol{A}^2=-\boldsymbol{I}$. 由此可得 $\boldsymbol{A}^3=-\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^6=-\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}^7=-\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^8=\boldsymbol{I}$, $\cdots$, 幂方反单位阵的转移矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t):=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4+\cdots\\&=\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4+\cdots\right)+\left(\boldsymbol{A}t+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\frac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5t^5+\cdots\right)\\&=\left(1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{6!}t^6+\cdots\right)\boldsymbol{I}+\left(t-\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{5!}t^5-\frac{1}{7!}t^7+\cdots\right)\boldsymbol{A}\\&=\cos(t)\boldsymbol{I}+\sin(t)\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

**3. 幂等矩阵** (Idempotent Matrix)

幂等矩阵定义为 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}$, $k=1,2,\cdots$. 幂等矩阵的转移矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t):=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4+\cdots\\&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}t^3+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}t^4+\cdots\\&=\boldsymbol{I}+\left(t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{4!}t^4+\cdots\right)\boldsymbol{A}\\&=\boldsymbol{I}+(\mathrm{e}^t-1)\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是幂等矩阵.

**4. 幂等反矩阵** (Anti-Idempotent Matrix)

幂等反矩阵定义为 $\boldsymbol{A}^k=(-1)^{k-1}\boldsymbol{A}$, $k=1,2,\cdots$. 幂等反矩阵的转移矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t):=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4+\cdots\\&=\boldsymbol{I}+\left(\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4+\cdots\right)+\left(\boldsymbol{A}t+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\frac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5t^5+\cdots\right)\\&=\boldsymbol{I}+\left(-\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}t^2-\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}t^4-\cdots\right)+\left(\boldsymbol{A}t+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}t^3+\frac{1}{5!}\boldsymbol{A}t^5+\cdots\right)\\&=\boldsymbol{I}+\left(-\frac{1}{2!}t^2-\frac{1}{4!}t^4-\cdots\right)\boldsymbol{A}+\left(t+\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{5!}t^5+\cdots\right)\boldsymbol{A}\\&=\boldsymbol{I}+[1-\cosh(t)]\boldsymbol{A}+\sinh(t)\boldsymbol{A}\\&=\boldsymbol{I}+\left(1-\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}+\frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}\right)\boldsymbol{A}\\&=\boldsymbol{I}+(1-\mathrm{e}^{-t})\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

**5. 公平矩阵** (Equitable Matrix or Fair Matrix)

若矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为公平矩阵, 则它满足

$$\boldsymbol{A}^2=n\boldsymbol{A},\ n=1,2,\cdots$$

公平矩阵的转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t):=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4+\cdots$$

$$= \boldsymbol{I}_n + \frac{1}{n}(\mathrm{e}^{nt}-1)\boldsymbol{A}.$$

2 阶和 3 阶的公平矩阵有下列结构,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1/a & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & ab \\ 1/a & 1 & b \\ 1/ab & 1/b & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

公平矩阵可以表示为

$$\boldsymbol{A} = [\mathrm{e}^{\lambda_i - \lambda_j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

**6. 幂零矩阵** (Nilpotent Matrix)

如果存在一个整数 $k$, 使得 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{0}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 **幂零矩阵**. 由此可知

$$\boldsymbol{A}^{k+1} = \boldsymbol{A}^{k+2} = \cdots = \boldsymbol{0},$$

幂零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t) := \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}\boldsymbol{A}^{k-1}t^{k-1}.$$

**7. 严格三角阵** (Strictly Triangular Matrix)

对角元都为零的三角阵称为 **严格三角阵**. 严格三角阵包括严格上三角阵和严格下三角阵. 一个严格三角阵是一个幂零矩阵. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 严格三角阵, 那么它的 $n$ 次幂为零矩阵, 即 $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{0}$.

严格上三角阵

$$\boldsymbol{U}_n = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

的 **转移矩阵** 可表示为

$$\boldsymbol{\Phi}_{U_n}(t) := \exp(\boldsymbol{U}_n t) = \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{U}_n t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{U}_n^2 t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{U}_n^3 t^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\boldsymbol{U}_n^{n-1} t^{n-1}. \quad (4.4.11)$$

它也是一个严格上三角阵. 严格下三角阵的情形也是类似的.

**例 4.4.1** 4 阶上次对角元都为 1 的上三角阵

$$\boldsymbol{U}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

满足

$$U_4^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_4^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_4^4 = U_4^5 = \cdots = \mathbf{0}.$$

$U_4$ 的转移矩阵为

$$\begin{aligned}\Phi(t) = \mathrm{e}^{U_4 t} &= I_4 + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{4!}A^4t^4 + \cdots \\ &= I_4 + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2!} & \dfrac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \dfrac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

## 4.5 线性时变状态空间系统的解

非线性时不变状态空间系统和非线性时变状态空间系统的求解是十分困难的. 线性时变状态空间系统的求解方法有一些文献可借鉴, 这里只讨论一类时变线性变换求解方法.

### 4.5.1 线性时变系统的解

假设线性时变 $n \times n$ 矩阵微分方程,

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \quad X(t_0) = I,$$

有唯一、连续可微解:

$$X(t) = \Phi_A(t, t_0),$$

其中 $\Phi_A(t, t_0)$ 是矩阵 $A(t)$ 的转移矩阵. 当初始条件不是单位阵, 而是 $X(t_0) = X_0$ 时, 容易推导解为

$$X(t) = \Phi_A(t, t_0)X_0.$$

对线性时变系统

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

也有类似的结论. 参照式 (4.1.9) 线性时变系统转移矩阵的定义, $n \times n$ 矩阵 $A(t)$ 的转移矩阵 $\Phi(t, \tau)$ 具有下列性质.

(1) $\Phi^{-1}(t, \tau) = \Phi(\tau, t)$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t, \tau) = A(t)\Phi(t, \tau) = \Phi(t, \tau)A(t)$.

(3) $\Phi(t, \tau) = \Phi(t, t_0)\Phi(t_0, \tau)$.

(4) $\det[\Phi(t, \tau)] = \exp\left(\displaystyle\int_\tau^t \mathrm{tr}[A(t)]\mathrm{d}t\right)$.

### 4.5.2 时变线性变换

考虑线性时变系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0, \tag{4.5.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ 为状态向量, $\boldsymbol{A}(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

引入一个新的状态向量 $\boldsymbol{\xi}(t)\in\mathbb{R}^n$ 和可逆时变变换矩阵 $\boldsymbol{P}(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 令

$$\boldsymbol{\xi}(t)=\boldsymbol{P}^{-1}(t)\boldsymbol{x}(t),$$

或

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{\xi}(t),$$

式中 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{P}(t)$ 对任意 $t$ 都连续可微. 对 $t$ 微分得到

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{P}(t)\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)+\dot{\boldsymbol{P}}(t)\boldsymbol{\xi}(t).$$

求解得到

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=\boldsymbol{P}^{-1}(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{P}^{-1}(t)\dot{\boldsymbol{P}}(t)\boldsymbol{\xi}(t).$$

将原始的状态方程 (4.5.1) 代入得到

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)&=\boldsymbol{P}^{-1}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{P}^{-1}(t)\dot{\boldsymbol{P}}(t)\boldsymbol{\xi}(t)\\&=\boldsymbol{P}^{-1}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{\xi}(t)-\boldsymbol{P}^{-1}(t)\dot{\boldsymbol{P}}(t)\boldsymbol{\xi}(t)\\&=[\boldsymbol{P}^{-1}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{P}(t)-\boldsymbol{P}^{-1}(t)\dot{\boldsymbol{P}}(t)]\boldsymbol{\xi}(t),\quad \boldsymbol{\xi}(t_0)=\boldsymbol{P}^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0).\end{aligned}$$

由此得到一个新的状态方程,

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=[\boldsymbol{P}^{-1}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{P}(t)-\boldsymbol{P}^{-1}(t)\dot{\boldsymbol{P}}(t)]\boldsymbol{\xi}(t),\\&\boldsymbol{\xi}(t_0)=\boldsymbol{P}^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}_0.\end{aligned}$$

**引理 4.5.1** 设 $\boldsymbol{P}(t)$ 是一个 $n\times n$ 连续可微矩阵函数, $\boldsymbol{P}^{-1}(t)$ 对任意 $t$ 都存在, 那么矩阵

$$\boldsymbol{F}(t):=\boldsymbol{P}^{-1}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{P}(t)-\boldsymbol{P}^{-1}(t)\dot{\boldsymbol{P}}(t)$$

的转移矩阵是

$$\boldsymbol{\Phi}_F(t,\tau)=\boldsymbol{P}^{-1}(t)\boldsymbol{\Phi}_A(t,\tau)\boldsymbol{P}(\tau).$$

**证明** 注意到 $\boldsymbol{F}(t)$ 的连续性, 对任意固定 $\tau$, 令

$$\boldsymbol{X}(t):=\boldsymbol{P}^{-1}(t)\boldsymbol{\Phi}_A(t,\tau)\boldsymbol{P}(\tau),\quad \boldsymbol{X}(\tau)=\boldsymbol{I}_n.$$

利用思考题 25 的微分公式, 上式对 $t$ 求导可得

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=-\boldsymbol{P}^{-1}(t)\dot{\boldsymbol{P}}(t)\boldsymbol{P}^{-1}(t)\boldsymbol{\Phi}_A(t,\tau)\boldsymbol{P}(\tau)+\boldsymbol{P}^{-1}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}_A(t,\tau)\boldsymbol{P}(\tau)$$

$$= [\boldsymbol{P}^{-1}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{P}(t) - \boldsymbol{P}^{-1}(t)\dot{\boldsymbol{P}}(t)]\boldsymbol{P}^{-1}(t)\boldsymbol{\Phi}_A(t,\tau)\boldsymbol{P}(\tau)$$
$$= \boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{X}(t).$$

因为 $\tau$ 是任意的, 根据转移矩阵的性质, 证明完毕.

下面通过状态变量置换求解非零输入线性状态方程的解.

**例 4.5.1** 设给定的线性时变系统状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{4.5.2}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t). \tag{4.5.3}$$

令

$$\boldsymbol{\xi}(t) := \boldsymbol{P}^{-1}(t)\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t),$$

或

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{\xi}(t).$$

假设 $\boldsymbol{P}(t) := \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 满足状态变量置换所要求的条件. 将上式 $\boldsymbol{x}(t)$ 代入式 (4.5.2) 可得

$$\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{\xi}(t_0) = \boldsymbol{x}_0.$$

或

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t,t_0)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{\xi}(t_0) = \boldsymbol{x}_0. \tag{4.5.4}$$

上式两边对 $t$ 从 $t_0$ 到 $t$ 积分得到

$$\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{x}_0 = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\tau,t_0)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

或

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t_0,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

把变量置换回去, 利用转移矩阵的性质, 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{\xi}(t)\\ &= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t_0,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\\ &= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}(t_0,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\\ &= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

所以系统的输出响应为

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{C}(t)\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t).$$

这个变量置换方法, 在微分方程中标量情形下, 称为积分因子方法. 方程 (4.5.2) 的一个等价表达为

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t,t_0)[\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)]=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t,t_0)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0.$$

这就是方程 (4.5.4) 的另一种形式.

## 4.6　思考题

1. 用级数展开方法求解下列矩阵的转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$,
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$
2. 计算下面三阶二对角阵的转移矩阵,
$$\boldsymbol{T}_3=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_2 & 1 \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{3\times 3}.$$
3. 简答离散系统 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)$ 的稳定性与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 特征值的关系?
4. 设连续时间系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ 的状态转移矩阵为
$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix},$$
求 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$, $[\boldsymbol{\Phi}(t)]^m$ 和 $\boldsymbol{A}$.
5. 已知线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ 的参数矩阵为
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=[1,\ 0],$$
写出其对偶系统的能观测性矩阵.
6. 设线性系统的状态方程为
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}u(t),$$
采样周期为 $T$, 写出离散化后系统的状态方程.
7. 设系统矩阵为
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
求其状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$.

8. 解释有关术语, 并说明它们之间的关系: 输出反馈, 状态反馈, 能控性, 稳定性, 能镇定, 能观测, 极点任意配置, 系统能控, 能观测性, 状态能控, 输出能控, 线性变换, 可逆线性变换, 观测器.
9. 设线性系统的状态空间模型为
$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}u(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$
$y(t)=[1,\ 2]\boldsymbol{x}(t).$
(1) 计算系统的转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$.
(2) 计算系统的脉冲响应.
(3) 计算系统的阶跃响应.
10. 设系统的传递函数为
$$G(s)=\frac{2s^2+4s+6}{2s^3-8s^2-10s-12}.$$
(1) 写出这个系统的状态空间模型.
(2) 所写出的状态空间模型是否可控、是否可观测? 为什么?
(3) 设计一个状态反馈 $u=-\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}$, 使闭环系统极点为 $-1, -2, -3$.
11. 系统的状态空间模型为
$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}-2 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}1\\ 1\\ a\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=[0,\ 1,\ b]\boldsymbol{x}(t),\end{cases}$$
该系统包含两个参数 $a$ 和 $b$.
(1) 判断这个系统是否可控、是否可观测, 几个变量可控、几个状态可观测.
(2) 求系统的传递函数, 并讨论与能控性、能观测性的关系.
12. 对于线性系统
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}u(t),$$
设输入 $u(t)=0$, 测得初始状态为 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ 时的零输入状态响应为
$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}-5\mathrm{e}^{-t}+6\mathrm{e}^{-2t}\\ 5\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix};$$
测得初始状态为 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ 时的零输入状态响应为
$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}-4\mathrm{e}^{-t}+6\mathrm{e}^{-2t}\\ 4\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}.$$
(1) 基于这些条件, 是否能推断出初始状态为 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ 时的零输入状态响应 $\boldsymbol{x}(t)$? 如可能, 则求出 $\boldsymbol{x}(t)$.

(2) 在上述条件下, 我们是否能确定矩阵 $\boldsymbol{A}$? 如可能, 则求出 $\boldsymbol{A}$.

(3) 若能求出 $\boldsymbol{A}$, 假设初始状态 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, 求系统在单位脉冲输入 $u(t)=\delta(t)$ 下的 $\boldsymbol{x}(t)$.

13. 设 2 输入 2 输出系统的传递函数阵为

$$\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{s+2}{(s+1)^2} & \dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{2s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{3}{s+1}\end{pmatrix}.$$

推导对应的最小实现状态空间模型. 注: 将传递函数 (矩阵) 化为状态空间模型称为**实现** (Realization). 对应于传递函数 (矩阵) 的最小阶状态空间模型称为 **最小实现** (Minimal Realization). 提示: 参考 5.4 节的方法.

14. 一个学生给出了一个二阶系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ 状态转移矩阵的结构,

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{pmatrix}a\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t} & b\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}\\ c\mathrm{e}^t+2\mathrm{e}^{2t} & d\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix},$$

并且说, 只要能确定参数 $a$, $b$, $c$, $d$, 那么 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 就是状态转移矩阵. 你觉得这个说法妥当否, 说明理由?

15. 是否存在一组参数 $a$, $b$, $c$, $d$, 使得下列矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是某线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ 的状态转移矩阵, 说明理由?

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{pmatrix}a\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t} & b\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}\\ c\mathrm{e}^t+2\mathrm{e}^{2t} & d\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}.$$

16. 设系统状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}4 & 1 & -6\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}u(t),$$

在 Lyapunov 方程 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{Q}$ 中, 令 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}_3$, 求 $\boldsymbol{P}$; 令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 正半定, 求 $\boldsymbol{P}$, 判断系统平衡状态的稳定性?

17. 计算下列矩阵的转移矩阵,

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, (2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, (4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

(5) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, (6) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

$$(7)\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\qquad (8)\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&-1&-1&0\\0&1&1&0\\-1&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

18. 计算下列矩阵的转移矩阵,

$$(1)\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}}_n&\boldsymbol{I}_n\\\boldsymbol{I}_n&\bar{\boldsymbol{I}}_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(2n)\times(2n)},\qquad (2)\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\bar{\boldsymbol{I}}_n&\boldsymbol{I}_n\\\boldsymbol{I}_n&-\bar{\boldsymbol{I}}_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(2n)\times(2n)},$$

$$(3)\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}}_n&\bar{\boldsymbol{I}}_n\\\bar{\boldsymbol{I}}_n&\bar{\boldsymbol{I}}_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(2n)\times(2n)},\qquad (4)\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}}_n&-\boldsymbol{I}_n\\\boldsymbol{I}_n&\bar{\boldsymbol{I}}_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(2n)\times(2n)},$$

$$(5)\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\bar{\boldsymbol{I}}_n&\bar{\boldsymbol{I}}_n\\\bar{\boldsymbol{I}}_n&-\bar{\boldsymbol{I}}_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(2n)\times(2n)},\qquad (6)\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}}_n&-\bar{\boldsymbol{I}}_n\\\bar{\boldsymbol{I}}_n&\bar{\boldsymbol{I}}_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(2n)\times(2n)},$$

$$(7)\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}}_n&\boldsymbol{I}_n&\cdots&\boldsymbol{I}_n\\\boldsymbol{I}_n&\bar{\boldsymbol{I}}_n&\cdots&\boldsymbol{I}_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{I}_n&\cdots&\bar{\boldsymbol{I}}_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(kn)\times(kn)},$$

$$(8)\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\bar{\boldsymbol{I}}_n&\boldsymbol{I}_n&\cdots&\boldsymbol{I}_n\\\boldsymbol{I}_n&-\bar{\boldsymbol{I}}_n&\cdots&\boldsymbol{I}_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{I}_n&\cdots&-\bar{\boldsymbol{I}}_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(kn)\times(kn)}.$$

19. 计算下列 $(2n)\times(2n)$ 对角斜块单位阵和块单位阵的转移矩阵和特征多项式,

$$(1)\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}}_n&\\&\bar{\boldsymbol{I}}_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(2n)\times(2n)},\qquad (2)\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{I}_n\\\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(2n)\times(2n)}.$$

20. 计算下列块 (逆) 单位阵的特征多项式和转移矩阵,

$$(1)\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}}_n&\boldsymbol{I}_n\\\boldsymbol{I}_n&\bar{\boldsymbol{I}}_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(2n)\times(2n)},\qquad (2)\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n&\bar{\boldsymbol{I}}_n\\\bar{\boldsymbol{I}}_n&\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(2n)\times(2n)}.$$

21. 计算下列幂零矩阵的转移矩阵,

$$(1)\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&-9\\4&-6\end{pmatrix},\qquad (2)\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-3&2\\15&-9&6\\10&-6&4\end{pmatrix}.$$

22. 计算正负交错斜单位阵的特征多项式,

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{adiag}[1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1}]$$

$$=\begin{pmatrix}&&&&1\\&&&-1&\\&&1&&\\&-1&&&\\&\cdot&&&\\(-1)^{n-1}&&&&\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

23. 计算下列矩阵的特征多项式,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

24. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个幂零矩阵: $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$, 那么 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 是可逆的, 且有

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k.$$

25. 如果 $\boldsymbol{A}(t)$ 是一个 $n\times n$ 连续可微矩阵函数, 且对任意 $t$ 是可逆的, 证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}^{-1}(t)=-\boldsymbol{A}^{-1}(t)\dot{\boldsymbol{A}}(t)\boldsymbol{A}^{-1}(t).$$

26. 把 $n$ 阶时变线性微分方程

$$y^{(n)}(t)+a_1(t)y^{(n-1)}(t)+a_2(t)y^{(n-2)}(t)+\cdots+a_n(t)y(t)=b_0(t)u(t)+b_1(t)u'(t)$$

写成一个 $n$ 维状态方程,

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)u(t),\\ y(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)+D(t)u(t).\end{cases}$$

提示: 令 $x_n(t)=y^{(n-1)}(t)-b_1(t)u(t)$.

27. 试选择状态变量, 把 $n$ 阶微分方程

$$y^{(n)}(t)+a_1t^{-1}y^{(n-1)}(t)+a_2t^{-2}y^{(n-2)}(t)+\cdots+a_{n-1}t^{-n+1}y^{(1)}(t)+a_nt^{-n}y(t)=0$$

写成线性状态方程形式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=t^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t),$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $n\times n$ 常数矩阵.

28. 试选择状态变量, 把 $n$ 阶微分方程

$$y^{(n)}(t)+a_1ty^{(n-1)}(t)+a_2t^2y^{(n-2)}(t)+\cdots+a_{n-1}t^{n-1}y^{(1)}(t)+a_nt^ny(t)=u(t)$$

写成状态空间模型.

29. 说明矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 具有什么结构, 其转移矩阵 (Transition Matrix) 为

$$\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)=\mathrm{e}^{-(t^2-\tau^2)}\begin{pmatrix}\cos(t-\tau) & -\sin(t-\tau)\\ \sin(t-\tau) & \cos(t-\tau)\end{pmatrix}.$$

这个转移矩阵能表示成矩阵指数吗?

30. 如果 $n\times n$ 矩阵函数 $\boldsymbol{X}(t)$ 是下列矩阵微分方程的解,

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t),\ \boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0,$$

试说明: 如果 $\boldsymbol{X}_0$ 可逆, 那么 $\boldsymbol{X}(t)$ 对所有 $t$ 也可逆; 如果 $\boldsymbol{X}_0$ 可逆, 那么对任意 $t$ 和 $\tau$, $\boldsymbol{A}(t)$ 的转移矩阵是

$$\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t).$$

31. 对于线性时不变状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,$$

说明给定 $\boldsymbol{x}_0$, 存在一个常数 $\alpha$ 使得下式成立,

$$\det[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t),\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{x}(t)]=\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}]t}.$$

32. 把 $n\times n$ 矩阵微分方程

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{A}(t),\quad \boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0$$

的 (唯一) 解用一个适当的转移矩阵表示. 使用这种方法确定下列 $n\times n$ 矩阵微分方程的全解,

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)+\boldsymbol{F}(t),\quad \boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0.$$

33. 对于分块矩阵

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1(t) & \boldsymbol{A}_{12}(t)\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2(t)\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{A}_2(t)$ 是方阵, 那么

$$\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Phi}_1(t,\tau) & \boldsymbol{\Phi}_{12}(t,\tau)\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Phi}_2(t,\tau)\end{pmatrix},$$

式中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Phi}_i(t,\tau)=\boldsymbol{A}_i(t)\boldsymbol{\Phi}_i(t,\tau),\quad i=1,2.$$

你能用 $\boldsymbol{\Phi}_1(t,\tau)$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_2(t,\tau)$ 表示 $\boldsymbol{\Phi}_{12}(t,\tau)$ 吗? 提示: 使用思考题 32.

34. 说明时变线性状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$$

经过状态变量置换, 可以化为一个线性时不变状态方程, 当且仅当 $\boldsymbol{A}(t)$ 的转移矩阵能够写成形式

$$\boldsymbol{\Phi}(t,0)=\boldsymbol{F}(t)\mathrm{e}^{\boldsymbol{R}t},$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 是一个 $n\times n$ 常数矩阵, $\boldsymbol{F}(t)$ 对任意 $t$ 是一个 $n\times n$ 可逆矩阵.

35. 设 $\boldsymbol{A}(t)$ 是一个 $n\times n$ 连续可微矩阵. 证明 $\boldsymbol{A}(t)$ 的转移矩阵可以写成

$$\boldsymbol{\Phi}(t,0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1 t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_2 t},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 是 $n\times n$ 常数矩阵, 当且仅当下列关系成立,

$$\dot{\boldsymbol{A}}(t)=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}(t)-\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{A}_1,\quad \boldsymbol{A}(0)=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2.$$

36. 设 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 是常数 $n\times n$ 矩阵, 时变矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 满足

$$\dot{\boldsymbol{A}}(t)=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}(t)-\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{A}_1,\quad \boldsymbol{A}(0)=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2.$$

说明线性状态方程 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$, 通过变量置换, 可以转换成形式 $\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{\xi}(t)$.

37. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 是 $n\times n$ 常数矩阵, 说明线性状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{F}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(t)$$

的转移矩阵是

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{F})(t-t_0)}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_0}.$$

38. 设 $\boldsymbol{A}(t)$ 是一个 $n\times n$ 连续可微矩阵, $\boldsymbol{F}$ 是一个 $n\times n$ 可逆常数矩阵, 且满足

$$\dot{\boldsymbol{A}}(t)+\boldsymbol{A}^2(t)=\boldsymbol{F}\boldsymbol{A}(t),$$

说明状态方程 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{F}^{-1}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}t}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}(0)]\boldsymbol{x}_0.$$

提示: 考虑 $\boldsymbol{x}''(t)$.

39. 说明 $\boldsymbol{A}_1(t)+\boldsymbol{A}_2(t)$ 的转移矩阵可以表示为

$$\boldsymbol{\Phi}_{A_1+A_2}(t,\tau)=\boldsymbol{\Phi}_{A_1}(t,0)\boldsymbol{\Phi}_{A_3}(t,\tau)\boldsymbol{\Phi}_{A_1}(0,\tau),$$

其中 $\boldsymbol{A}_3(t)=\boldsymbol{\Phi}_{A_1}(0,t)\boldsymbol{A}_2(t)\boldsymbol{\Phi}_{A_1}(t,0)$.

40. 对于连续 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 和 $n\times n$ 常数矩阵 $\boldsymbol{F}$, 说明通过状态变量置换, 可以把线性状态方程 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$ 化成 $\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=\boldsymbol{F}\boldsymbol{\xi}(t)$.

41. 设 $\boldsymbol{A}(t)$ 的转移矩阵是 $\boldsymbol{\Phi}_A(t,\tau)$, 矩阵 $\boldsymbol{F}(t)$ 的转移矩阵是 $\boldsymbol{\Phi}_F(t,\tau)=\boldsymbol{\Phi}_A(-\tau,-t)$, 说明矩阵 $\boldsymbol{F}(t)$ 与 $\boldsymbol{A}(t)$ 的关系.

第 5 章
CHAPTER 5

# 线性系统的能控性与能观测性

能控性 (Controllability) 和能观测性 (Observability) 深刻揭示了系统的内部结构关系. 这两个重要概念是由卡尔曼 (Kalman) 于 1960 年代初首先提出的, 在现代控制理论中具有极其重要的意义. 能控性与能观测性决定了状态反馈系统极点和观测器极点是否可以任意配置, 以及有关控制问题解的存在性. 例如, 在极点配置问题中, 如果系统能控, 则状态反馈能够任意配置系统极点; 在观测器设计中, 如果系统能观测, 则状态观测器的极点可以任意配置. 本章主要讨论线性时不变系统的能控性和能观测性, 以及相关问题. 内容包括能控性与能观测性的定义, 系统能控性和能观测性的判别准则, 规范型和标准形的能控性和能观测性, 能控性和能观测性与系统的传递函数的关系以及系统的能控性结构分解和能观测性结构分解等. 最后介绍组合系统的能控性和能观测性.

## 5.1 线性系统的能控性

### 5.1.1 能控性和能达性

**能控性** (Controllability) 和 **能达性** (Reachability) 是两个很接近的概念. 对连续时间线性时不变系统, 这两个概念是等价的. 对离散时间系统, 这两个概念有些差异.

考虑下列非线性时变连续时间系统:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \end{cases} \tag{5.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{f}(*,*,*) \in \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{g}(*,*,*) \in \mathbb{R}^m$ 为向量函数, 参见式 (3.2.9).

**1. 状态能控或状态可控**

对于非零初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$ 和有限时间区间 $[t_0, t_1]$ $(t_1 > t_0)$, 如果存在一个容许控制 $\boldsymbol{u}(t)$ $(t \in [t_0, t_1])$ 使状态从 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 转移到状态空间的坐标原点 $\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{0}$, 则称状态在 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 点是可控的 (能控的). 可控与能控是两个同义词.

如果状态向量 $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x}$ 的所有分量) 不能同时转移到零, 那么就说状态在 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 是不可控的 (不能控的). 状态可控揭示了输入与状态之间的关系.

**2. 系统能控或系统可控**

对于任意的 $t_0$ 和任意的非零状态 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, 如果状态都是能控的, 那么就称状态完全能控 (可控), 简称系统能控 (可控). 如果系统有的状态 ($\boldsymbol{x}$ 的分量) 不能控, 就说系统是不完全能控的 (不完全可控的), 简称为 **系统不能控** (**系统不可控**). 通常所说的系统能控指的是状态能控, 因此系统可控性与式 (5.1.1) 中的输出方程无关.

**3. 状态可达和系统可达**

只需把上面的状态能控定义中的 $\boldsymbol{x}(t_1)=\mathbf{0}$ 改为给定的状态 $\boldsymbol{x}(t_1)$ (不一定为零), 就是状态可达的定义. 完整的叙述如下: 对于初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$, 任意给定的非零 $\boldsymbol{x}_f$ 和有限时间区间 $[t_0,t_1]$ $(t_1>t_0)$, 如果存在一个容许控制 $\boldsymbol{u}(t)$ 使状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 从 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 转移到 $\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{x}_f$ (状态空间的一个点), 则称非零状态 $\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{x}_f$ 在 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 点是可达的 (能达的).

如果对于任意的 $t_0$, 任意的 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 和任意的 $\boldsymbol{x}_f$, $\boldsymbol{x}_f$ 都是可达的, 就称状态 **完全可达**, 简称系统可达, 或称系统是可达的.

对于连续时间线性时不变系统, 如果系统在任意时刻 $t_0$ 任意初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 是可控的 (可达的), 则系统是可控的 (可达的). 时变系统和非线性系统, 这个结论一般不成立.

**4. 输出能控性**

状态可控固然重要, 但控制系统通常控制的是系统的输出, 因此研究系统输出的能控性也有必要. 下面考虑系统输出的能控性 (可控性).

如果能找到控制函数 $\boldsymbol{u}(t)$, 在有限时间区间 $[t_0,t_1]$ $(t_1>t_0)$ 内, 使系统输出从任意初始输出 $\boldsymbol{y}(t_0)$ 转移到任意最终输出 $\boldsymbol{y}(t_1)=\boldsymbol{y}_f$, 则称此系统是输出完全能控的, 简称输出能控 (可控).

**5. 输出函数能控性**

如果能找到控制函数 $\boldsymbol{u}(t)$, 使系统输出从任意初始输出 $\boldsymbol{y}(t_0)$ 沿着某一轨迹转移到任意最终输出 $\boldsymbol{y}(t_1)=\boldsymbol{y}_f$, 则称系统输出是函数能控的.

### 5.1.2　线性系统能控性判据

考虑线性时不变状态方程:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \tag{5.1.2}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ 为状态向量, $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbb{R}^r$ 为输入向量, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times r}$ 为常数矩阵.

**定理 5.1.1　格拉姆能控性判据** (Gram Controllability Criterion)

线性时不变系统 (5.1.2) 完全可控的充分必要条件是下列 **能控性格拉姆矩阵** 非奇异:

$$\boldsymbol{G}_c(t_0,t_1):=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t}\mathrm{d}t,\quad t_1>t_0.$$

因为线性系统的能控性只依赖于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 所以有时简单地将系统能控说成 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 能控.

**定理 5.1.2　能控性矩阵秩判据** (Controllability Matrix Rank Criterion)

定义线性时不变系统 (5.1.2) 的 **能控性矩阵** (Controllability Matrix):

$$\boldsymbol{Q}_c:=[\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]\in\mathbb{R}^{n\times(nr)},$$

那么系统 (5.1.2) 完全能控的充分必要条件是 **能控性矩阵** $\boldsymbol{Q}_c$ 的秩等于系统阶次 $n$ (状态向量的维数), 即

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{Q}_c]=\mathrm{rank}[\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]=n.$$

如果 $\text{rank}[\boldsymbol{Q}_c] = i < n$, 那么系统不完全能控, 简称系统不能控, 此时能控状态数目为 $i$, 不能控状态数目为 $n-i$. 然而, 我们并不能说哪些状态能控, 哪些状态不能控, 参见例 5.1.2 和例 5.1.3, 以及 5.5 节的结构分解.

**定理 5.1.3 PBH 能控性判据** (特征向量检验) (PBH Eigenvector Test)

线性时不变系统 (5.1.2) 完全可控的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的左特征向量都不与 $\boldsymbol{B}$ 的所有列正交. 也可以叙述如下.

设 $\lambda$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}$ 是对应的非零左特征向量 [左特征向量的定义式 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\lambda$], 系统能控时, 等式 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ 不可能成立.

**定理 5.1.4 PBH 能控性判据** (秩检验) (PBH Rank Test)

$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 是能控的, 当且仅当矩阵 $[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \in \mathbb{R}^{n\times(n+r)}$ 的秩为 $n$, 即

$$\text{rank}[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = n \quad \text{for any } s.$$

因为当 $s$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值时, $s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ 总是非奇异的, 即 $\text{rank}[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}] = n$, 故 $\text{rank}[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = n$. 因此, 只需判断 $s$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值时, $[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ 的秩即可.

PBH 判据最初是由 Gilbert 1963 年研究可对角化系统发现的, 后来由 Popov (1966), Belevitch (1968) 和 Hautus (1969) 加以推广. 因此, 用他们三人名字 (姓氏) 首字母命名 (PBH).

**定理 5.1.5 输出能控性矩阵秩判据**

考虑线性时不变系统:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t), \end{cases} \tag{5.1.3}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ 为输入向量, $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ 为输出向量, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{m\times r}$ 为常数矩阵.

线性时不变系统 (5.1.3) 是输出能控的, 系指下列 $m \times (nr + r)$ **输出能控性矩阵** (Output Controllability Matrix) 的秩为 $m$ (输出的维数):

$$\text{rank}[\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_c, \boldsymbol{D}] = \text{rank}[\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}] = m.$$

### 5.1.3 能控性例子

下面通过几个例子说明系统的能控性. 例 5.1.1 是能控性例子; 例 5.1.2 是不能控例子, 其不能控状态 $x_2$ 与输入 $u$ 无关; 例 5.1.3 也是不能控例子, 其两个状态都与输入有关, 但系统不能控; 例 5.1.4 是一个两输入能控例子, 其 $\boldsymbol{A}$ 矩阵与第 3 个例子相同, 不同是 $\boldsymbol{B}$ 是一个矩阵, 尽管 $\boldsymbol{B}$ 中非零元与例 5.1.3 相同, 但系统是能控的.

**例 5.1.1** 判断下列 SISO 系统的能控性,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t).$$

**解** 这是一个 $n=2$ 阶系统, 计算能控性矩阵的秩,

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{Q}_c]=\operatorname{rank}[\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}]=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2=n,$$

故系统是完全能控的, 状态向量 $\boldsymbol{x}$ 是能控的. 这个系统可以分解为

$$\dot{x}_1(t)=-2x_1(t)-3x_2(t)+u(t),$$

$$\dot{x}_2(t)=x_1(t).$$

从这两个方程可以看出, 第 1 个状态 $x_1(t)$ 与 $u(t)$ 有关, 第 2 个状态 $x_2(t)$ 与输入 $u(t)$ 无关, 但与第 1 个状态 $x_1(t)$ 有关 (即间接与 $u(t)$ 有关), 故系统是能控的.

**例 5.1.2** 判断下列 SISO 系统的能控性,

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}u(t).$$

**解** 这是一个 $n=2$ 阶系统, 计算能控性矩阵的秩,

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{Q}_c]=\operatorname{rank}[\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}]=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=1<n,$$

故系统是不能控的, 且只有 1 个状态是可控的. 这个系统可以分解为

$$\dot{x}_1(t)=-x_1(t)+2x_2(t)+u(t),$$

$$\dot{x}_2(t)=-3x_2(t).$$

从这两个状态方程可以看出, 第 1 个状态 $x_1(t)$ 与输入 $u(t)$ 有关, 第 2 个状态 $x_2(t)$ 与输入 $u(t)$ 无关 (间接也无关), 故 $x_2(t)$ 是不能控的. 这个例子把能控状态和不能控状态揭示得很清楚, 但不能控情况不都是如此 (阅读下例), 一般需经过结构分解才能化为这样的结构, 参见 5.5 节的结构分解.

**例 5.1.3** 判断下列 SISO 系统的能控性,

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}u(t).$$

**解** 这是一个 $n=2$ 阶系统, 计算能控性矩阵的秩,

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{Q}_c]=\operatorname{rank}[\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}]=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=1<n,$$

故系统是不能控的, 且只有一个状态是能控的. 这个系统可以分解为

$$\dot{x}_1(t)=-x_1(t)+u(t),$$

$$\dot{x}_2(t)=-x_2(t)+2u(t).$$

这两个状态方程都与输入 $u(t)$ 有关, 就每个状态方程单独来说, 两个状态 $x_1$ 和 $x_2$ 是能控的, 但向量 $\boldsymbol{x}$ 是不能控的, 故系统是不能控的. 系统能控是就系统整个状态向量而言, 而不是对每个状态而言. 这个系统不能控的原因如下. 考虑两个状态的线性组合: 第 2 个方程减去第 1 个方程的 2 倍得到

$$\dot{x}_2(t)-2\dot{x}_1(t)=-[x_2(t)-2x_1(t)],$$

其解为

$$x_2(t) - 2x_1(t) = \mathrm{e}^{-t}[x_2(0) - 2x_1(0)].$$

设 $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 有 $x_2(t) - 2x_1(t) = -\mathrm{e}^{-t}$, 并不存在控制 $u(t)$, 使状态转移到任意的 $\boldsymbol{x}(t_f) = \boldsymbol{x}_f$, 如 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_f = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. 设 $x_1(t) = 2$, 那么有

$$x_2(t) = 2x_1(t) - \mathrm{e}^{-t} = 4 - \mathrm{e}^{-t} \neq 3.$$

读者可以从这个例子得出结论: ① 系统的所有状态都与输入有关, 不能说系统是能控的; 系统的状态与输入无关 (包括直接无关和间接无关), 系统是不能控的. ② 对 SISO 系统而言, 如果 $\boldsymbol{A}$ 为单位阵的倍数, 那么系统是不能控的.

**例 5.1.4** 判断下列两输入系统的能控性,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t).$$

**解** 这是一个 $n = 2$ 阶系统, 计算能控性矩阵的秩,

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{Q}_c] = \mathrm{rank}[\boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}] = \mathrm{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2 = n,$$

故该系统是能控的. 这个系统可以分解为

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + 2u_2(t).$$

两个状态都与不同的控制输入有关, 且它们的线性组合也与输入有关, 故系统是能控的.

**例 5.1.5** 研究控制器规范型

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

的能控性.

**解** 系统的能控性矩阵为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_c &:= [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{Ab}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & a_1^2 - a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}. \end{aligned}$$

其行列式 $\det[\boldsymbol{Q}_c] = 1 \neq 0$, 故控制器规范型能控.

**例 5.1.6** 研究控制器规范型

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

的能控性.

**解** 系统的能控性矩阵为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}_c &:= [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{b}] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & a_1^2 - a_2 & -a_1(a_1^2 - a_2) + a_1 a_2 - a_3 \\ 0 & 1 & -a_1 & a_1^2 - a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.
\end{aligned}
$$

其行列式 $|\boldsymbol{Q}_c| = 1 \neq 0$, 故控制器规范型能控.

从例 5.1.5 和例 5.1.6 可以看出: 控制器规范型的能控性矩阵是一个对角线为 1 的上三角阵, 是满秩的, 故控制器规范型是能控的. 类似地, 能控性规范型的能控性矩阵是一个单位阵, 是满秩的, 故能控性规范型是能控的. 这是控制器规范型和能控性规范型名称的来历.

## 5.2 线性系统的能观测性

### 5.2.1 能观测性与能检测性

**能观测性** (Observability) 和 **能检测性** (Detectability) 揭示了系统输出与系统状态之间的关系, 故需要同时考虑系统的状态方程和输出方程.

考虑下列非线性时变连续时间系统:

$$
\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \end{cases} \tag{5.2.1}
$$

其中 $\boldsymbol{f}(*,*,*) \in \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{g}(*,*,*) \in \mathbb{R}^m$ 为向量函数, 参见式 (3.2.9).

**1. 状态能观测**

对于 $t \in [t_0, t_1]$ $(t_1 > t_0)$, 如果初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 能由系统输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 唯一确定, 那么称状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 是可观测的 (能观测的). 如果 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 的某个分量不能由输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 唯一确定, 状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 就是不能观测的. 能观测与可观测是两个同义词.

**2. 系统能观测**

如果对于任意的 $t \in [t_0, t_1]$ $(t_1 > t_0)$, 所有状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 都能由系统输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 唯一确定, 那么称状态是完全可观测的, 或系统是完全可观测的, 简称系统可观测 (能观测).

### 5.2.2 线性系统能观测性判据

考虑线性时不变系统:

$$
\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t), \end{cases} \tag{5.2.2}
$$

其中 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ 为输入向量, $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ 为输出向量, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{m\times r}$ 为常数矩阵.

**定理 5.2.1 格拉姆能观测性判据** (Gram Observability Criterion)

线性时不变系统 (5.2.2) 完全能观测的充分必要条件是下列 **能观测性格拉姆矩阵** 非奇异:

$$
\boldsymbol{G}_o(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} t} \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A} t} \mathrm{d}t, \quad t_1 > t_0.
$$

因为线性系统的能观测性判据只依赖于矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}$, 所以有时简单地将系统能观测说成 $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A})$ 能观测.

**定理 5.2.2 能观测性矩阵秩判据** (Observability Matrix Rank Criterion)

定义线性时不变系统 (5.2.2) 的 **能观测性矩阵** (Observability Matrix):

$$\boldsymbol{Q}_o := \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(mn)\times n},$$

那么系统 (5.2.2) 完全能观测的充分必要条件是 **能观测性矩阵 $\boldsymbol{Q}_o$** 的秩等于系统阶次 $n$ (状态向量的维数), 即

$$\text{rank}[\boldsymbol{Q}_o] = \text{rank} \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{pmatrix} = n.$$

如果 $\text{rank}[\boldsymbol{Q}_o] = i < n$, 那么系统不完全能观测, 简称系统不能观测, 此时能观测状态数目为 $i$, 不能观测状态数目为 $n-i$. 同样, 我们并不能说哪些状态能观测, 哪些状态不能观测, 参看下面的例 5.2.2 和例 5.2.3, 以及 5.5 的结构分解.

**定理 5.2.3 PBH 能观测性判据** (特征向量检验) (PBH Eigenvector Test)

线性时不变系统 (5.2.2) 完全能观测的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的右特征向量都不与 $\boldsymbol{C}$ 的所有行正交. 也可以叙述如下.

设 $\lambda$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{p}$ 是对应的非零右特征向量 [右特征向量的定义式 $\boldsymbol{Ap} = \lambda\boldsymbol{p}$], 系统能观测时, 等式 $\boldsymbol{Cp} = \boldsymbol{0}$ 不可能成立.

**定理 5.2.4 PBH 能观测性判据** (秩检验) (PBH Rank Test)

$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 是能观测的, 当且仅当矩阵 $\begin{pmatrix} s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times n}$ 的秩为 $n$, 即

$$\text{rank} \begin{pmatrix} s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix} = n \text{ for any } s.$$

与能控情形相同, 只需判断 $s$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值时, $\begin{pmatrix} s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$ 的秩即可.

### 5.2.3 能观测性例子

下面通过几个例子说明系统的能观测性. 例 5.2.1 是能观测性例子; 例 5.2.2 是不能观测例子, 其不能观测状态 $x_2$ 与输出 $y$ 无关; 例 5.2.3 也是不能观测例子, 其两个状态都与输出有关, 但系统不能观测; 例 5.2.4 是一个两输出能观测例子, 其 $\boldsymbol{A}$ 矩阵与例 5.2.3 相同, 不同是 $\boldsymbol{C}$ 是一个矩阵, 尽管 $\boldsymbol{C}$ 中非零元与例 5.2.3 相同, 但系统是能观测的.

**例 5.2.1**　判断下列 SISO 系统的能观测性,

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}u(t), \\ y(t) = [1,\ 0]\boldsymbol{x}. \end{cases}$$

**解**　这是一个 $n=2$ 阶系统, 计算能观测性矩阵的秩,

$$\text{rank}[\boldsymbol{Q}_o] = \text{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{cA} \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = 2 = n,$$

故系统是能观测的, 状态向量 $\boldsymbol{x}$ 是能观测的.

**例 5.2.2**　判断下列 SISO 系统的能观测性,

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}u(t), \\ y(t) = [0,\ 1]\boldsymbol{x}. \end{cases}$$

**解**　这是一个 $n=2$ 阶系统, 计算能观测性矩阵的秩,

$$\text{rank}[\boldsymbol{Q}_o] = \text{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{cA} \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 < n,$$

故系统是不能观测的, 且只有 1 个状态是能观测的. 这个系统可以分解为

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = 2x_2(t) + 2u(t),$$
$$y(t) = x_2(t).$$

从这 3 个方程可以看出, 第 1 个状态 $x_1(t)$ 与输出 $y(t)$ 无关, 但不影响第 2 个状态 $x_2(t)$, 故 $x_1(t)$ 是不能观测的; 第 2 个状态与输出 $y(t)$ 有关, 故 $x_2(t)$ 是能观测的. 因此, 整个系统是不能观测的. 这个例子把能观测状态和不能观测状态揭示得很清楚, 但不能观测情况不都是如此 (阅读下例), 一般需经过结构分解才能化为这样的结构, 参见 5.6 节的结构分解.

**例 5.2.3**　判断下列 SISO 系统的能观测性,

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}u(t), \\ y(t) = [3,\ 4]\boldsymbol{x}. \end{cases}$$

**解**　这是一个 $n=2$ 阶系统, 计算能观测性矩阵的秩,

$$\text{rank}[\boldsymbol{Q}_o] = \text{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{cA} \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 < n,$$

故系统是不能观测的, 且只有一个状态是能观测的. 这个系统可以分解为

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + 2u(t),$$
$$y(t) = 3x_1(t) + 4x_2(t).$$

两个状态都与输出 $y(t)$ 有关, 就每个状态单独来说, 两个状态 $x_1$ 和 $x_2$ 是能观测的, 但向量 $\boldsymbol{x}$ 是不能观测的, 故系统是不能观测的. 系统能观测是就系统整个状态向量而言, 而不是对每个状态而言.

读者可以从这个例子得出结论:

① 系统的所有状态都与输出有关, 不能说系统是能观测的; 系统的状态与输出无关 (包括直接无关和间接无关), 系统是不能观测的.

② 对 SISO 系统而言, 如果 $\boldsymbol{A}$ 为单位阵的倍数, 那么系统既是不能控的, 又是不能观测的, 不管控制参数向量 $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ 和输出参数向量 $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^{1\times n}$ 取何值. 对多输入多输出系统, 上述结论不成立, 参见下列例子.

**例 5.2.4** 判断下列两输出系统的能观测性,

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}u(t),\\ \boldsymbol{y}(t)=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.\end{cases}$$

**解** 这是一个 $n=2$ 阶系统, 计算能观测性矩阵的秩,

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{Q}_o]=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\\ -3 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}=2=n,$$

故该系统是能观测的. 如果 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, 这个系统仍然是不能观测的.

**例 5.2.5** 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-a_1 & 1 & 0 & 0\\ -a_2 & 0 & 1 & 0\\ -a_3 & 0 & 0 & 1\\ -a_4 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=[1,\ 0,\ 0,\ 0].$$

其能观测性矩阵为

$$\boldsymbol{Q}_o:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{cA}\\ \boldsymbol{cA}^2\\ \boldsymbol{cA}^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -a_1 & 1 & 0 & 0\\ a_1^2-a_2 & -a_1 & 1 & 0\\ -a_1(a_1^2-a_2)+a_1a_2-a_3 & a_1^2-a_2 & -a_1 & 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times 4}.$$

因为 $\det[\boldsymbol{Q}_o]=1\neq 0$, 故 $(\boldsymbol{c},\boldsymbol{A})$ 是可观测的.

## 5.3 规范型与标准形的能控性

### 5.3.1 控制器与能控性规范型的能控性

先看一个三阶 SISO 系统传递函数的控制器规范型实现的能控性.

**1. 三阶系统的控制器规范型**

由例 3.5.5 可知, 传递函数

$$G(s)=\frac{b_1s^2+b_2s+b_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}. \tag{5.3.1}$$

对应的控制器规范型为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}-a_1 & -a_2 & -a_3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=[b_1,b_2,b_3]\boldsymbol{x}(t).\end{cases} \tag{5.3.2}$$

这是个 $n=3$ 阶 SISO 系统. 计算能控性矩阵,

$$\boldsymbol{Q}_c=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}]=\begin{pmatrix}1 & -a_1 & a_1^2-a_2\\ 0 & 1 & -a_1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

能控性矩阵 $\boldsymbol{Q}_c$ 是一个对角元为 1 的上三角阵, 其行列式为 $\det[\boldsymbol{Q}_c]=1\neq 0$, 故 **控制器规范型** 是能控的.

**2. $n$ 阶系统的控制器规范型**

传递函数

$$G(s)=\frac{b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n}+d \tag{5.3.3}$$

对应的控制器规范型为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}-a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=[b_1,b_2,\cdots,b_n]\boldsymbol{x}(t)+du(t),\end{cases} \tag{5.3.4}$$

这是一个 $n$ 阶 SISO 系统. 计算能控性矩阵,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_c&=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]\\ &=\begin{pmatrix}1 & -a_1 & a_1^2-a_2 & \cdots & *\\ 0 & 1 & -a_1 & \cdots & *\\ 0 & 0 & 1 & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots & -a_1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

上式中 * 表示对研究不重要的元素. SISO 系统控制器规范型的能控性矩阵 $\boldsymbol{Q}_c$ 是一个单位上三角阵 (对角线上元均为 1 的三角阵称为单位三角阵), 是非奇异的, 故 $n$ 阶 SISO 系统**控制器规范型是能控的**.

对任意的 $n$ 阶系统, 其对应的 $n$ 阶**控制器规范型总是能控的**.

**3. $n$ 阶系统的能控性规范型**

传递函数 (5.3.3) 对应的能控性规范型为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&-a_n\\1&0&0&\cdots&0&-a_{n-1}\\0&1&0&\cdots&0&-a_{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-a_1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}u(t),\\y(t)=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]\boldsymbol{x}(t)+du(t),\end{cases}\tag{5.3.6}$$

其能控性矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_c&=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]\\&=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&0\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}_n.\end{aligned}\tag{5.3.7}$$

能控性规范型的能控性矩阵 $\boldsymbol{Q}_c$ 是一个单位阵, 故**能控性规范型是能控的**.

以上说明: **控制器规范型与能控性规范型总是能控的**, 不管 $\boldsymbol{A}$ 矩阵中的自由元如何取值.

这个结论说明: 不管传递函数分子分母是否存在公因子 (零极点对消), 对应的 **控制器规范型** 和 **能控性规范型** 实现总是能控的.

对于一个给定的系统, 通过观察, 如果发现它是控制器规范型或能控性规范型, 那么系统就是能控的.

**例 5.3.1** 考虑下列系统的能控性,

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}u.$$

这是一个控制器规范型 (也是一个能控性规范型), 故该系统是能控的.

### 5.3.2 观测器与能观测性规范型的能控性

关于观测器规范型的能控性和能观测性规范型的能控性, 我们有结论: **观测器规范型和能观测性规范型不一定是能控的**, 其能控是有条件的. 下面以一个二阶系统为例加以说明.

**例 5.3.2** 考虑一个二阶系统

$$G(s)=\frac{b_1s+b_2}{s^2+a_1s+a_2}.\tag{5.3.8}$$

对应的观测器规范型为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}-a_1&1\\-a_2&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}u(t),\\y(t)=[1,\ 0]\boldsymbol{x}(t).\end{cases}\tag{5.3.9}$$

其能控性矩阵及其行列式为

$$Q_c=[B,AB]=\begin{pmatrix} b_1 & b_2-a_1b_1 \\ b_2 & -a_2b_1 \end{pmatrix},$$

$$|Q_c|=\begin{vmatrix} b_1 & b_2-a_1b_1 \\ b_2 & -a_2b_1 \end{vmatrix}=-a_2b_1^2-b_2^2+a_1b_1b_2,$$

能控性矩阵 $Q_c$ 的奇异性依赖于系统参数 $a_1$ $a_2$, $b_1$ 和 $b_2$, 因此不能得出系统是能控的结论.

**例 5.3.3** 参考例 3.5.5 可知, 系统 (5.3.8) 对应的能观测性规范型为

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2-a_1b_1 \end{pmatrix}u(t), \\ y(t)=[1,\ 0]x(t). \end{cases} \tag{5.3.10}$$

其能控性矩阵及其行列式为

$$Q_c=[b,Ab]=\begin{pmatrix} b_1 & b_2-a_1b_1 \\ b_2-a_1b_1 & -a_2b_1-a_1b_2+a_1^2b_1 \end{pmatrix},$$

$$|Q_c|=\begin{vmatrix} b_1 & b_2-a_1b_1 \\ b_2-a_1b_1 & -a_2b_1-a_1b_2+a_1^2b_1 \end{vmatrix}=-a_2b_1^2-a_1b_1b_2+a_1^2b_1^2-(b_2-a_1b_1)^2.$$

同样, 能控性矩阵 $Q_c$ 的奇异性依赖于系统参数, 因此不能说能观测性规范型是能控的.

根据对偶原理, 读者可以研究控制器规范型和能控性规范型的能观测性, 可以研究观测器规范型和能观测性规范型的能控性.

关于状态空间规范型的结论.

(1) 控制器规范型和能控性规范型总是能控的, 不管 $A$ 矩阵中的自由元如何取值, 即这两种规范型保证系统是可控的, 但不保证系统的能观测性.

(2) 根据对偶原理, 观测器规范型和能观测性规范型总是可观测的, 不管 $A$ 矩阵中的自由元如何取值, 即这两种规范型保证系统是可观测的, 但不保证系统的能控性.

(3) 下面讨论的对角标准形、约当标准形既不保证系统是可控的, 又不保证系统是可观测的.

### 5.3.3 对角标准形的能控性

#### 1. SISO 系统对角标准形

**SISO 系统对角标准形** 如下,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}u. \tag{5.3.11}$$

由于能控性与输出无关, 故这里省略了输出方程.

假设系统的特征值 $\lambda_i$ 互不相同. 系统能控性矩阵的行列式为

$$\begin{aligned} |Q_c| &= \det[b,Ab,A^2b,\cdots,A^{n-1}b] \\ &= \begin{vmatrix} b_1 & \lambda_1b_1 & \lambda_1^2b_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}b_1 \\ b_2 & \lambda_2b_2 & \lambda_2^2b_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}b_2 \\ b_3 & \lambda_3b_3 & \lambda_3^2b_3 & \cdots & \lambda_3^{n-1}b_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_n & \lambda_nb_n & \lambda_n^2b_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}b_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= b_1 b_2 \cdots b_n |\boldsymbol{V}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)|,$$

其中 $\boldsymbol{V}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 是 **范德蒙矩阵** (Vandermonde Matrix), 它的行列式为

$$|\boldsymbol{V}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

当 $\lambda_i$ 互不相同时, 范德蒙矩阵的行列式非零. 当 $b_1 b_2 \cdots b_n \neq 0$ 时, 能控性矩阵 $\boldsymbol{Q}_c$ 满秩. 因此, **对角标准形** (5.3.11) **能控的条件是所有** $b_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ **都不为零**.

**对于 SISO 系统对角标准形 (5.3.11), 如果 $A$ 矩阵对角线上有两个相同的特征值, 那么该系统不可控**. 参见下例.

**例 5.3.4** 对角标准形

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} u$$

和

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} u$$

都是不可控的. 这可以用 PBH 能控性矩阵秩判据得证. 事实上, 对于后一个系统, 有

$$[s\boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}] = \begin{pmatrix} s-1 & & & & 5 \\ & s-2 & & & 6 \\ & & s-3 & & 7 \\ & & & s-3 & 8 \end{pmatrix},$$

当 $s$ 取矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的重特征值 $s = 3$ 时, $\operatorname{rank}[s\boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}] = 3 < n = 4$, 故不可控.

**2. MIMO 系统对角标准形**

对于多输入系统 ($r$ 个输入 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^r$, 控制参数矩阵 $\boldsymbol{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times r}$), **MIMO 系统对角标准形** 如下,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}. \tag{5.3.12}$$

当特征值 $\lambda_i$ 互不相同时, **多变量系统** (5.3.12) **能控的充分必要条件是控制参数矩阵 $B$ 中不包含全为零的行**, 即对所有 $i = 1, 2, \cdots, n$, $[b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{ir}] \neq \boldsymbol{0}$. 这可以用 PBH 能控性

矩阵秩判定. 事实上, 考虑矩阵

$$[s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=\begin{pmatrix} s-\lambda_1 & & & & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ & s-\lambda_2 & & & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & s-\lambda_n & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix},$$

对于互不相同的 $\lambda_i$, 当 $s=\lambda_i$ 时, 只需 $\boldsymbol{B}$ 矩阵第 $i$ 行 $[b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{ir}]$ 的元不全为零, $[\lambda_i\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$ 就是满秩.

对于 MIMO 系统对角标准形 (5.3.12), 如果 $\boldsymbol{A}$ 矩阵对角线上有相同特征值, 其能控性条件较为复杂. 下面以一个两输入 5 阶系统对角标准形为例加以说明.

**例 5.3.5**　考虑下列对角标准形:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_1 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \lambda_4 & \\ & & & & \lambda_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \tag{5.3.13}$$

该系统有两个相同的特征值 $\lambda_1$, 假设 $\lambda_1$, $\lambda_3$, $\lambda_4$, $\lambda_5$ 都不相同. 考虑

$$[s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=\begin{pmatrix} s-\lambda_1 & & & & & b_{11} & b_{12} \\ & s-\lambda_1 & & & & b_{21} & b_{22} \\ & & s-\lambda_3 & & & b_{31} & b_{32} \\ & & & s-\lambda_4 & & b_{41} & b_{42} \\ & & & & s-\lambda_5 & b_{51} & b_{52} \end{pmatrix},$$

当 $s=\lambda_i$ $(i=3,4,5)$ 时, $\boldsymbol{B}$ 矩阵的第 $i$ 行 $[b_{i1},b_{i2}]$ 的元不全为零 (即 $\operatorname{rank}[b_{i1},b_{i2}]=1$), $[\lambda_i\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$ 就满秩; 当 $s=\lambda_1$ 时, $\boldsymbol{B}$ 矩阵的第 1 行和第 2 行构成的子矩阵的秩为 2 (重特征值的数目), 即

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=2,$$

那么 $[\lambda_1\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$ 就是满秩. 因此, 对于两输入对角标准形, 如果有两个特征值相同, 要求该特征值对应的 $\boldsymbol{B}$ 矩阵的子矩阵的秩为 2, 且单特征值对应的 $\boldsymbol{B}$ 矩阵的行的元不全为零 (即单特征值对应的 $\boldsymbol{B}$ 矩阵的行的秩为 1), 系统就可控.

由此可以总结出下列结论.

(1) 如果对角标准形有 $r+1$ 个特征值相同 ($r$ 为输入的维数), 系统总是不能控的.

(2) 对于 $r$ 个输入对角标准形, 如果相同特征值 (重数 $k$, $k=1$ 表示是单特征值) 对应 $\boldsymbol{B}$ 的子矩阵的秩为 $k$ ($k=1$ 时, 表示单特征值对应的 $\boldsymbol{B}$ 矩阵的行的元不全为零), 系统就可控.

(3) 根据对偶性, 读者可以研究对角标准型的能观测性.

### 5.3.4　约当标准形的能控性

如果 $\boldsymbol{A}$ 矩阵有重特征值, 一般情况下不可对角化, 但可通过相似变换约当化, 化为约当标准形, 约当标准形对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的结构也没有要求.

**1. SISO 系统约当标准形**

当系统有 $n$ 个相同特征值 $\lambda$ 时, **SISO 系统约当标准形** 如下,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} u. \tag{5.3.14}$$

PBH 能控性矩阵为

$$[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}] = \begin{pmatrix} s-\lambda & -1 & & & & b_1 \\ & s-\lambda & -1 & & & b_2 \\ & & s-\lambda & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & -1 & b_{n-1} \\ & & & & s-\lambda & b_n \end{pmatrix}$$

当 $s=\lambda$ 时, 只要 $b_n \neq 0$, 矩阵 $[s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}]$ 就满秩. 因此, SISO 系统约当标准形 (5.3.14) 能控的条件是控制参数向量 $\boldsymbol{b} = [b_i] \in \mathbb{C}^n$ 的最后一元非零: $b_n \neq 0$.

**例 5.3.6** 约当标准形

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

是不可控的. 而约当标准形

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} u$$

是可控的.

这个例子是标准约当块, 读者可进一步考虑下列非标准约当块的约当标准形的能控性:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} u$$

和

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} u.$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 矩阵有 $n_1$ 个相同特征值 $\lambda_1$, 其余 $n-n_1$ 互不相同特征值 $\lambda_{n_1+1},\lambda_{n_1+2},\cdots,\lambda_n$, 那么 SISO 系统约当标准形如下,

$$\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_1\\ \dot{x}_{n_1+1}\\ \dot{x}_{n_1+2}\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1&&&&\\&\lambda_{n_1+1}&&&\\&&\lambda_{n_1+2}&&\\&&&\ddots&\\&&&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ x_{n_1+1}\\ x_{n_1+2}\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ b_{n_1+1}\\ b_{n_1+2}\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}u, \tag{5.3.15}$$

其中 $\boldsymbol{x}_1=[x_1,x_2,\cdots,x_{n_1}]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{n_1}$, $\boldsymbol{b}_1=[b_1,b_2,\cdots,b_{n_1}]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{n_1}$, $n_1$ 阶约当块 $\boldsymbol{J}_1$ 为

$$\boldsymbol{J}_1=\begin{pmatrix}\lambda_1&1&&&\\&\lambda_1&1&&\\&&\lambda_1&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&\lambda_1\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_1}.$$

SISO 系统 (5.3.15) 能控的条件是约当块 $\boldsymbol{J}_1$ 对应的控制参数向量 $\boldsymbol{b}_1$ 的最后一元非零: $b_{n_1}\neq 0$, 并且单特征值 $\lambda_i$ 对应的控制参数向量的元非零: $b_i\neq 0,\ i=n_1+1,n_1+2,\cdots,n$.

多输入情形: 能控的条件是约当块 $\boldsymbol{J}_1$ 对应的控制参数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的子块 $\boldsymbol{B}_1$ 的最后一行非零, 并且单特征值 $\lambda_i$ 对应的控制参数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行非零.

**2. MIMO 系统约当标准形**

多输入多输出 (MIMO) 系统 ($r$ 个输入 $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^r$, 控制参数矩阵 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_i]\in\mathbb{R}^{n\times r}$) 的 **约当标准形** (Jordan Standard Form) 结构如下,

$$\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_1\\ \dot{\boldsymbol{x}}_2\\ \vdots\\ \dot{\boldsymbol{x}}_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1&&&\\&\boldsymbol{J}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{J}_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{B}_k\end{pmatrix}\boldsymbol{u}, \tag{5.3.16}$$

$$\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2,\cdots,\boldsymbol{C}_k]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_k\end{pmatrix}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}, \tag{5.3.17}$$

其中 $\boldsymbol{x}_i\in\mathbb{R}^{n_i}$, $\boldsymbol{B}_i\in\mathbb{R}^{n_i\times r}$, $\boldsymbol{C}_i\in\mathbb{R}^{m\times n_i}$, $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$, $n_i\times n_i$ 约当块的结构如下,

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix}\lambda_i&1&&&\\&\lambda_i&1&&\\&&\lambda_i&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&\lambda_i\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n_i\times n_i},\ i=1,2,\cdots,k.$$

根据 PBH 能控性矩阵秩判定, 多变量系统 (5.3.16)~(5.3.17) 能控的充分必要条件是控制参数矩阵 $\boldsymbol{B}_i$ 的最后一行不全为零. 根据 PBH 能观测性矩阵秩判定, 多变量系统 (5.3.16)~(5.3.17)

能观测的充分必要条件是输出参数矩阵 $\boldsymbol{C}_i$ 的第一列不全为零. 对于 $i \neq j$, 如果 $\boldsymbol{J}_i$ 与 $\boldsymbol{J}_j$ 有相同特征值, 情况更复杂一些, 读者可以研究这种情形约当标准形的能控性和能观测性条件.

根据对偶原理, 读者可研究规范型、对角标准形和约当标准形的能观测性.

## 5.4 传递函数的最小实现

化传递函数为状态空间模型称为传递函数的实现. 最小实现就是对应于传递函数 (矩阵) 的最小阶次状态空间模型. 因为传递函数 (矩阵) 分子分母可能存在公因子, 产生零极点对消, 导致虚拟阶次, 使得其状态空间系统不可控或 (和) 不可观测. 本节讨论传递函数与其状态空间模型能控性和能观测性之间的关系, 以及单输入多输出系统、多输入单输出系统、多输入多输出系统状态空间模型的实现.

### 5.4.1 传递函数与能控性能观测性的关系

**1. 不可约传递函数的能控性实现**

分子分母不存在公因子的有理分式称为不可约传递函数.

设系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{2s+3}{s^2+3s+2}. \tag{5.4.1}$$

这是一个 $n=2$ 阶系统, 是一个不可约传递函数, 其对应的控制器规范型为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \tag{5.4.2}$$

$$y = [2,\ 3]\boldsymbol{x}. \tag{5.4.3}$$

因为这是控制器规范型, 故是能控的. 其能观测性矩阵的秩为

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{Q}_o] = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{cA} \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = 2 = n,$$

故这个控制器规范型 (5.4.2)∼(5.4.3) 也是能观测的.

**注 5.4.1** 从这个例子可以总结出一个一般结论: 传递函数分子分母不存在公因子, 其对应的状态空间模型是 **最小实现**, 最小实现既是能控的, 又是能观测的. 最小实现意味着传递函数具有最小阶次, 因此状态空间模型也具有最小阶次, 这就是最小实现名称的来历.

**2. 存在零极点对消的传递函数能控性实现**

式 (5.4.1) 传递函数分子分母同乘以因子 $(s-1)$, 得到

$$G(s) = \frac{(2s+3)(s-1)}{(s^2+3s+2)(s-1)} = \frac{2s^2+s-3}{s^3+2s^2-s-2}. \tag{5.4.4}$$

这是一个 $n=3$ 阶系统, 是一个存在零极点对消的传递函数, 零极点对消使得系统的阶次虚拟增高, 其对应的控制器规范型为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u, \tag{5.4.5}$$

$$y = [2,\ 1,\ -3]\boldsymbol{x}. \tag{5.4.6}$$

因为这也是控制器规范型, 故是能控的. 因此, 不管传递函数分子分母是否存在公因子, 其控制器规范型和能控性规范型都是能控的. 这个 $n=3$ 阶系统的能观测性矩阵的秩为

$$\text{rank}[\boldsymbol{Q}_o] = \text{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{cA} \\ \boldsymbol{cA}^2 \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix} = 2 < n,$$

故这个控制器规范型 (5.4.5)~(5.4.6) 是不能观测的.

**注 5.4.2**　从这个例子可以总结出, 如果一个传递函数分子分母存在公因子, 其状态空间模型不是最小实现, 非最小实现要么不能控, 要么不能观测, 要么既不能控又不能观测. 非最小实现如果是能控的, 那一定是不能观测的; 相反, 非最小实现如果是能观测的, 那一定是不能控的; 非最小实现也可能既不可控, 又不可观测.

传递函数 (5.4.4) 的部分分式展开为

$$G(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{0}{s-1}. \tag{5.4.7}$$

它对应的 3 阶对角标准形为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}u, \tag{5.4.8}$$

$$y = [1,\ 1,\ 0]\boldsymbol{x}. \tag{5.4.9}$$

这个标准形既不能控, 又不能观测. 当然, 传递函数 (5.4.7) 有无穷多个不能观测的、但能控的非最小实现

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}u, \text{ for any } \alpha \neq 0, \tag{5.4.10}$$

$$y = [1,\ 1,\ 0]\boldsymbol{x}, \tag{5.4.11}$$

和无穷多个不能控的、但能观测的非最小实现

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}u, \tag{5.4.12}$$

$$y = [1,\ 1,\ \alpha]\boldsymbol{x}, \text{ for any } \alpha \neq 0. \tag{5.4.13}$$

由对偶性原理可知, 一个不可约传递函数的实现是最小实现, 既可控又可观测. 一个存在公因子的传递函数的观测器规范型实现和能观测性规范型实现都是可观测的, 但必是不可控的.

对于有关传递函数与状态空间模型的能控性、能观测性的关系有下列结论.

(1) 传递函数 (传递矩阵) 的最小实现 (最小阶状态空间模型) 既是能控的, 又是能观测的.

(2) 如果一个状态空间模型对应的传递函数是不可约的 (分子分母无公因子), 那么这个状态空间模型是最小实现 (能控和能观测的); 否则, 或者是不能控的, 或者是不能观测的, 或者既不能控又不能观测.

(3) 如果一个状态空间模型是不能控的或 (和) 不能观测的, 那么其对应的传递函数分子分母一定存在公因子, 零极点相消后的系统阶次小于状态空间模型 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的维数.

(4) 传递函数分子分母无公因子 (阶次为 $n$), 对应的任何 $n$ 阶状态空间模型都是最小实现 (都是最小阶状态空间模型), 这个最小实现既是能控的又是能观测的.

### 5.4.2 单输入多输出系统的状态空间实现

将一个一般传递函数矩阵转化为状态空间模型是极其复杂的, 需要矩阵多项式的知识, 经过了几代控制科学家的努力, 获得了比较完美的多变量传递函数矩阵状态空间实现理论与方法. 这里简单讨论多变量系统的实现问题, 包括单输入多输出系统、多输入单输出系统、多输入多输出系统的状态空间模型实现.

大家知道, 对于单输入单输出系统, 其控制器规范型实现和观测器规范型实现中的参数与传递函数分母多项式和分子多项式的系数完全对应, 没有任何附加计算. 例如, 传递函数

$$G(s)=\frac{5s^2+6s+7}{s^3+2s^2+3s+4}$$

的控制器规范型实现为

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3 & -4\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}u,\\ \qquad y=[5,\ 6,\ 7]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.\end{cases}$$

从这个规范型实现可以看出, 单输入系统的控制系数向量 $\boldsymbol{b}$ 为一单位向量. 而单输入多输出系统的输入也为 1 个, 也可以将控制系数向量 $\boldsymbol{b}$ 化为一单位向量. 因此, 一种方法是将单输入多输出系统写为控制器规范型, 对每一个输出, 将传递函数阵中分子多项式的系数填入到对应的输出系数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的每一行中, 就得到单输入多输出系统的状态空间实现. 下面介绍这种方法.

**例 5.4.1** 写出下面传递函数阵的最小实现,

$$\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s+3}\\ \dfrac{5}{s+4}\end{pmatrix}=\frac{1}{s^2+7s+12}\begin{pmatrix}s+4\\ 5s+15\end{pmatrix}.$$

**解** 这是一个单输入 2 输出系统, 是一个二阶系统. 根据以上方法, 将分母多项式的系数填入到 $\boldsymbol{A}$ 矩阵中, $\boldsymbol{b}$ 为一单位向量, 将分子多项式的系数填入到 $\boldsymbol{C}$ 矩阵的对应行中, 就得到 $\boldsymbol{G}(s)$ 的最小实现 (控制器规范型):

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -12\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}u(t),\\ \begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}.\end{cases}$$

又, 传递函数阵

$$G(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{4}{s+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{pmatrix}3\\4s+8\end{pmatrix}$$

对应的最小实现 (控制器规范型) 为

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}u(t),\\ \begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}.\end{cases}$$

这种方法可以推广到一般单输入多输出系统. $m$ 个输出的单输入系统的传递矩阵是一个 $m$ 维向量,

$$G(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{b_1(s)}{a_1(s)}\\ \dfrac{b_2(s)}{a_2(s)}\\ \vdots\\ \dfrac{b_m(s)}{a_m(s)}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m,$$

$a_i(s)$ 和 $b_i(s)$ 是 $s$ 的多项式. 通常分母 $a_i(s)$ 是不同的, 进行通分, $G(s)$ 可以化下列形式,

$$G(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{b_{11}s^{n-1}+b_{12}s^{n-2}+\cdots+b_{1n}}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n}\\ \dfrac{b_{21}s^{n-1}+b_{22}s^{n-2}+\cdots+b_{2n}}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n}\\ \vdots\\ \dfrac{b_{m1}s^{n-1}+b_{m2}s^{n-2}+\cdots+b_{mn}}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n}\begin{pmatrix}b_{11}s^{n-1}+b_{12}s^{n-2}+\cdots+b_{1n}\\ b_{21}s^{n-1}+b_{22}s^{n-2}+\cdots+b_{2n}\\ \vdots\\ b_{m1}s^{n-1}+b_{m2}s^{n-2}+\cdots+b_{mn}\end{pmatrix}.$$

对应的控制器规范型实现为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\\ \vdots\\ \dot{x}_n(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}u(t),$$

$$\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ \vdots\\ y_m(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}. \tag{5.4.14}$$

我们也可以通过直接定义状态变量来获得状态空间模型.

**例 5.4.2** 设系统的传递函数阵为

$$G(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{7s+10}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{8}{s+6}\end{pmatrix}.$$

直接定义状态变量, 写出其状态空间模型.

**解** 这是一个单输入 2 输出系统, 其输入输出关系为

$$\begin{aligned}y_1&=\frac{7s+10}{(s+1)(s+2)}u\\ &=\frac{3u}{s+1}+\frac{4u}{s+2},\\ y_2&=\frac{8}{s+6}u.\end{aligned}$$

传递函数阵分母通分后是一个 3 阶系统, 故状态变量有 3 个, 令

$$x_1=\frac{u}{s+1},\quad x_2=\frac{u}{s+2},\quad x_3=\frac{u}{s+6},$$

或

$$\dot{x}_1=-x_1+u,\quad \dot{x}_2=-2x_2+u,\quad \dot{x}_3=-6x_3+u.$$

系统的输出可以表示为

$$\begin{aligned}y_1&=3x_1+4x_2,\\ y_2&=8x_3.\end{aligned}$$

因此系统的最小实现状态空间模型为

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}u(t),\\ \begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4&0\\0&0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}.\end{cases}$$

### 5.4.3 多输入单输出系统的状态空间实现

因为单输入多输出系统的对偶系统是多输入单输出系统. 根据对偶性原理, 可以将多输入单输出系统传递矩阵写为观测器规范型最小实现.

传递函数

$$G(s)=\frac{5s^2+6s+7}{s^3+2s^2+3s+4}$$

的观测器规范型实现为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} u, \\ y = [1,\ 0,\ 0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

从这个规范型实现可以看出, 单输出系统的输出系数向量 $\boldsymbol{c}$ 为一单位行向量. 而多输入单输出系统的输出也为 1 个, 也可以将输出系数向量 $\boldsymbol{c}$ 化为一单位行向量. 因此, 一种方法是将多输入单输出系统写为观测器规范型, 对每一个输出, 将传递函数阵中分子多项式的系数填入到对应的输入系数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的每一列中, 就得到多输入单输出系统的观测器规范型实现. 下面介绍这种方法.

**例 5.4.3** 写出下列传递函数阵的最小实现,

$$\boldsymbol{G}(s) = \left[\frac{1}{s+3},\ \frac{5}{s+4}\right] = \frac{[s+4,\ 5s+15]}{s^2+7s+12}.$$

**解** 这是一个 2 输入单输出系统, 是一个二阶系统. 根据以上方法, 其对应的最小实现 (观测器规范型) 为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \\ y(t) = [1,\ 0] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

又, 传递函数阵

$$\boldsymbol{G}(s) = \left[\frac{3}{(s+1)(s+2)},\ \frac{4}{s+1}\right] = \frac{[3,\ 4s+8]}{s^2+3s+2}$$

对应的观测器最小实现为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \\ y(t) = [1,\ 0] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

这种方法可以推广到一般多输入单输出系统. $r$ 输入单输出系统的传递矩阵是一个 $r$ 维行向量,

$$\boldsymbol{G}(s) = \left[\frac{b_1(s)}{a_1(s)}, \frac{b_2(s)}{a_2(s)},\ \cdots,\ \frac{b_r(s)}{a_r(s)}\right] \in \mathbb{R}^{1\times r},$$

$a_i(s)$ 和 $b_i(s)$ 是 $s$ 的多项式. 通常分母 $a_i(s)$ 是不同的, 进行通分, $\boldsymbol{G}(s)$ 可以化下列形式,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}(s) &= \left[\frac{b_{11}s^{n-1}+b_{12}s^{n-2}+\cdots+b_{1n}}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n},\ \cdots,\ \frac{b_{r1}s^{n-1}+b_{r2}s^{n-2}+\cdots+b_{rn}}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n}\right] \\ &= \frac{[b_{11}s^{n-1}+b_{12}s^{n-2}+\cdots+b_{1n},\ \cdots,\ b_{r1}s^{n-1}+b_{r2}s^{n-2}+\cdots+b_{rn}]}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n}. \end{aligned}$$

将分母多项式的系数填入到系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中, $\boldsymbol{c}$ 为一单位行向量, 将分子多项式的系数填入到控制系数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的每一列中, 就得到对应的观测器规范型实现:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ -a_3 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{r1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{r2} \\ b_{13} & b_{23} & \cdots & b_{r3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{pmatrix},$$

$$y(t) = [1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

我们也可以通过直接定义状态变量来获得状态空间模型.

**例 5.4.4** 设系统的传递函数阵为

$$\boldsymbol{G}(s) = \left[ \frac{7s+10}{(s+1)(s+2)},\ \frac{8}{s+6} \right].$$

直接定义状态变量, 写出其状态空间模型.

**解** 这是一个 2 输入单输出系统, 其输入输出关系为

$$\begin{aligned} y &= \frac{7s+10}{(s+1)(s+2)} u_1 + \frac{8}{s+6} u_2 \\ &= \frac{3u_1}{s+1} + \frac{4u_1}{s+2} + \frac{8}{s+6} u_2. \end{aligned}$$

这是一个 3 阶系统, 故状态变量有 3 个, 令

$$x_1 = \frac{u_1}{s+1}, \quad x_2 = \frac{u_1}{s+2}, \quad x_3 = \frac{1.6u_2}{s+6},$$

或

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u_1, \quad \dot{x}_2 = -2x_2 + u_1, \quad \dot{x}_3 = -6x_3 + 1.6u_2.$$

系统的输出可以表示为

$$y = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3.$$

因此系统的最小实现状态空间模型为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \\ y(t) = [3,\ 4,\ 5] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

### 5.4.4　多输入多输出系统的状态空间实现

传递矩阵的最小状态空间实现具有无穷的魅力, 几乎是硕士研究生和博士研究生入学考试的必备内容. 它涉及到多项式矩阵理论, 需要对传递矩阵进行左分解或右分解, 将传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s) \in \mathbb{R}^{m\times r}$ 表示为一个多项式矩阵与另一个多项式矩阵逆的积的形式. 这称为多项式矩阵互质分解, 即 **左矩阵分式描述** (Left Matrix Fraction Description, **左 MFD**) 和 **右矩阵分式描述** (Right Matrix Fraction Description, **右 MFD**).

左矩阵分式描述可表示为

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{D}^{-1}(s)\boldsymbol{N}(s), \tag{5.4.15}$$

其中 $\boldsymbol{D}(s) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 和 $\boldsymbol{N}(s) \in \mathbb{R}^{m\times r}$ 是两个互质多项式, 即只有行列式为常数的公因子多项式矩阵 (行列式为非零常数的多项式矩阵称为 **单模阵**).

右矩阵分式描述可表示为

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{N}(s)\boldsymbol{D}^{-1}(s), \tag{5.4.16}$$

其中 $\boldsymbol{N}(s) \in \mathbb{R}^{m\times r}$ 和 $\boldsymbol{D}(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ 是两个互质多项式, 即只有单模阵公因子多项式矩阵. 注意到式 (5.4.15) 与式 (5.4.16) 中多项式是不同的, 维数也不一样.

利用左 MFD 或右 MFD 分解获得传递矩阵的最小状态空间模型, 运算极其复杂, 这里不进行讨论. 下面用例子说明本书作者给出的一种简便方法获得传递矩阵的最小实现.

**例 5.4.5**　假设考虑 2 输入 2 输出系统的传递矩阵为

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{7s+10}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{5}{s+3} \\ \dfrac{8s+14}{(s+1)(s+4)} & \dfrac{9}{s+2} \end{pmatrix}.$$

写出其最小状态空间实现.

**解**　将 $\boldsymbol{G}(s)$ 化为部分分式形式:

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{s+1} + \dfrac{4}{s+2} & \dfrac{5}{s+3} \\ \dfrac{2}{s+1} + \dfrac{6}{s+4} & \dfrac{9}{s+2} \end{pmatrix}.$$

其输入输出关系为

$$y_1 = \left[\frac{3}{s+1} + \frac{4}{s+2}\right] u_1 + \frac{5}{s+3} u_2,$$

$$y_2 = \left[\frac{2}{s+1} + \frac{6}{s+4}\right] u_1 + \frac{9}{s+2} u_2,$$

或

$$y_1 = \frac{3u_1}{s+1} + \frac{4u_1}{s+2} + \frac{5u_2}{s+3},$$

$$y_2 = \frac{2u_1}{s+1} + \frac{6u_1}{s+4} + \frac{9u_2}{s+2}.$$

观察 $y_1$ 和 $y_2$ 中第 1 个输入 $u_1$ 不同分母的次数, 第 2 个输入 $u_2$ 不同分母的次数, 可知这是一个 5 阶系统, 定义 5 个状态变量:

$$x_1=\frac{u_1}{s+1},\quad x_2=\frac{u_1}{s+2},\quad x_3=\frac{u_1}{s+4},\quad x_4=\frac{u_2}{s+3},\quad x_5=\frac{u_2}{s+2}.$$

或

$$\dot{x}_1=-x_1+u_1,\quad \dot{x}_2=-2x_2+u_1,\quad \dot{x}_3=-4x_3+u_1,$$

$$\dot{x}_4=-3x_4+u_2,\quad \dot{x}_5=-2x_5+u_2.$$

系统的输出可以表示为

$$y_1=3x_1+4x_2+5x_4,$$

$$y_2=2x_1+6x_3+9x_5.$$

因此系统的最小实现状态空间模型为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\\ \dot{x}_4(t)\\ \dot{x}_5(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0\\0&-2&0&0&0\\0&0&-4&0&0\\0&0&0&-3&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_4(t)\\x_5(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\1&0\\0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4&0&5&0\\2&0&6&0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_4(t)\\x_5(t)\end{pmatrix}.$$

## 5.5 线性系统的能控性与能观测性结构分解

从前述系统能控和系统能观测定义看, 系统可控和系统可观测指系统所有状态整体都可控、都可观测, 而系统不可控 (不可观测) 并不是指系统所有状态都不可控 (不可观测), 而是指有的状态不可控 (不可观测), 意即系统有的状态是可控的 (可观测的). 那么, 是否存在一线性变换把系统分解为可控 (可观测) 子系统与不可控 (不可观测) 子系统两部分, 以至于可控子系统的所有状态都是能控的, 不可控子系统的所有状态都是不可控的? 答案是肯定的. 这种分解称为系统的能控性结构分解 (能观测性结构分解). 本节将介绍能控性结构分解和能观测性结构分解.

### 5.5.1 系统能控性结构分解

考虑下列状态空间模型,

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t),\end{cases}\tag{5.5.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ 为状态向量, $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbb{R}^r$ 为输入向量, $\boldsymbol{y}(t)\in\mathbb{R}^m$ 为输出向量, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{D}\in\mathbb{R}^{m\times r}$ 均为常数矩阵.

假设系统能控性矩阵 $\boldsymbol{Q}_c:=[\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]\in\mathbb{R}^{n\times(nr)}$ 的秩为 $n_1<n$ ($n$ 为状态向量的维数), 那么系统不 (完全) 能控, 即系统有能控状态和不能控状态, 能控状态数目

为 $n_1$, 不能控状态数目为 $n-n_1$. 因此, 是否存在一线性变换把系统分解为可控子系统与不可控子系统两部分, 答案是肯定的. 这可叙述为下列定理.

**定理 5.5.1　能控性结构分解定理** (Controllability Structure Decomposition Theorem)

对于线性系统 (5.5.1), 如果系统能控性矩阵 $\boldsymbol{Q}_c$ 的秩 $\text{rank}[\boldsymbol{Q}_c]=n_1<n$, 那么存在线性变换: $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{T}_c\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{T}_c\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_c(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}$ ($\boldsymbol{T}_c$ 为非奇异矩阵), 把系统 (5.5.1) 分解为能控与不能控结构形式:

$$\left\{\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_c(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}&=\boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_c\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ &=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_c & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{\bar{c}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_c(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_c\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{y}(t)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}_c\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\\ &=[\boldsymbol{C}_c,\boldsymbol{C}_{\bar{c}}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_c(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t),\end{aligned}\right. \tag{5.5.2}$$

其中下标 $c$ 表示可控之意 (取自 Controllable 的第 1 个字母), 下标 $\bar{c}$ 表示不可控之意, 其他量定义如下,

$\boldsymbol{x}_c(t)\in\mathbb{R}^{n_1}$ 为可控状态向量, $\boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)\in\mathbb{R}^{n-n_1}$ 为不可控状态向量,

$\boldsymbol{A}_c\in\mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $\boldsymbol{A}_{12}\in\mathbb{R}^{n_1\times(n-n_1)}$, $\boldsymbol{A}_{\bar{c}}\in\mathbb{R}^{(n-n_1)\times(n-n_1)}$,

$\boldsymbol{B}_c\in\mathbb{R}^{n_1\times r}$, $\boldsymbol{C}_c\in\mathbb{R}^{m\times n_1}$, $\boldsymbol{C}_{\bar{c}}\in\mathbb{R}^{m\times(n-n_1)}$,

$(\boldsymbol{A}_c,\boldsymbol{B}_c)$ 是能控的,

变换矩阵 $\boldsymbol{T}_c$ 是按下列方式构成的: $\boldsymbol{Q}_c$ 的 $n_1$ 个线性无关的列构成 $\boldsymbol{T}_c$ 的前 $n_1$ 列, $\boldsymbol{Q}_c$ 的后 $n-n_1$ 列任意选取, 使得 $\boldsymbol{T}_c$ 是可逆矩阵 (在满足可逆时, 尽可能多一些 0 元, 使计算方便).

**注 5.5.1**　系统 (5.5.1) 的传递矩阵等于变换后的能控子系统 $[\boldsymbol{A}_c,\boldsymbol{B}_c,\boldsymbol{C}_c,\boldsymbol{D}]$ 的传递矩阵, 即

$$\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}_c(s\boldsymbol{I}_{n_1}-\boldsymbol{A}_c)^{-1}\boldsymbol{B}_c+\boldsymbol{D}.$$

变换后的系统 (5.5.2) 能控性结构分解如图 5.5.1 所示. 图 5.5.1 上方部分为可控子系统, 其状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_c(t)=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x}_c(t)+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)+\boldsymbol{B}_c\boldsymbol{u}(t), \tag{5.5.3}$$

下方为不可控子系统, 其中状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}}(t)=\boldsymbol{A}_{\bar{c}}\boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t). \tag{5.5.4}$$

从信号流向看, 不可控子系统与系统输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 无关, 故这部分状态 $\boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)$ 不可控. 系统的输出方程为

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}_c\boldsymbol{x}_c(t)+\boldsymbol{C}_{\bar{c}}\boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t). \tag{5.5.5}$$

可控子系统 (5.5.3) 和 (5.5.5) 的状态空间表达式为

$$\left\{\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_c(t)&=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x}_c(t)+\boldsymbol{B}_c\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t),\\ \boldsymbol{y}(t)&=\boldsymbol{C}_c\boldsymbol{x}_c(t)+[\boldsymbol{C}_{\bar{c}}\boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)].\end{aligned}\right. \tag{5.5.6}$$

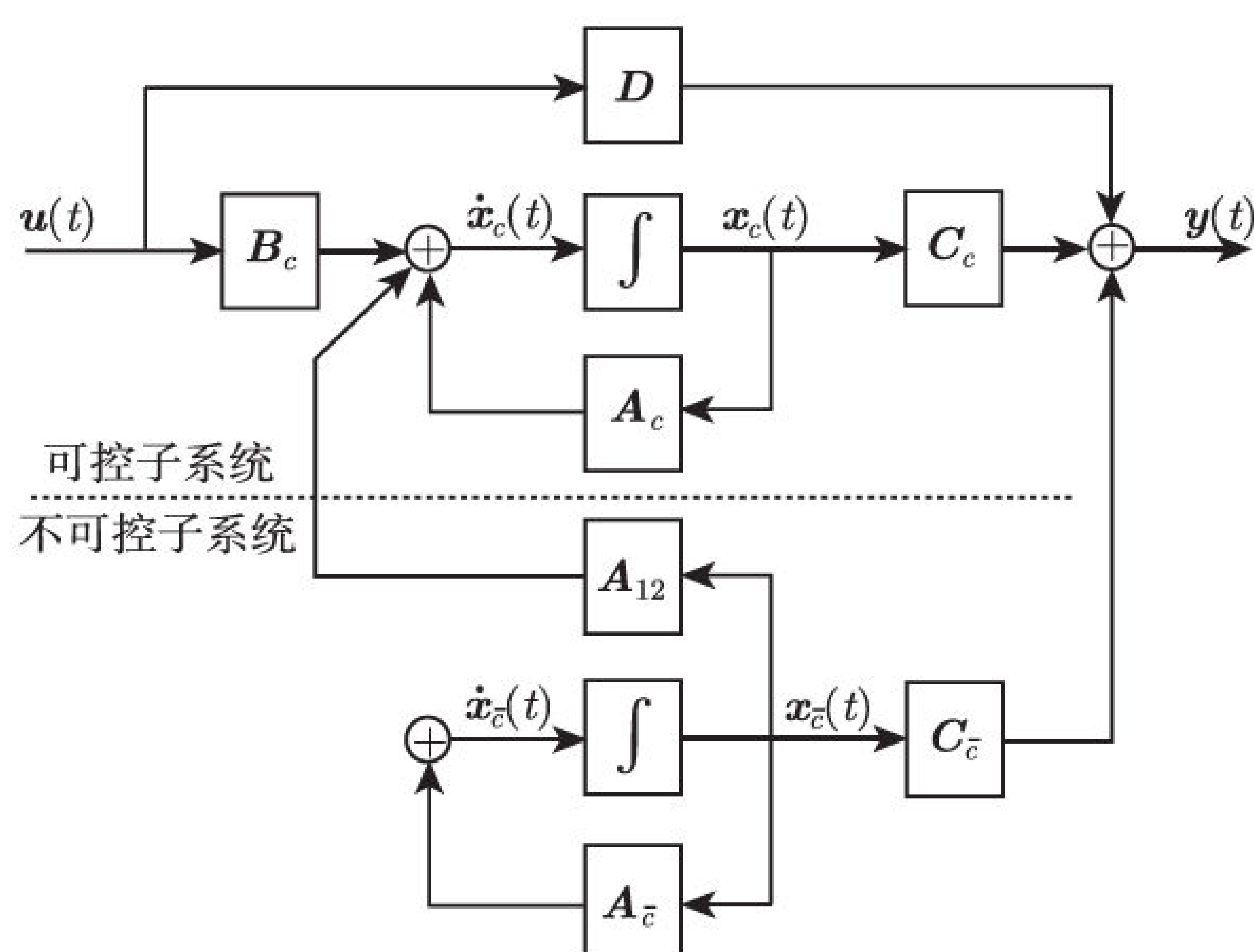



图 5.5.1 能控性分解结构图

下面给出变换后系统的传递矩阵和能控性结构分解例子.

**1. 传递函数**

变换后系统 (5.5.2) 的传递矩阵为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}_c(s) &= [\boldsymbol{C}_c, \boldsymbol{C}_{\bar{c}}]\begin{pmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c & -\boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{0} & s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\bar{c}} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_c \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \boldsymbol{D} \\
&= [\boldsymbol{C}_c, \boldsymbol{C}_{\bar{c}}]\begin{pmatrix} (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c)^{-1} & (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c)^{-1}\boldsymbol{A}_{12}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\bar{c}})^{-1} \\ \boldsymbol{0} & (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\bar{c}})^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_c \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \boldsymbol{D} \\
&= [\boldsymbol{C}_c, \boldsymbol{C}_{\bar{c}}]\begin{pmatrix} (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c)^{-1}\boldsymbol{B}_c \\ (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\bar{c}})^{-1}\boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \boldsymbol{D} \\
&= \boldsymbol{C}_c(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c)^{-1}\boldsymbol{B}_c + \boldsymbol{C}_{\bar{c}}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\bar{c}})^{-1}\boldsymbol{0} + \boldsymbol{D} \\
&= \frac{\boldsymbol{C}_c \,\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c]\boldsymbol{B}_c}{\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c]} + \frac{\boldsymbol{C}_{\bar{c}}\,\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\bar{c}}]\boldsymbol{0}}{\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\bar{c}}]} + \boldsymbol{D} \qquad (5.5.7) \\
&= \frac{\boldsymbol{C}_c \,\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c]\boldsymbol{B}_c}{\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c]} + \boldsymbol{D}. \qquad (5.5.8)
\end{aligned}$$

变换后系统 (5.5.2) 的特征多项式为

$$p_c(s) = \det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c]\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\bar{c}}], \qquad (5.5.9)$$

其中 $\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c]$ 为可控子系统的 $n_1$ 次特征多项式, $\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\bar{c}}]$ 为不可控子系统的 $(n-n_1)$ 次特征多项式.

原系统 (5.5.1) 为一 $n$ 阶系统, 其传递矩阵为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}(s) &= \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \\
&= \frac{\boldsymbol{C}\,\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{B}}{\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]} + \boldsymbol{D}, \qquad (5.5.10)
\end{aligned}$$

其 ($n$ 次) 特征多项式为

$$p(s) = \det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]. \qquad (5.5.11)$$

从能控性结构分解可以得到下列结论.

(1) 因为非奇异线性变换不改变系统的特征多项式, 所以有

$$p(s)=p_c(s),$$

即系统的特征多项式等于可控子系统特征多项式 $\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c]$ 与不可控子系统特征多项式 $\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\bar{c}}]$ 的乘积.

(2) 又因为非奇异线性变换不改变系统的传递矩阵, 比较式 (5.5.10) 与式 (5.5.7) 或式 (5.5.8) 可知, **系统的传递矩阵等于可控子系统的传递矩阵**, 即 $\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{G}_c(s)$. 但是 $\boldsymbol{G}(s)$ 分母为 $n$ 次多项式, $\boldsymbol{G}_c(s)$ 分母为 $n_1$ 次多项式, 次数不相等, 原因是系统不可控 (或不可观测), 那么状态空间模型 (5.5.1) 不是传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 的最小实现, 也就是说 $\boldsymbol{G}(s)$ 的分子和分母存在公因子.

**2. 能控性结构分解例子**

**例 5.5.1** 设系统的状态空间模型为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=[1,\ 1,\ 1,\ 1]\boldsymbol{x}+2u(t),\end{cases}$$

对其进行能控性结构分解.

**解** 对于这个系统, 我们有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{c}=[1,\ 1,\ 1,\ 1],\quad d=2.$$

这个系统的能控性矩阵为

$$\boldsymbol{Q}_c:=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{b}]=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&2&4&8\end{pmatrix}.$$

它的秩为 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{Q}_c]=2<n=4$, 故系统不能控. 从状态空间表达式看, 这个系统的每一个状态 $x_i$ 都与系统输入 $u$ 有关, 又与系统输出 $y$ 有关, 但这个系统既不能控, 又不能观测.

取 $\boldsymbol{Q}_c$ 的前 2 列作为变换矩阵 $\boldsymbol{T}_c$ 的前两列, $\boldsymbol{T}_c$ 后两列任选, 保证 $\boldsymbol{T}_c$ 非奇异即可, 因此可取

$$\boldsymbol{T}_c:=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&2&0&0\\1&2&0&1\end{pmatrix}.$$

因此能控性结构分解为

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_c(t) \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} &= \boldsymbol{T}_c^{-1}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_c\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}u(t)] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_c(t) \\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} + \boldsymbol{b}u(t) \right\} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_c(t) \\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \right\} \\
&= \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_c(t) \\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right) u(t), \\
y(t) &= \boldsymbol{c}\boldsymbol{T}_c\bar{\boldsymbol{x}}(t)+du(t) \\
&= [1,\ 1,\ 1,\ 1] \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_c(t) \\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} + 2u(t) \\
&= [4,\ 6,\ 1,\ 1] \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_c(t) \\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} + 2u(t).
\end{aligned}
$$

**例 5.5.2** 设线性时不变系统如下,

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\
y(t) &= [1,\ -1,\ 1]\boldsymbol{x}(t).
\end{aligned}
$$

判断其能控性, 若不完全能控, 试将该系统按照能控性进行结构分解.

**解** 该系统能控性判别矩阵

$$
\boldsymbol{Q}_c = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}
$$

的秩为 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{Q}_c] = 2 < n = 3$, 所以系统是不完全能控的. 选取

$$
\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

构造非奇异变换矩阵

$$
\boldsymbol{T}_c = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},
$$

其中 $\boldsymbol{T}_3$ 的选取是任意的, 只要使得 $\boldsymbol{T}_c$ 为可逆矩阵 (原则上是尽可能多的 0 元, 使计算方便).

在新状态空间中各个系数矩阵分别为

$$\bar{A}=T_c^{-1}AT_c=\begin{pmatrix}3&0&1\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&0\\1&-4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-4&2\\1&4&-2\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$\bar{b}=T_c^{-1}b=\begin{pmatrix}3&0&1\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\bar{c}=cT_c=[1,\ -1,\ 1]\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&3&0\end{pmatrix}=[1,\ 2,\ -1].$$

因此能控性结构分解的表达式为

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_c(t)\\\dot{x}_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-4&2\\1&4&-2\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_c(t)\\x_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}u(t),\\ \quad y(t)\quad=[1,\ 2,\ -1]\begin{pmatrix}x_c(t)\\x_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}.\end{cases}$$

### 5.5.2 系统能观测性结构分解

考虑下列状态空间模型,

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\\y(t)=Cx(t)+Du(t),\end{cases}\tag{5.5.12}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 为状态向量, $u(t)\in\mathbb{R}^r$ 为输入向量, $y(t)\in\mathbb{R}^m$ 为输出向量, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times r}$, $C\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $D\in\mathbb{R}^{m\times r}$ 均为常数矩阵.

系统能观测性结构分解对偶于能控性结构分解, 这里不加证明地给出能观测性结构分解定理.

**定理 5.5.2 能观测性结构分解定理** (Observability Structure Decomposition Theorem) 对于系统 (5.5.12), 如果其能观测性矩阵

$$Q_o=\begin{pmatrix}C\\CA\\\vdots\\CA^{n-1}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(mn)\times n}$$

的秩 $\text{rank}[Q_o]=n_2<n$, 那么有 $n_2$ 个状态 $x_o\in\mathbb{R}^{n_2}$ 是能观测的, $n-n_2$ 个状态 $x_{\bar{o}}\in\mathbb{R}^{n-n_2}$ 是不能观测的. 对式 (5.5.12) 进行线性变换: $x(t)=T_o\bar{x}(t)=T_o\begin{pmatrix}x_o(t)\\x_{\bar{o}}(t)\end{pmatrix}$, $T_o\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为非奇异矩阵, 则可以把系统分解为

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_o(t)\\\dot{x}_{\bar{o}}(t)\end{pmatrix}=T_o^{-1}AT_o\bar{x}(t)+T_o^{-1}Bu(t)\\ \qquad\qquad=\begin{pmatrix}A_o&0\\A_{21}&A_{\bar{o}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_o(t)\\x_{\bar{o}}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_o\\B_{\bar{o}}\end{pmatrix}u(t),\\ \quad y(t)=CT_o\bar{x}(t)+Du(t)\\ \qquad\qquad=[C_o,\ 0]\begin{pmatrix}x_o(t)\\x_{\bar{o}}(t)\end{pmatrix}+Du(t),\end{cases}\tag{5.5.13}$$

其中下标 $o$ 表示可观测之意 (取自 observable 的第 1 个字母), 下标 $\bar{o}$ 表示不可观测之意, 其他量定义如下,

$\boldsymbol{x}_o(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ 为可观测状态向量, $\boldsymbol{x}_{\bar{o}}(t) \in \mathbb{R}^{n-n_2}$ 为不可观测状态向量,

$\boldsymbol{A}_o \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $\boldsymbol{A}_{21} \in \mathbb{R}^{(n-n_2)\times n_2}$, $\boldsymbol{A}_{\bar{o}} \in \mathbb{R}^{(n-n_2)\times(n-n_2)}$,

$\boldsymbol{B}_o \in \mathbb{R}^{n_2 \times r}$, $\boldsymbol{B}_{\bar{o}} \in \mathbb{R}^{(n-n_2)\times r}$, $\boldsymbol{C}_o \in \mathbb{R}^{m\times n_2}$,

$(\boldsymbol{C}_o, \boldsymbol{A}_o)$ 是能观测的,

变换矩阵 $\boldsymbol{T}_o^{-1}$ 按下列方式构成: $\boldsymbol{Q}_o$ 的 $n_2$ 个线性无关的行构成 $\boldsymbol{T}_o^{-1}$ 的前 $n_2$ 行, $\boldsymbol{T}_o^{-1}$ 的后 $n-n_2$ 行任意选取, 使得 $\boldsymbol{T}_o$ 是可逆矩阵 (在满足可逆时, 尽可能多一些 0 元, 使计算方便).

**注 5.5.2**　系统 (5.5.12) 的传递矩阵等于变换后的能观测子系统 $[\boldsymbol{A}_o, \boldsymbol{B}_o, \boldsymbol{C}_o, \boldsymbol{D}]$ 的传递矩阵, 即

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}_o(s\boldsymbol{I}_{n_2}-\boldsymbol{A}_o)^{-1}\boldsymbol{B}_o+\boldsymbol{D}.$$

变换后的系统 (5.5.13) 能观测性结构分解如图 5.5.2 所示. 图 5.5.2 上方部分为可观测子系统, 下方为不可观测子系统. 从信号流向看, 不可观测子系统的状态 $\boldsymbol{x}_{\bar{o}}(t)$ 并不流向系统输出 $\boldsymbol{y}(t)$, 即 $\boldsymbol{x}_{\bar{o}}(t)$ 与系统输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 无关, 故这部分状态 $\boldsymbol{x}_{\bar{o}}(t)$ 不可观测.

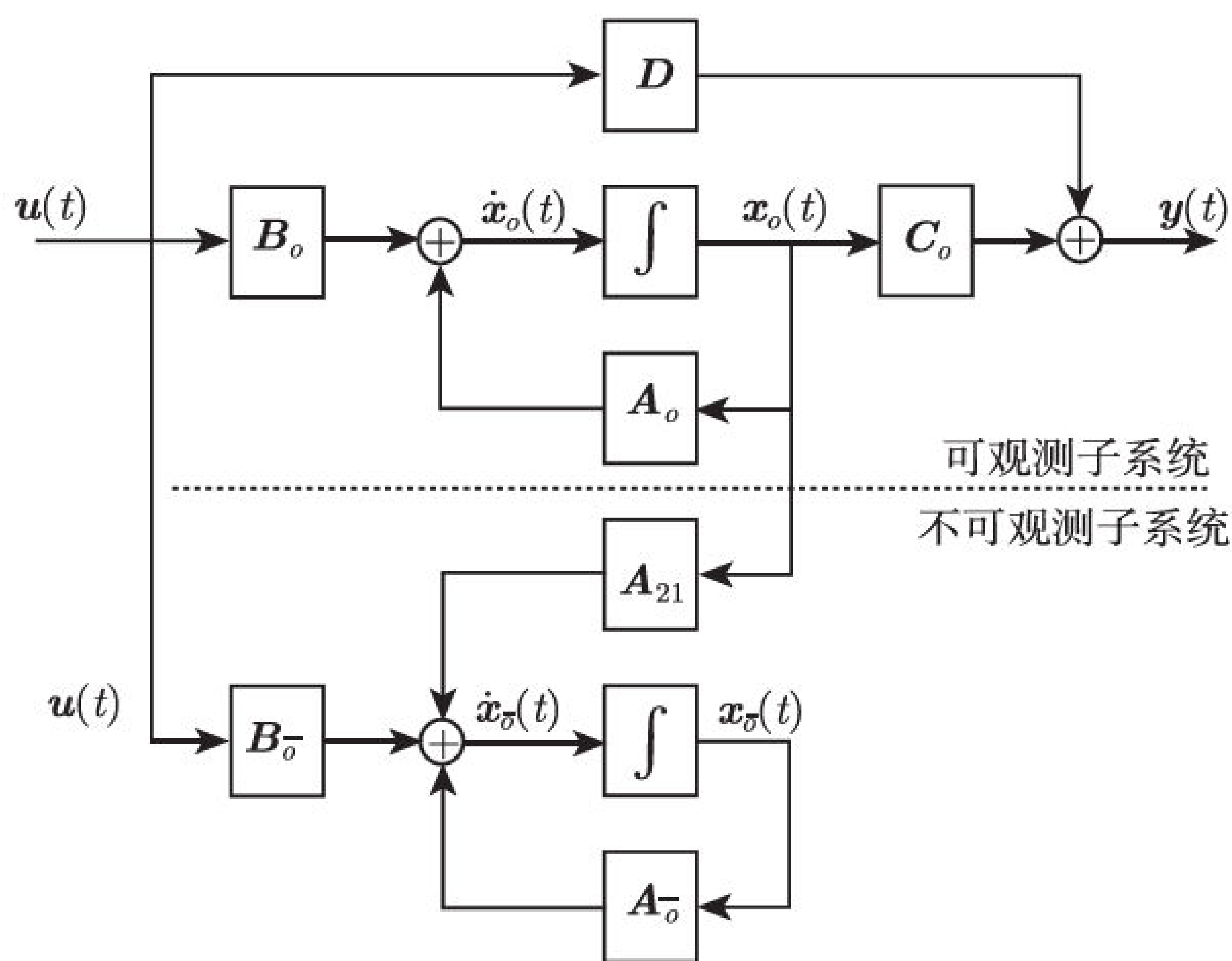



图 5.5.2　能观测性分解结构图

**例 5.5.3**　设线性时不变系统如下,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t),$$

$$y(t) = [1,\ -1,\ 1]\boldsymbol{x}(t).$$

判断其能观测性, 若不完全能观测, 试将该系统进行能观测性结构分解.

**解**　该系统能观测性矩阵

$$\boldsymbol{Q}_o = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{cA} \\ \boldsymbol{cA}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

的秩 $\text{rank}[\boldsymbol{Q}_o]=2<n=3$, 故系统是状态不完全能观测的. 选择

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{c}=[1,\ -1,\ 1],\\ \boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{cA}=[2,\ -1,\ 2],\\ \boldsymbol{T}_3=[1,\ 0,\ 0].\end{cases}$$

构造非奇异变换矩阵

$$\boldsymbol{T}_o^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{T}_o=\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{T}_3$ 的选取是任意的, 只要使得 $\boldsymbol{T}_o^{-1}$ 为可逆矩阵 (原则上是尽可能多的 0 元, 使计算方便).

在新状态空间中各个系数矩阵分别为

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_o=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&0\\1&-4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&1&0\\-3&1&2\end{pmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{c}\boldsymbol{T}_o=[1,\ -1,\ 1]\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}=[1,\ 0,\ 0].$$

因此能观测性结构分解的表达式为

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_o(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{o}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&1&0\\-3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_o(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{o}}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t),\\ y(t)=[1,\ 0,\ 0]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_o(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{o}}(t)\end{pmatrix}.\end{cases}$$

### 5.5.3 系统能控性能观测性结构分解

考虑下列状态空间模型,

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t),\end{cases}\tag{5.5.14}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ 为状态向量, $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbb{R}^r$ 为输入向量, $\boldsymbol{y}(t)\in\mathbb{R}^m$ 为输出向量, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{D}\in\mathbb{R}^{m\times r}$ 均为常数矩阵.

假设系统能控性矩阵 $\boldsymbol{Q}_c=[\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]\in\mathbb{R}^{n\times(nr)}$ 的秩 $\text{rank}[\boldsymbol{Q}_c]=n_1<n$ ($n$ 为状态向量的维数), 那么系统不完全能控, 即系统有能控状态和不能控状态, 能控状态数目为 $n_1$, 不能控状态数目为 $n-n_1$. 又假设系统能观测性矩阵

$$\boldsymbol{Q}_o=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\\ \vdots\\ \boldsymbol{CA}^{n-1}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(mn)\times n}$$

的秩 $\text{rank}[\boldsymbol{Q}_o] = n_2 < n$, 那么系统不完全能观测, 即系统有能观测状态和不能观测状态, 能观测状态数目为 $n_2$, 不能观测状态数目为 $n - n_2$.

根据以上能控性结构分解和能观测性结构分解, 可以断定存在一线性变换把系统状态分解为四部分: 既能控又能观测、能控不能观测、不能控能观测、不能控不能观测, 分别用 $\boldsymbol{x}_{co}(t)$, $\boldsymbol{x}_{c\bar{o}}(t)$, $\boldsymbol{x}_{\bar{c}o}(t)$, $\boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t)$ 表示. 这可叙述为下列定理.

**定理 5.5.3 能控性能观测性结构分解定理** (Controllability Observability Structure Decomposition Theorem)

对于线性系统 (5.5.14), 设系统能控性矩阵 $\boldsymbol{Q}_c$ 的秩 $\text{rank}[\boldsymbol{Q}_c] = n_1 < n$, 能观测性矩阵 $\boldsymbol{Q}_o$ 的秩 $\text{rank}[\boldsymbol{Q}_o] = n_2 < n$, 那么存在线性变换: $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ ($\boldsymbol{T}$ 为非奇异矩阵), 把系统 (5.5.1) 分解为

$$\left\{\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_{co}(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{c\bar{o}}(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o}(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}\bar{o}}(t)\end{pmatrix} &= \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{co} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{13} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{c\bar{o}} & \boldsymbol{A}_{23} & \boldsymbol{A}_{24}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{\bar{c}o} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{43} & \boldsymbol{A}_{\bar{c}\bar{o}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{co}(t)\\ \boldsymbol{x}_{c\bar{o}}(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}o}(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{co}\\ \boldsymbol{B}_{c\bar{o}}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\\ &= [\boldsymbol{C}_{co},\ \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{C}_{\bar{c}o},\ \boldsymbol{0}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{co}(t)\\ \boldsymbol{x}_{c\bar{o}}(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}o}(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t)\end{pmatrix} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t),\end{aligned}\right. \tag{5.5.15}$$

其中

$\boldsymbol{x}_{co}(t) \in \mathbb{R}^{n_{11}}$ 为可控可观测状态向量,

$\boldsymbol{x}_{c\bar{o}}(t) \in \mathbb{R}^{n_{12}}$ 为可控不可观测状态向量,

$\boldsymbol{x}_{\bar{c}o}(t) \in \mathbb{R}^{n_{21}}$ 为不可控可观测状态向量,

$\boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t) \in \mathbb{R}^{n_{22}}$ 为不可控不可观测状态向量,

$\boldsymbol{A}_{co} \in \mathbb{R}^{n_{11}\times n_{11}}$, $\boldsymbol{A}_{c\bar{o}} \in \mathbb{R}^{n_{12}\times n_{12}}$, $\boldsymbol{A}_{\bar{c}o} \in \mathbb{R}^{n_{21}\times n_{21}}$, $\boldsymbol{A}_{\bar{c}\bar{o}} \in \mathbb{R}^{n_{22}\times n_{22}}$,

$\boldsymbol{B}_{co} \in \mathbb{R}^{n_{11}\times r}$, $\boldsymbol{B}_{c\bar{o}} \in \mathbb{R}^{n_{12}\times r}$, $\boldsymbol{C}_{co} \in \mathbb{R}^{m\times n_{11}}$, $\boldsymbol{C}_{\bar{c}o} \in \mathbb{R}^{m\times n_{21}}$,

$\boldsymbol{A}_{ij}$ 为适当维数的常数矩阵, $n_{11} + n_{12} = n_1$, $n_{21} + n_{22} = n_2$, $n_{11} + n_{12} + n_{21} + n_{22} = n$.

**注 5.5.3** 变换后的系统传递函数阵等于能控能观测子系统 $(\boldsymbol{A}_{co}, \boldsymbol{B}_{co}, \boldsymbol{C}_{co}, \boldsymbol{D})$ 的传递函数阵, 即

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}_{co}(s\boldsymbol{I}_{n_{11}} - \boldsymbol{A}_{co})^{-1}\boldsymbol{B}_{co} + \boldsymbol{D}.$$

变换后的系统 (5.5.15) 能控性能观测性结构分解如图 5.5.3 所示, 它将系统分解为可控可观测子系统、可控不可观测子系统、不可控可观测子系统、不可控不可观测子系统 4 个部分, 从信号流向看, 可以看出输入与状态变量的能控关系, 状态变量与输出的能观测关系.

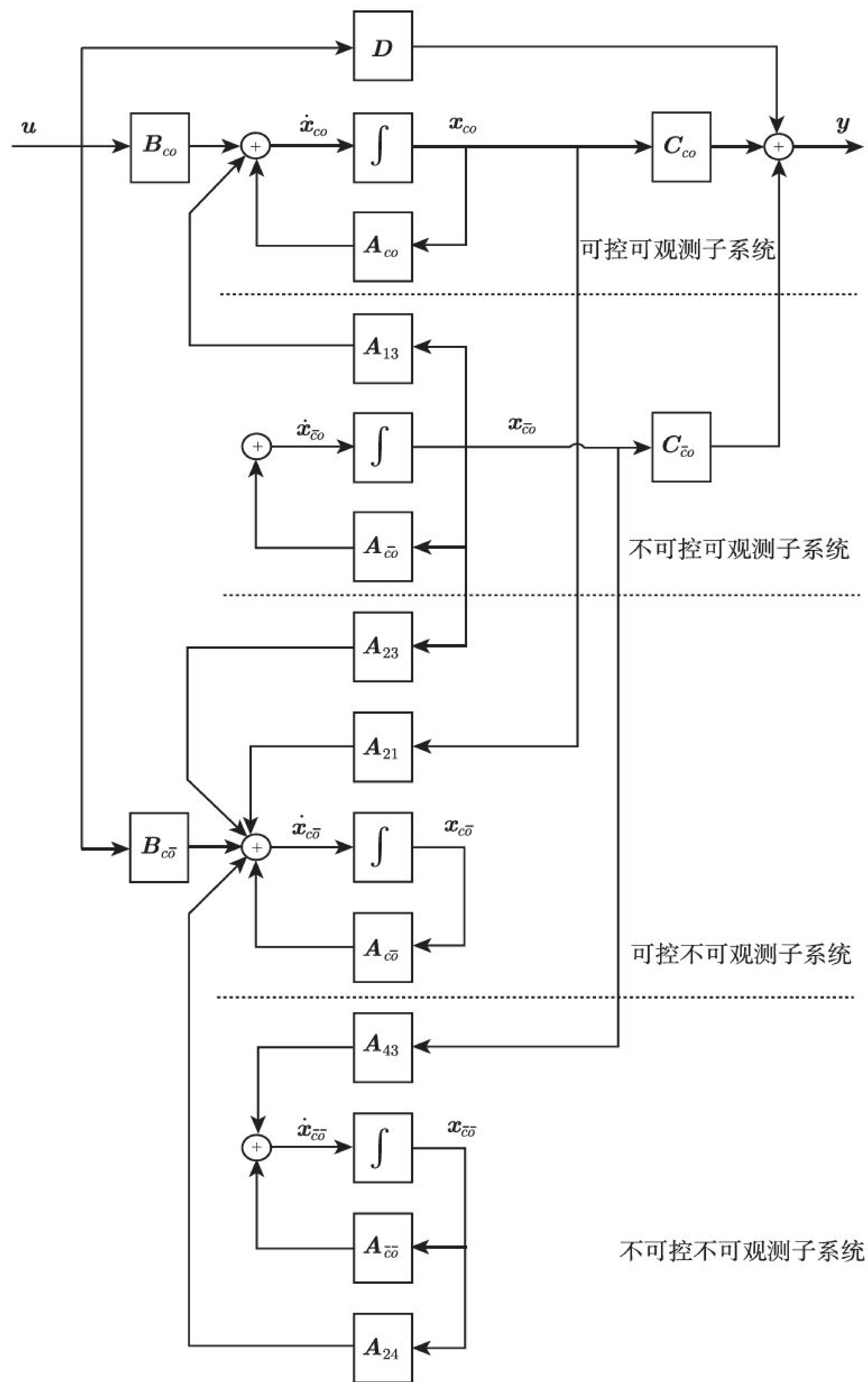



图 5.5.3　能控性能观测性结构分解框图

对系统 (5.5.14) 的分解可采用逐步分解的方法, 下面给出先按能控性分解再按能观测性分解的过程, 其步骤如下.

**1．能控性结构分解**

根据能控性结构分解方法, 可以构造变换矩阵 $\boldsymbol{T}_c$, 取状态变换: $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{T}_c\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_c(t)\\\boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}$, 将系

统 (5.5.14) 分解为

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_c(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_c & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{\bar{c}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_c(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_c\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{y}(t)=[\boldsymbol{C}_c,\ \boldsymbol{C}_{\bar{c}}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_c(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t).\end{cases}\tag{5.5.16}$$

**2. 不能控子系统的能观测性结构分解**

构造变换矩阵 $\boldsymbol{T}_{o2}$, 对式 (5.5.16) 中不能控子系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}}(t)=\boldsymbol{A}_{\bar{c}}\boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)\tag{5.5.17}$$

进行能观测性结构分解, 对 $\boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)$ 取状态变换: $\boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)=\boldsymbol{T}_{o2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\bar{c}o}(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t)\end{pmatrix}$, 可得

$$\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o}(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}\bar{o}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{\bar{c}o} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{\bar{c}21} & \boldsymbol{A}_{\bar{c}\bar{o}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\bar{c}o}(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t)\end{pmatrix}.\tag{5.5.18}$$

系统的输出可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(t)&=\boldsymbol{C}_c\boldsymbol{x}_c(t)+\boldsymbol{C}_{\bar{c}}\boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\\ &=\boldsymbol{C}_c\boldsymbol{x}_c(t)+\boldsymbol{C}_{\bar{c}}\boldsymbol{T}_{o2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\bar{c}o}(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t)\end{pmatrix}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\\ &=\boldsymbol{C}_c\boldsymbol{x}_c(t)+[\boldsymbol{C}_{\bar{c}o},\ \boldsymbol{0}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\bar{c}o}(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t)\end{pmatrix}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t).\end{aligned}\tag{5.5.19}$$

**3. 能控子系统的能观测性结构分解**

构造线性变换矩阵 $\boldsymbol{T}_{o1}$, 将式 (5.5.16) 中能控子系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}_c(t)=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x}_c(t)+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)+\boldsymbol{B}_c\boldsymbol{u}(t).$$

按能观测性结构分解, 对 $\boldsymbol{x}_c(t)$ 取状态变换: $\boldsymbol{x}_c(t)=\boldsymbol{T}_{o1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{co}(t)\\ \boldsymbol{x}_{c\bar{o}}(t)\end{pmatrix}$, 对时间 $t$ 求导数, 利用上式可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_{o1}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_{co}(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{c\bar{o}}(t)\end{pmatrix}&=\dot{\boldsymbol{x}}_c(t)=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x}_c(t)+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)+\boldsymbol{B}_c\boldsymbol{u}(t)\\ &=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{T}_{o1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{co}(t)\\ \boldsymbol{x}_{c\bar{o}}(t)\end{pmatrix}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{T}_{o2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\bar{c}o}(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t)\end{pmatrix}+\boldsymbol{B}_c\boldsymbol{u}(t).\end{aligned}\tag{5.5.20}$$

上式两边分别左乘 $\boldsymbol{T}_{o1}^{-1}$ 得到

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_{co}(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{c\bar{o}}(t)\end{pmatrix}&=\boldsymbol{T}_{o1}^{-1}\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{T}_{o1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{co}(t)\\ \boldsymbol{x}_{c\bar{o}}(t)\end{pmatrix}+\boldsymbol{T}_{o1}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{T}_{o2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\bar{c}o}(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t)\end{pmatrix}+\boldsymbol{T}_{o1}^{-1}\boldsymbol{B}_c\boldsymbol{u}(t)\\ &=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{co} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{c21} & \boldsymbol{A}_{c\bar{o}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{co}(t)\\ \boldsymbol{x}_{c\bar{o}}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{13} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{23} & \boldsymbol{A}_{24}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\bar{c}o}(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t)\end{pmatrix}\\ &\quad+\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{co}\\ \boldsymbol{B}_{c\bar{o}}\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t).\end{aligned}\tag{5.5.21}$$

式 (5.5.19) 中输出进一步可表示为

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}_c\boldsymbol{x}_c(t)+[\boldsymbol{C}_{\bar{c}o},\ \boldsymbol{0}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\bar{c}o}(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t)\end{pmatrix}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$

$$
=\boldsymbol{C}_c\boldsymbol{T}_{o1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{co}(t)\\ \boldsymbol{x}_{c\bar{o}}(t)\end{pmatrix}+[\boldsymbol{C}_{\bar{c}o},\ \boldsymbol{0}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\bar{c}o}(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t)\end{pmatrix}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)
$$

$$
=[\boldsymbol{C}_{co},\ \boldsymbol{0}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{co}(t)\\ \boldsymbol{x}_{c\bar{o}}(t)\end{pmatrix}+[\boldsymbol{C}_{\bar{c}o},\ \boldsymbol{0}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\bar{c}o}(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t)\end{pmatrix}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t).
$$

**4. 能控性能观测性结构分解**

综合上述分解过程, 可得系统 (5.5.14) 能控性能观测性结构分解为

$$
\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_{co}(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{c\bar{o}}(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o}(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}\bar{o}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{co} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{13} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{c\bar{o}} & \boldsymbol{A}_{23} & \boldsymbol{A}_{24}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{\bar{c}o} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{43} & \boldsymbol{A}_{\bar{c}\bar{o}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{co}(t)\\ \boldsymbol{x}_{c\bar{o}}(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}o}(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{co}\\ \boldsymbol{B}_{c\bar{o}}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{y}(t)=[\boldsymbol{C}_{co},\ \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{C}_{\bar{c}o},\ \boldsymbol{0}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{co}(t)\\ \boldsymbol{x}_{c\bar{o}}(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}o}(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t)\end{pmatrix}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t).\end{cases}\tag{5.5.22}
$$

**例 5.5.4** 设线性时不变系统如下,

$$
\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}u(t),
$$

$$
y(t)=[1,\ -1,\ 1]\boldsymbol{x}(t).
$$

该系统状态不完全能控和不完全能观测, 将该系统进行能控性能观测性结构分解.

**解** 例 5.5.2 中已经引入线性非奇异变换矩阵

$$
\boldsymbol{T}_c=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}.
$$

经变换后, 系统分解为

$$
\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_c(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -4 & 2\\ 1 & 4 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_c(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)\quad=[1,\ 2,\ -1]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_c(t)\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}.\end{cases}
$$

从上式可以看出, 不能控子系统仅一维, 因此其是能观测的, 即 $\boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)=x_{\bar{c}o}(t)$, 故无须对不能控子系统进行能观测分解, 可以直接给出不能控子系统的状态空间表达式

$$
\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}}(t)=\dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o}(t)=-\boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)=-\boldsymbol{x}_{\bar{c}o}(t),\\ y_2(t)=-\boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)=-\boldsymbol{x}_{\bar{c}o}(t).\end{cases}
$$

将能控子系统按能观测性分解:

$$
\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_c(t)=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 1 & 4\end{pmatrix}\boldsymbol{x}_c(t)+\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}u(t),\\ y_1(t)=[1,\ 2]\boldsymbol{x}_c(t).\end{cases}
$$

按照能观测性分解, 构造非奇异矩阵

$$T_o^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

则能控子系统的按能观测性分解为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_{co}(t) \\ \dot{x}_{c\bar{o}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{co}(t) \\ x_{c\bar{o}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} x_{\bar{c}}(t) \\ \qquad + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ y_1(t) = [1,\ 2] \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{co}(t) \\ x_{c\bar{o}}(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

整理可得

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_{co}(t) \\ \dot{x}_{c\bar{o}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{co}(t) \\ x_{c\bar{o}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} x_{\bar{c}}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ y_1(t) = [1,\ 0] \begin{pmatrix} x_{co}(t) \\ x_{c\bar{o}}(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

经过上述两次变化, 系统的能控和能观测分解表达式为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_{co}(t) \\ \dot{x}_{c\bar{o}}(t) \\ \dot{x}_{\bar{c}o}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{co}(t) \\ x_{c\bar{o}}(t) \\ x_{\bar{c}o}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [1,\ 0,\ -1] \begin{pmatrix} x_{co}(t) \\ x_{c\bar{o}}(t) \\ x_{\bar{c}o}(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

结构分解的另一种方法是先将系统化为约当标准形, 然后按能控判别法则和能观测判别法则判别各状态变量的能控性和能观测性, 最后按能控能观测、能控不能观测、不能控能观测、不能控不能观测 4 种类型分类进行排列, 即可以组成相应的子系统.

**例 5.5.5** 将下列约当标准形进行能控性能观测性结构分解,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \\ \dot{x}_5(t) \\ \dot{x}_6(t) \\ \dot{x}_7(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \\ x_7(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 7 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \\ x_7(t) \end{pmatrix}.$$

**解** 根据约当标准形的能控判别准则和能观测判别准则, 可以判定该系统

$\boldsymbol{x}_{co} := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ 是能控且能观测变量;

$\boldsymbol{x}_{c\bar{o}} := \begin{pmatrix} x_4(t) \\ x_6(t) \end{pmatrix}$ 是能控但不能观测变量;

$x_{\bar{c}o} = x_5(t)$ 是不能控但能观测变量;

$x_{\bar{c}\bar{o}} := x_7(t)$ 是不能控、不能观测变量. 若按此顺序重新排列, 可以写出

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{co}(t) \\ \dot{x}_{c\bar{o}}(t) \\ \dot{x}_{\bar{c}o}(t) \\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{co}(t) \\ x_{c\bar{o}}(t) \\ x_{\bar{c}o}(t) \\ x_{\bar{c}\bar{o}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 7 \\ 1 & 3 \\ 5 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{co}(t) \\ x_{c\bar{o}}(t) \\ x_{\bar{c}o}(t) \\ x_{\bar{c}\bar{o}}(t) \end{pmatrix}.$$

## 5.6 组合系统的能控性与能观测性

最基本的组合系统有 3 种: 一种是串联组合系统, 一种是并联组合系统, 再一种是反馈组合系统. 下面分别介绍这 3 种组合系统的状态空间描述模型、传递函数矩阵描述以及能控性与能观测性.

### 5.6.1 串联组合系统

#### 1. 串联组合系统的状态空间描述

串联组合系统示意图如图 5.6.1 所示. 串联组合系统要求第 1 个子系统输出的维数等于第 2 个子系统输入的维数.

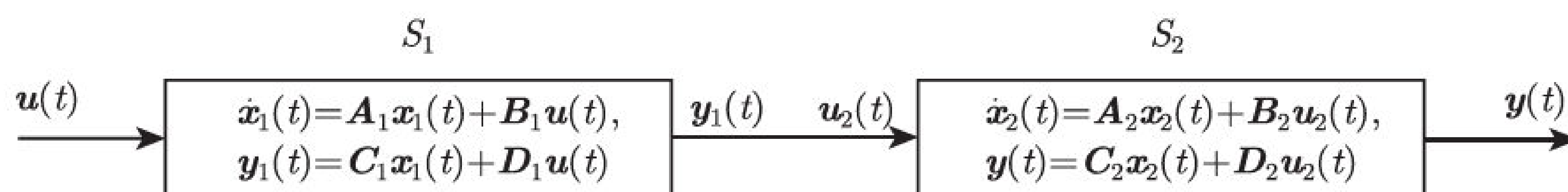



图 5.6.1 串联组合系统

假设第 1 个子系统的状态空间模型为

$$S_1: \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_1(t) = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}_1(t_0) = \boldsymbol{x}_{10}, \\ \boldsymbol{y}_1(t) = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}(t), \end{cases} \tag{5.6.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$ 是子系统 $S_1$ 的 ($n_1$ 维) 状态变量, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ 和 $\boldsymbol{y}_1(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ 分别为子系统 $S_1$ 的输入向量和输出向量, $\boldsymbol{A}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $\boldsymbol{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times r}$, $\boldsymbol{C}_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$ 和 $\boldsymbol{D}_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times r}$ 均为常

数矩阵. 第 2 个子系统的状态空间模型为

$$S_2:\quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_2(t)=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}_2(t), \quad \boldsymbol{x}_2(t_0)=\boldsymbol{x}_{20}, \\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{u}_2(t), \end{cases} \tag{5.6.2}$$

其中 $\boldsymbol{x}_2(t)\in\mathbb{R}^{n_2}$ 是子系统 $S_2$ 的状态向量, $\boldsymbol{u}_2(t)\in\mathbb{R}^{m_1}$ 和 $\boldsymbol{y}(t)\in\mathbb{R}^{m}$ 分别为子系统 $S_2$ 的输入向量和输出向量, $\boldsymbol{A}_2\in\mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, $\boldsymbol{B}_2\in\mathbb{R}^{n_2\times m_1}$, $\boldsymbol{C}_2\in\mathbb{R}^{m\times n_2}$ 和 $\boldsymbol{D}_2\in\mathbb{R}^{m\times m_1}$ 均为常数矩阵.

参见图 5.6.1, 串联组合系统的第 1 个子系统输入为串联组合系统的输入, 第 2 个子系统输出为串联组合系统的输出; 第 2 个子系统输入等于第 1 个子系统输出, 即 $\boldsymbol{u}_2(t)=\boldsymbol{y}_1(t)$, 代入式 (5.6.2) 可得

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_2(t)&=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}_2(t) \\ &=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{y}_1(t) \\ &=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{B}_2[\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}(t)] \\ &=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}(t), \end{aligned} \tag{5.6.3}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(t)&=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{u}_2(t) \\ &=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{y}_1(t) \\ &=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{D}_2[\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}(t)] \\ &=\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}(t). \end{aligned} \tag{5.6.4}$$

联立式 (5.6.1) 的第 1 式与式 (5.6.3)、式 (5.6.4) 可得串联组合系统 $S_1-S_2$ 的状态空间模型,

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1(t) \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1 \end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{y}(t)=[\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2]\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}(t). \end{cases} \tag{5.6.5}$$

串联组合系统的状态向量 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^{n}$ 是由两个子系统的状态向量构成的, 即

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t_0) \\ \boldsymbol{x}_2(t_0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{10} \\ \boldsymbol{x}_{20} \end{pmatrix}.$$

**2. 串联组合系统的传递矩阵**

式 (5.6.1) 子系统 $S_1$ 的传递矩阵 $\boldsymbol{G}_1(s)$ 和式 (5.6.2) 子系统 $S_2$ 的传递矩阵 $\boldsymbol{G}_2(s)$ 分别为

$$\boldsymbol{G}_1(s)=\boldsymbol{C}_1(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{D}_1,$$

$$\boldsymbol{G}_2(s)=\boldsymbol{C}_2(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{D}_2.$$

由图 5.6.1 可知, 串联组合系统的传递矩阵为

$$\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{G}_1(s)=[\boldsymbol{C}_2(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{D}_2][\boldsymbol{C}_1(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{D}_1].$$

下面证明串联组合系统 (5.6.5) 的传递矩阵也为 $\boldsymbol{G}(s)$. 串联组合系统 (5.6.5) 的传递矩阵为

$$\boldsymbol{G}'(s)=[\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2]\begin{pmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1 & s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1 \end{pmatrix}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1.$$

利用分块矩阵求逆引理 (读者可试证明之):

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{pmatrix},$$

可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}'(s) &= [\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2] \begin{pmatrix} (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)^{-1} & \boldsymbol{0} \\ (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)^{-1} & (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1 \end{pmatrix} + \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1 \\
&= [\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2] \begin{pmatrix} (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{B}_1 \\ (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{B}_1 + (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1 \end{pmatrix} + \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1 \\
&= \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{C}_2(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{B}_1 \\
&\quad + \boldsymbol{C}_2(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1 \\
&= [\boldsymbol{D}_2 + \boldsymbol{C}_2(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2][\boldsymbol{C}_1(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{D}_1] = \boldsymbol{G}(s).
\end{aligned}$$

**3. 串联组合系统的能控性与能观测性**

关于串联组合系统的能控性和能观测性有下列结论.

(1) 串联组合系统可能失去能控性或能观测性, 即使两个子系统都是能控的和能观测的, 因为串联系统的传递函数等于两个子系统的传递函数之积, 这个乘积传递函数分子分母可能存在公因子.

(2) 对于 SISO 系统, 假设两个子系统都是最小实现 (都是能控的和能观测的), 且组合系统传递函数 (即两个子系统传递函数乘积) 不存在零极点对消, 那么组合系统是能控的和能观测的, 否则串联组合系统是不能控的和 (或) 不能观测的.

(3) 设两个子系统的传递函数为

$$G_1(s) = \frac{B_1(s)}{A_1(s)}, \quad G_2(s) = \frac{B_2(s)}{A_2(s)}.$$

因为串联组合系统的传递函数等于两个子系统传递函数之积, 所以串联组合系统的传递函数为

$$G(s) = G_2(s)G_1(s) = \frac{B_2(s)}{A_2(s)}\frac{B_1(s)}{A_1(s)} = \frac{B_1(s)B_2(s)}{A_1(s)A_2(s)}.$$

由此可知, 对于标量系统, 如果两个子系统都是能控的 (传递函数分子分母是互质的, 即 $A_i(s)$ 与 $B_i(s)$ 无公因子), 串联组合系统传递函数分母 $A_1(s)A_2(s)$ 与分子 $B_1(s)B_2(s)$ 也可能存在公因子, 因此导致组合系统不能控或不能观测. 如果 $A_i(s)$ 与 $B_j(s)$ 无公因子, 那么串联组合系统保持能控性和能观测性.

### 5.6.2 并联组合系统

**1. 并联组合系统的状态空间描述**

并联组合系统示意图如 5.6.2 所示. 并联组合系统要求两个子系统输入维数相等, 两个子系统输出维数也相等.

假设第 1 个子系统的状态空间模型为

$$S_1: \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_1(t) = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}_1(t_0) = \boldsymbol{x}_{10}, \\ \boldsymbol{y}_1(t) = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}(t), \end{cases} \tag{5.6.6}$$

其中 $\boldsymbol{x}_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$ 是子系统 $S_1$ 的状态变量, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ 和 $\boldsymbol{y}_1(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别为子系统 $S_1$ 的输入向量和输出向量, $\boldsymbol{A}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $\boldsymbol{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times r}$, $\boldsymbol{C}_1 \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$ 和 $\boldsymbol{D}_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$ 均为常数矩阵. 第 2 个子系统的状态空间模型为

$$S_2: \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_2(t) = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t) + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}_2(t_0) = \boldsymbol{x}_{20}, \\ \boldsymbol{y}_2(t) = \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t) + \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{u}(t), \end{cases} \tag{5.6.7}$$

其中 $\boldsymbol{x}_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ 是子系统 $S_2$ 的状态变量, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ 和 $\boldsymbol{y}_2(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别为子系统 $S_2$ 的输入向量和输出向量, $\boldsymbol{A}_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $\boldsymbol{B}_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times r}$, $\boldsymbol{C}_2 \in \mathbb{R}^{m \times n_2}$ 和 $\boldsymbol{D}_2 \in \mathbb{R}^{m \times r}$ 均为常数矩阵.

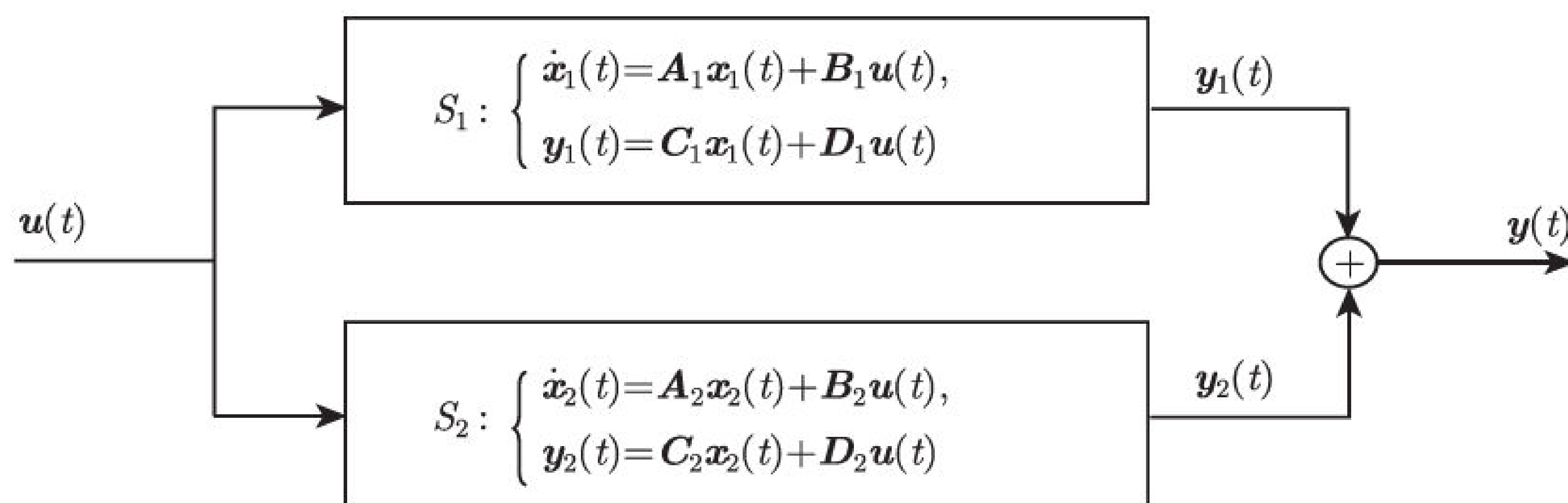


图 5.6.2 并联组合系统

参见图 5.6.2, 并联组合系统的两个子系统输入都为 $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^r$, 并联系统输出为两个子系统输出之和, 即 $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}_1(t) + \boldsymbol{y}_2(t)$, 利用式 (5.6.6) 的第 2 式和式 (5.6.7) 的第 2 式可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{y}_1(t) + \boldsymbol{y}_2(t) \\ &= [\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}(t)] + [\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t) + \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{u}(t)] \\ &= \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t) + (\boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2)\boldsymbol{u}(t). \end{aligned} \tag{5.6.8}$$

联立式 (5.6.6) 的第 1 式, 式 (5.6.7) 的第 1 式与式 (5.6.8) 可得并联组合系统 $S_1 - S_2$ 的状态空间模型

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1(t) \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t), \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t_0) \\ \boldsymbol{x}_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{10} \\ \boldsymbol{x}_{20} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{y}(t) = [\boldsymbol{C}_1, \ \boldsymbol{C}_2] \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix} + (\boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2)\boldsymbol{u}(t). \end{cases} \tag{5.6.9}$$

并联组合系统的状态向量 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 也是由两个子系统的状态向量构成的.

**2. 并联组合系统的传递矩阵**

式 (5.6.6) 子系统 $S_1$ 的传递矩阵 $\boldsymbol{G}_1(s)$ 和式 (5.6.7) 子系统 $S_2$ 的传递矩阵 $\boldsymbol{G}_2(s)$ 分别为

$$\boldsymbol{G}_1(s) = \boldsymbol{C}_1(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{D}_1,$$

$$\boldsymbol{G}_2(s) = \boldsymbol{C}_2(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{D}_2.$$

由图 5.6.9 可知, 并联组合系统的传递矩阵为

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{G}_1(s) + \boldsymbol{G}_2(s) = \boldsymbol{C}_1(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{C}_2(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{D}_2.$$

下面证明组合系统 (5.6.9) 的传递矩阵也为 $\boldsymbol{G}(s)$. 系统 (5.6.9) 的传递矩阵为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}'(s) &= [\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2]\begin{pmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix} + (\boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2) \\
&= [\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2]\begin{pmatrix} (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix} + (\boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2) \\
&= [\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2]\begin{pmatrix} (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{B}_1 \\ (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix} + (\boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2) \\
&= \boldsymbol{C}_1(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{C}_2(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{G}(s).
\end{aligned}$$

**3. 并联组合系统的能控性与能观测性**

关于并联组合系统的能控性和能观测性有下列结论.

(1) 并联组合系统可能失去能控性或能观测性, 即使两个子系统都是能控的和能观测的.

(2) 对于标量系统, 假设两个子系统都是最小实现 (都是能控的和能观测的), 并联组合系统也可能是不能控的或不能观测的.

设两个子系统的传递函数为

$$G_1(s) = \frac{B_1(s)}{A_1(s)}, \quad G_2(s) = \frac{B_2(s)}{A_2(s)}.$$

因为并联组合系统的传递函数等于两个子系统传递函数之和, 所以并联组合系统的传递函数为

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{B_1(s)}{A_1(s)} + \frac{B_2(s)}{A_2(s)} = \frac{B_1(s)A_2(s) + B_2(s)A_1(s)}{A_1(s)A_2(s)}.$$

由此可知, 对于标量系统, 如果两个子系统都是能控的 (传递函数分子分母是互质的, 即 $A_i(s)$ 与 $B_i(s)$ 无公因子), 并联组合系统传递函数分母 $A_1(s)A_2(s)$ 与分子 $B_1(s)A_2(s)+B_2(s)A_1(s)$ 也可能存在公因子, 导致组合系统不能控或不能观测.

### 5.6.3 反馈组合系统

**1. 反馈组合系统的状态空间描述**

反馈组合系统示意图如图 5.6.3 所示 (负反馈). 反馈组合系统要求第 2 个子系统输入维数等于第 1 个子系统输出维数, 第 2 个子系统输出的维数等于第 1 个子系统输入的维数.

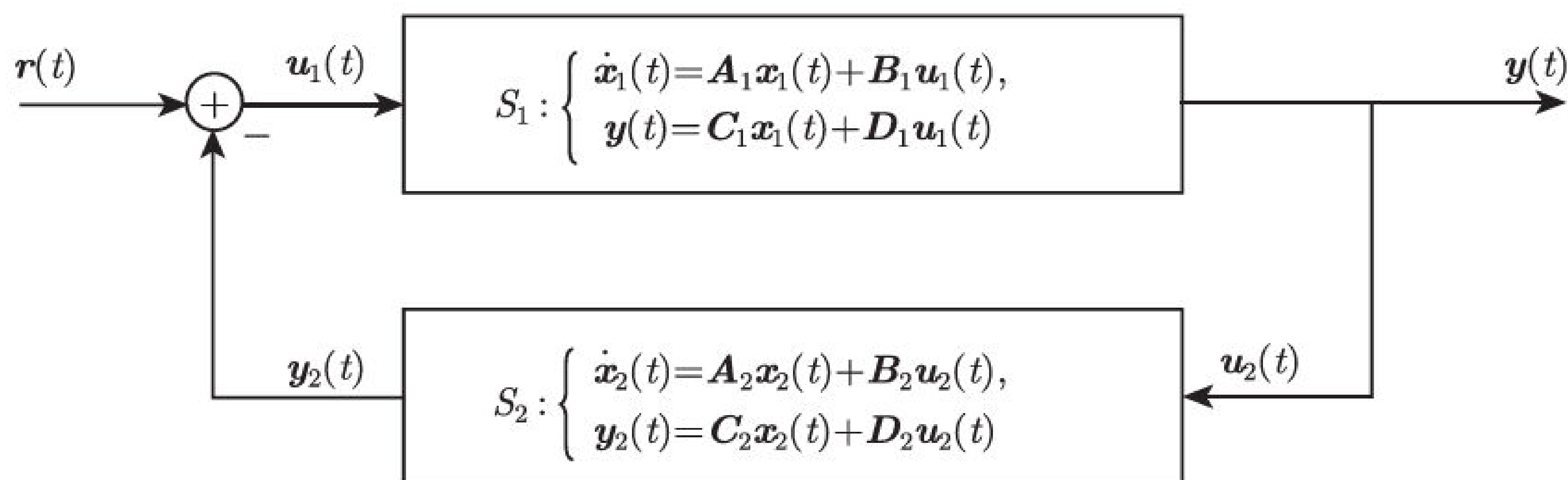



图 5.6.3 反馈组合系统

假设第 1 个子系统的状态空间模型为

$$S_1:\quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_1(t)=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_1(t), \quad \boldsymbol{x}_1(t_0)=\boldsymbol{x}_{10}, \\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}_1(t), \end{cases} \tag{5.6.10}$$

其中 $\boldsymbol{x}_1(t)\in\mathbb{R}^{n_1}$ 是子系统 $S_1$ 的状态变量, $\boldsymbol{u}_1(t)\in\mathbb{R}^r$ 和 $\boldsymbol{y}(t)\in\mathbb{R}^m$ 分别为子系统 $S_1$ 的输入向量和输出向量, $\boldsymbol{A}_1\in\mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $\boldsymbol{B}_1\in\mathbb{R}^{n_1\times r}$, $\boldsymbol{C}_1\in\mathbb{R}^{m\times n_1}$ 和 $\boldsymbol{D}_1\in\mathbb{R}^{m\times r}$ 均为常数矩阵. 第 2 个子系统的状态空间模型为

$$S_2:\quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_2(t)=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}_2(t), \quad \boldsymbol{x}_2(t_0)=\boldsymbol{x}_{20}, \\ \boldsymbol{y}_2(t)=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{u}_2(t), \end{cases} \tag{5.6.11}$$

其中 $\boldsymbol{x}_2(t)\in\mathbb{R}^{n_2}$ 是子系统 $S_2$ 的状态变量, $\boldsymbol{u}_2(t)\in\mathbb{R}^m$ 和 $\boldsymbol{y}_2(t)\in\mathbb{R}^r$ 分别为子系统 $S_2$ 的输入向量和输出向量, $\boldsymbol{A}_2\in\mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, $\boldsymbol{B}_2\in\mathbb{R}^{n_2\times m}$, $\boldsymbol{C}_2\in\mathbb{R}^{r\times n_2}$ 和 $\boldsymbol{D}_2\in\mathbb{R}^{r\times m}$ 均为常数矩阵.

图 5.6.3 中 $\boldsymbol{r}(t)\in\mathbb{R}^r$ 为参考输入 (或期望输出), 第 2 个子系统输入等于第 1 个子系统输出, 即 $\boldsymbol{u}_2(t)=\boldsymbol{y}(t)$. 为方便我们把 $\boldsymbol{y}(t)$ 简写为 $\boldsymbol{y}$ 等. 由图 5.6.3 可知

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1&=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{y}_2 \\ &=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{u}_2 \\ &=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{y}, \end{aligned} \tag{5.6.12}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}&=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}_1 \\ &=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{D}_1[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{y}] \\ &=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{r}-\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{y}. \end{aligned} \tag{5.6.13}$$

把上式右边最后一项移到左边得到

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{r}.$$

假设 $\boldsymbol{\Delta}:=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2$ 可逆, 由此可以求出

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{r}. \tag{5.6.14}$$

把上式代入式 (5.6.12) 可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1&=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{y} \\ &=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{D}_2[\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{r}] \\ &=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1)\boldsymbol{r}-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1+(\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{I})\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2. \end{aligned} \tag{5.6.15}$$

把上式代入式 (5.6.10) 的第 1 式可得

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_1&=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_1 \\ &=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{B}_1[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1)\boldsymbol{r}-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1+(\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{I})\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2] \\ &=[\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{C}_1]\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{I})\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1)\boldsymbol{r}. \end{aligned} \tag{5.6.16}$$

因为 $\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{y}$, 利用式 (5.6.14), 由式 (5.6.11) 的第 1 式可得

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_2&=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}_2 \\ &=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{B}_2[\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{r}]$$
$$= \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1 + (\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{C}_2)\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{r}. \tag{5.6.17}$$

联立式 (5.6.16)、式 (5.6.17) 与式 (5.6.14) 可得反馈组合系统 $S_1 - S_2$ 的状态空间模型,

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1(t) \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{I})\boldsymbol{C}_2 \\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{C}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix} \\ \qquad + \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1) \\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{r}(t), \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t_0) \\ \boldsymbol{x}_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{10} \\ \boldsymbol{x}_{20} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{y}(t) = [\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{C}_1, \ -\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{C}_2] \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix} + \boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{r}(t). \end{cases} \tag{5.6.18}$$

反馈组合系统的状态向量 $\boldsymbol{x}(t) := \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ 也是由两个子系统的状态向量构成的.

(1) 当 $\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{I}$, 这时的反馈组合系统简化为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1(t) \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & -\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_2 \\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \boldsymbol{r}(t), \\ \boldsymbol{y}(t) = [\boldsymbol{C}_1, \ \boldsymbol{0}] \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{5.6.19}$$

(2) 当 $\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{I}$, 这时的反馈组合系统简化为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1(t) \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1 & -\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_2 \\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \boldsymbol{r}(t), \\ \boldsymbol{y}(t) = [\boldsymbol{C}_1, \ \boldsymbol{0}] \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{5.6.20}$$

(3) 当 $\boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{I}$, 这时的反馈组合系统简化为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1(t) \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & -\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_2 \\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{C}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{r}(t), \\ \boldsymbol{y}(t) = [\boldsymbol{C}_1, \ -\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{C}_2] \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix} + \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{r}(t). \end{cases} \tag{5.6.21}$$

**2. 反馈组合系统的传递矩阵**

式 (5.6.10) 子系统 $S_1$ 的传递矩阵 $\boldsymbol{G}_1(s)$ 和式 (5.6.11) 子系统 $S_2$ 的传递矩阵 $\boldsymbol{G}_2(s)$ 分别为

$$\boldsymbol{G}_1(s) = \boldsymbol{C}_1(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{D}_1,$$
$$\boldsymbol{G}_2(s) = \boldsymbol{C}_2(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{D}_2.$$

由 3.7 节的多变量系统的传递矩阵计算方法, 可知图 5.6.3 反馈组合系统的传递矩阵为

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{G}_1(s)[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{G}_1(s)]^{-1} = [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{G}_2(s)]^{-1}\boldsymbol{G}_1(s).$$

证明反馈组合系统 (5.6.18) 的传递矩阵 $\boldsymbol{G}'(s)$ 等于 $\boldsymbol{G}(s)$, 也是极其复杂.

**3. 反馈组合系统的能控性与能观测性**

关于反馈组合系统的能控性和能观测性有下列结论.

(1) 反馈组合系统可能失去能控性或能观测性, 即使两个子系统都是能控的和能观测的.

(2) 对于标量系统, 假设两个子系统都是最小实现 (都是能控的和能观测的), 并联组合系统也可能是不能控的或不能观测的.

设两个子系统的传递函数为

$$G_1(s)=\frac{B_1(s)}{A_1(s)},\quad G_2(s)=\frac{B_2(s)}{A_2(s)}.$$

反馈组合系统的传递函数为

$$\begin{aligned}G(s)&=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}=\frac{\dfrac{B_1(s)}{A_1(s)}}{1+\dfrac{B_1(s)}{A_1(s)}\dfrac{B_2(s)}{A_2(s)}}\\&=\frac{A_2(s)B_1(s)}{A_1(s)A_2(s)+B_1(s)B_2(s)}.\end{aligned}$$

由此可知, 如果两个子系统都是能控和能观测的 (传递函数分子分母是互质的, 即 $A_i(s)$ 与 $B_i(s)$ 无公因子), 反馈组合系统传递函数分子 $A_2(s)B_1(s)$ 与分母 $A_1(s)A_2(s)+B_1(s)B_2(s)$ 无公因子, 即 $A_2(s)$ 与 $B_1(s)$ 无公因子, 以及 $B_2(s)$ 与 $A_1(s)$ 无公因子, 那么反馈组合系统也是能控和能观测的.

## 5.7 思考题

1. 设系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{co}(t)=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-a_n\\1&0&\cdots&0&-a_{n-1}\\0&1&\cdots&0&-a_{n-2}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}_{co}(t)+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}u(t),$$

判断系统状态是否可控?

2. 讨论参数 $b$ 的取值范围, 下列系统的可控性,

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{co}(t)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}_{co}(t)+\begin{pmatrix}1\\b\\0\\0\end{pmatrix}u(t).$$

3. 设系统的状态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_{ob}(t)=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_n&-a_{n-1}&-a_{n-2}&\cdots&-a_1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}_{ob}(t),\\ y(t)\ =[1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0]\boldsymbol{x}_{ob}(t)+du(t),\end{cases}$$

判断系统状态是否可观测?

4. 判断下列系统是否可控,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}-a_1 & -a_2 & -a_3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}u(t).$$

5. 判断下列系统的可观测性,

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}-a_1 & 1 & 0\\ -a_2 & 0 & 1\\ -a_3 & 0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t),\\ y(t)=[1,\ 0,\ 0]\boldsymbol{x}(t).\end{cases}$$

6. 判断下列系统的可控性,

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_{\rm c}(t)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\rm c}(t)+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=[0,0,\cdots,0]\boldsymbol{x}_{\rm c}(t)+0u(t).\end{cases}$$

7. 判断下列系统是否可观测,

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_{\rm o}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\rm o}(t)+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}u(t)\\ y(t)\ =[1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0]\boldsymbol{x}_{\rm o}(t)+0u(t).\end{cases}$$

8. 写出下列单输入 2 输出多变量系统的状态空间模型,

(1) $\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{3s+7}{(s+1)(s+2)}\end{pmatrix}$, (2) $\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{2}{s+2}\end{pmatrix}$.

(3) $\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{5s+7}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{s+7}{(s+1)(s+3)}\end{pmatrix}$, (4) $\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{(s+1)^2}\\ \dfrac{3s+7}{(s+1)(s+2)}\end{pmatrix}$.

(5) $\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{2s+4}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{7s+24}{(s+3)(s+4)}\end{pmatrix}$, (6) $\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{(s+1)^2}\\ \dfrac{2}{s+1}+\dfrac{3}{(s+2)^2}\end{pmatrix}$.

9. 写出下列 2 输入单输出多变量系统的状态空间模型,

(1) $\boldsymbol{G}(s)=\left[\dfrac{1}{s+1},\ \dfrac{2}{s+2}\right]$.

(2) $\boldsymbol{G}(s)=\left[\dfrac{1}{s+1},\ \dfrac{3s+7}{(s+1)(s+2)}\right].$

(3) $\boldsymbol{G}(s)=\left[\dfrac{5s+7}{(s+1)(s+2)},\ \dfrac{s+7}{(s+1)(s+3)}\right].$

(4) $\boldsymbol{G}(s)=\left[\dfrac{1}{(s+1)^2},\ \dfrac{3s+7}{(s+1)(s+2)}\right].$

(5) $\boldsymbol{G}(s)=\left[\dfrac{1}{(s+1)^2},\ \dfrac{2}{s+1}+\dfrac{3}{(s+2)^2}\right].$

(6) $\boldsymbol{G}(s)=\left[\dfrac{2s+4}{(s+1)(s+2)},\ \dfrac{7s+24}{(s+3)(s+4)}\right].$

10. 写出下列 2 输入 2 输出多变量系统的状态空间模型,

(1) $\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{s+2}\\ \dfrac{3}{s+3} & \dfrac{4}{s+4}\end{pmatrix}$, (2) $\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{s+2}\\ \dfrac{3}{s+1} & \dfrac{5}{s+2}\end{pmatrix}$.

(3) $\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{s+2}\\ \dfrac{3}{s+2} & \dfrac{5}{s+1}\end{pmatrix}$, (4) $\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{4}{s+1} & \dfrac{3}{s+2}\\ \dfrac{8}{s+1} & \dfrac{6}{s+2}\end{pmatrix}$.

(5) $\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{4}{s+1} & \dfrac{3}{s+2}\\ \dfrac{8}{s+2} & \dfrac{6}{s+1}\end{pmatrix}$, (6) $\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{s+2}\\ \dfrac{2}{s+1} & \dfrac{4}{s+1}\end{pmatrix}$.

(7) $\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{s+1}\\ \dfrac{3}{s+1} & \dfrac{6}{s+1}\end{pmatrix}$, (8) $\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{5s+7}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s+7}{(s+1)(s+3)}\\ \dfrac{s+10}{(s+1)(s+4)} & \dfrac{5s+14}{(s+2)(s+4)}\end{pmatrix}$.

11. 设线性时不变系统如下,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -4\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}u(t),$$

$y(t)=[0,\ 0,\ 1]\boldsymbol{x}(t).$

判断其能控性, 若不完全能控, 试将该系统进行能控性结构分解.

12. 设线性时不变系统如下,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -4\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}u(t),$$

$y(t)=[0,\ 0,\ 1]\boldsymbol{x}(t).$

判断其能观测性, 若不完全能观测, 试将该系统按照能观测性进行结构分解.

13. 对下列状态空间系统进行能观测性结构分解,

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=[1,\ 1,\ 1,\ 1]\boldsymbol{x}+2u(t).\end{cases}$$

14. 设 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 可逆, 则下列块三角阵求逆公式成立:

(1) $$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{A}_2^{-1} \end{pmatrix},$$

(2) $$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_2^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

15. 证明有关矩阵等式. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 分块如下,

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 都是方阵. 现假设 $\boldsymbol{A}_1$ 非奇异, 那么 $\boldsymbol{A}$ 可分解为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{Q}_1 := \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 同为非奇异矩阵. 对偶地, 若 $\boldsymbol{A}_2$ 非奇异, 则有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_2^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{Q}_2 := \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_{21}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 同为非奇异矩阵. 矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$ 和 $\boldsymbol{Q}_2$ 分别称为 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 对于 $\boldsymbol{A}$ 的 **舒尔补** (Schur Complement). 此外, 如果 $\boldsymbol{A}$ 非奇异, 则有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} + \boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_1^{-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{Q}_1^{-1} \\ -\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{Q}_1^{-1} \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_2^{-1} & -\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_2^{-1} \\ -\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{Q}_2^{-1} & \boldsymbol{A}_2^{-1} + \boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

第 6 章
CHAPTER 6

# 线性系统的综合与设计

前几章介绍的是系统状态空间模型的描述与分析, 本章介绍线性系统的综合与设计. 系统描述是关于系统建模、数学模型的表达: 频域传递函数模型、时域状态空间模型, 以及状态空间模型间的线性变换等; 系统分析是关于系统的运行规律和系统的特性与结构, 如状态方程的解、能控性与能观测性等. 而系统的综合与设计则正好相反, 即假设系统结构和参数已知, 在系统数学模型的基础上, 寻求控制规律, 改变系统的运动轨迹, 以使系统具有某种期望的性能. 通常的方法是采取反馈形式, 以状态空间模型为基础, 研究状态反馈 (极点配置), 输出反馈, 观测器和降维观测器的设计、分离性原理等.

6.5 节选自发表在《科学技术与工程》2008 年第 15 期上的论文 "基于卡尔曼滤波思想的时变增益最优观测器设计" [27], 6.7 节选自发表在《控制理论与应用》1992 年第 4 期上论文 "鲁棒观测器—控制器的设计" [28].

## 6.1 经典系统输出反馈

本节用经典的输出反馈作为导引, 为下节研究状态反馈作为铺垫.

### 6.1.1 输出比例 — 微分反馈

设图 6.1.1 系统的前向通道传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)},$$

采用比例—微分输出负反馈 $H(s) = k + bs$ (注: 控制器也可放在前向通道, 采用单位负反馈), 试确定参数 $k$ 和 $b$, 使得期望的闭环系统极点为 $-1 \pm \mathrm{j}$.

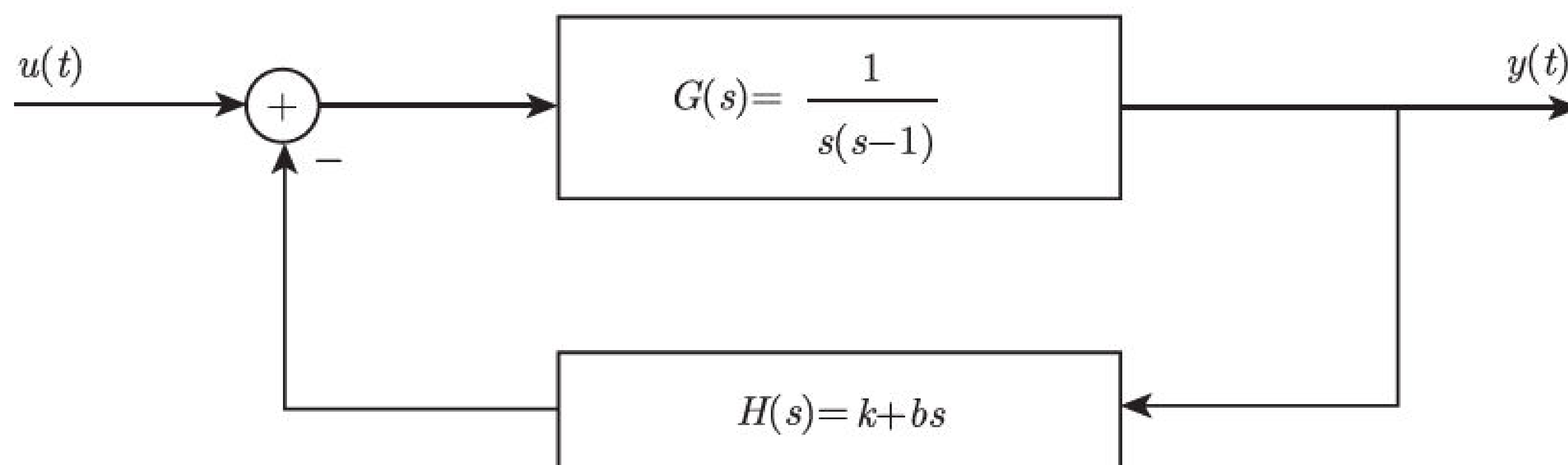



图 6.1.1 比例—微分输出反馈系统

系统的闭环传递函数为

$$G_b(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{\dfrac{1}{s(s-1)}}{1+\dfrac{1}{s(s-1)}(k+bs)}$$
$$=\frac{1}{s(s-1)+(bs+k)}=\frac{1}{s^2+(b-1)s+k}.$$

令闭环系统的特征多项式等于期望的系统特征多项式:

$$(s+1+\mathrm{j})(s+1-\mathrm{j})=s^2+2s+2,$$

即

$$s^2+(b-1)s+k=s^2+2s+2.$$

比较两边 $s$ 同次幂的系数得到

$$b-1=2,\quad k=2.$$

故 $b=3$, $k=2$. 这说明: 对于比例–微分输出反馈的二阶系统可以任意配置极点.

这是一个二阶系统, 目标是配置两个极点 (两个目标), 而反馈传递函数中正好有两个待定参数, 故在这种情况下, 系统的闭环极点可以配置到任意给定的位置.

### 6.1.2 输出比例反馈

设系统的前向通道传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s(s-1)},$$

一个自然的问题是, 如果仅采用比例输出反馈 $H(s)=k$, 或微分输出反馈 $H(s)=bs$, 能否使得期望的闭环系统极点为 $-1\pm\mathrm{j}$, 闭环系统能不能任意配置极点?

采用比例输出负反馈 $H(s)=k$, 问是否存在一个 $k$, 使得期望的闭环系统极点为 $-1\pm\mathrm{j}$. 系统的闭环传递函数为

$$G_b(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{\dfrac{1}{s(s-1)}}{1+\dfrac{1}{s(s-1)}k}$$
$$=\frac{1}{s(s-1)+k}=\frac{1}{s^2-s+k}.$$

令闭环系统的特征多项式等于期望的系统特征多项式:

$$s^2-s+k=s^2+2s+2.$$

比较两边 $s$ 同次幂的系数, 得到矛盾结果: $-1=2$, $k=2$. 这说明: 对于比例输出反馈的二阶系统不能任意配置极点. 只能将系统极点配置在函数

$$s=\frac{1\pm\sqrt{1-4k}}{2}$$

确定的曲线上, 其中一个极点 $s=s_1$ 可以任意配置, 只需取 $k=s_1-s_1^2$.

### 6.1.3 输出微分反馈

设系统的前向通道传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s(s-1)},$$

采用微分输出负反馈 $H(s)=bs$, 试确定参数 $b$, 使得期望的闭环系统极点为 $-1\pm \mathrm{j}$.

系统的闭环传递函数为

$$\begin{aligned}G_b(s)&=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{\dfrac{1}{s(s-1)}}{1+\dfrac{1}{s(s-1)}bs}\\&=\frac{1}{s(s-1)+bs}=\frac{1}{s^2+(b-1)s}.\end{aligned}$$

令闭环系统的特征多项式等于期望的系统特征多项式:

$$s^2+(b-1)s=s^2+2s+2.$$

比较两边 $s$ 同次幂的系数得到矛盾结果: $b-1=2,\ 0=2$. 闭环系统的极点只能是 $s=0$ 和 $s=1-b$ (一个极点可以任意配置). 这说明输出微分反馈的二阶系统不能任意配置极点.

### 6.1.4 输出比例 — 积分 — 微分反馈

设系统的前向通道传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s(s-1)},$$

采用比例–积分–微分输出负反馈,

$$H(s)=k+\frac{a}{s}+bs,$$

试确定参数 $k$, $a$ 和 $b$, 使得期望的闭环系统极点为 $-1\pm \mathrm{j}$.

系统的闭环传递函数为

$$\begin{aligned}G_b(s)&=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{\dfrac{1}{s(s-1)}}{1+\dfrac{1}{s(s-1)}\dfrac{bs^2+ks+a}{s}}\\&=\frac{s}{s^2(s-1)+bs^2+ks+a}=\frac{s}{s^3+(b-1)s^2+ks+a}.\end{aligned}$$

这是一个三阶系统, 有三个极点, 给定了两个极点, 还有一个极点是可以任意设置的, 假设是 $s=-\sigma$, 令闭环系统的特征多项式等于期望的系统特征多项式:

$$s^3+(b-1)s^2+ks+a=(s^2+2s+2)(s+\sigma).$$

或

$$s^3+(b-1)s^2+ks+a=s^3+(2+\sigma)s^2+(2+2\sigma)s+2\sigma.$$

比较两边 $s$ 同次幂的系数得到

$$\begin{cases} b-1=2+\sigma, \\ \quad k=2+2\sigma, \\ \quad a=2\sigma. \end{cases}$$

因此, 取 $b=3+\sigma$, $k=2+2\sigma$, $a=2\sigma$, 闭环系统包含所要求的极点 $-1\pm\mathrm{j}$. 这说明: 对于比例-积分-微分输出反馈的二阶系统可以任意配置极点.

**注 6.1.1** 对于一个二阶系统, 配置两个极点 (两个目标), 而反馈传递函数中正好有两个待定参数或者大于两个待定参数时, 系统的闭环极点可以配置到任意给定的位置. 反之当待定参数小于任意配置的极点数目, 就不可能任意配置极点.

**注 6.1.2** 反馈可以配置系统极点, 可以把不稳定系统变为稳定系统. 回想一下, 在传递函数化为状态空间模型的过程中, 我们可能注意到状态含有系统输出的导数, 因此状态反馈也可以配置系统极点. 那么在什么条件下, 系统可以通过状态反馈任意配置极点呢? 这就是下节讨论的状态反馈极点配置要回答的问题.

## 6.2 状态反馈与极点配置

本节首先给出状态反馈极点配置的一般方法, 其次给出控制器规范型的状态反馈极点配置公式, 再推导能控性规范型的状态反馈极点配置公式, 随后给出一般状态空间系统的状态反馈极点配置公式, 最后简单讨论输出反馈极点配置问题.

### 6.2.1 状态反馈极点配置的一般方法

**1. 状态反馈极点配置**

考虑线性时不变单输入单输出系统 (SISO 系统):

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}u(t),\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0, \\ y(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t)+du(t), \end{cases} \tag{6.2.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ 为系统状态向量, $u(t)\in\mathbb{R}$ 和 $y(t)\in\mathbb{R}$ 分别为系统输入和输出, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^{1\times n}$, $d\in\mathbb{R}$.

状态空间系统 (6.2.1) 的结构如图 6.2.1 所示. **状态反馈** (State Feedback) 是从状态引到输入端的反馈, 如图 6.2.2 所示的状态反馈系统框图, 其中 $\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^{1\times n}$ 是 **状态反馈增益向量** (State Feedback Gain Vector), $r(t)$ 为设定值 (参考输入, 期望输出).

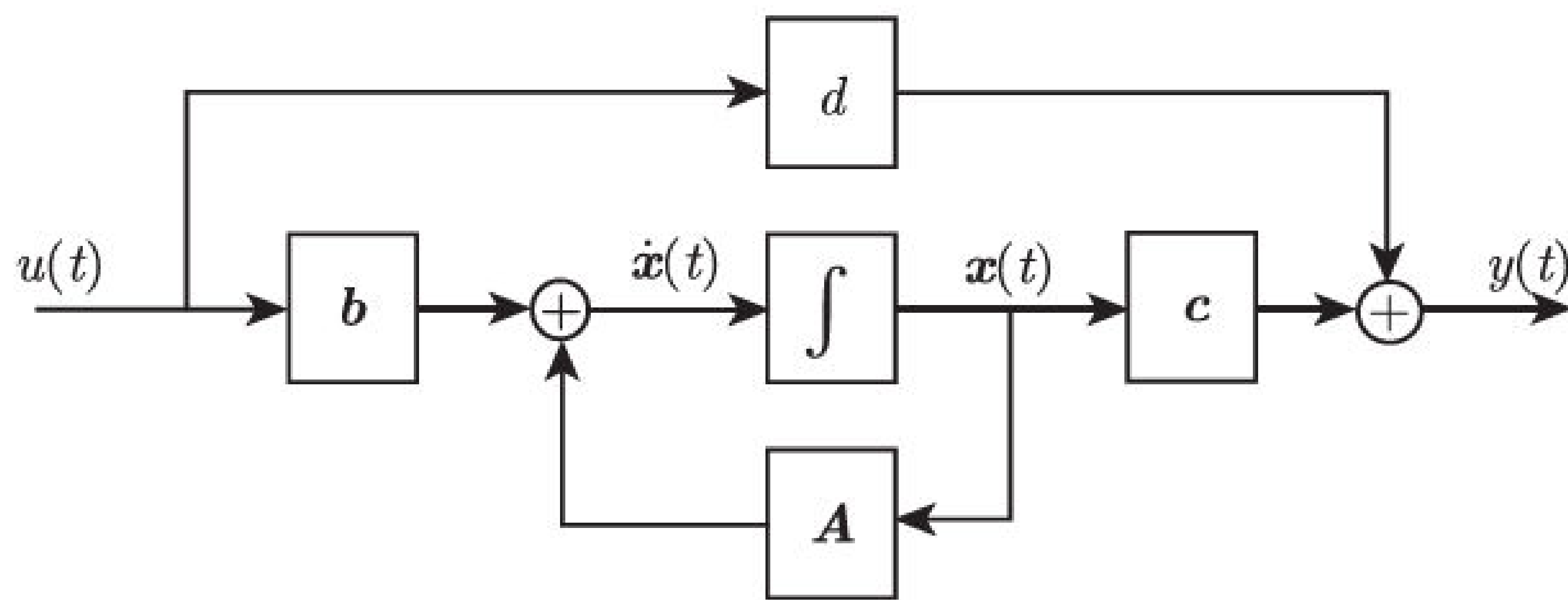



图 6.2.1 状态空间系统框图

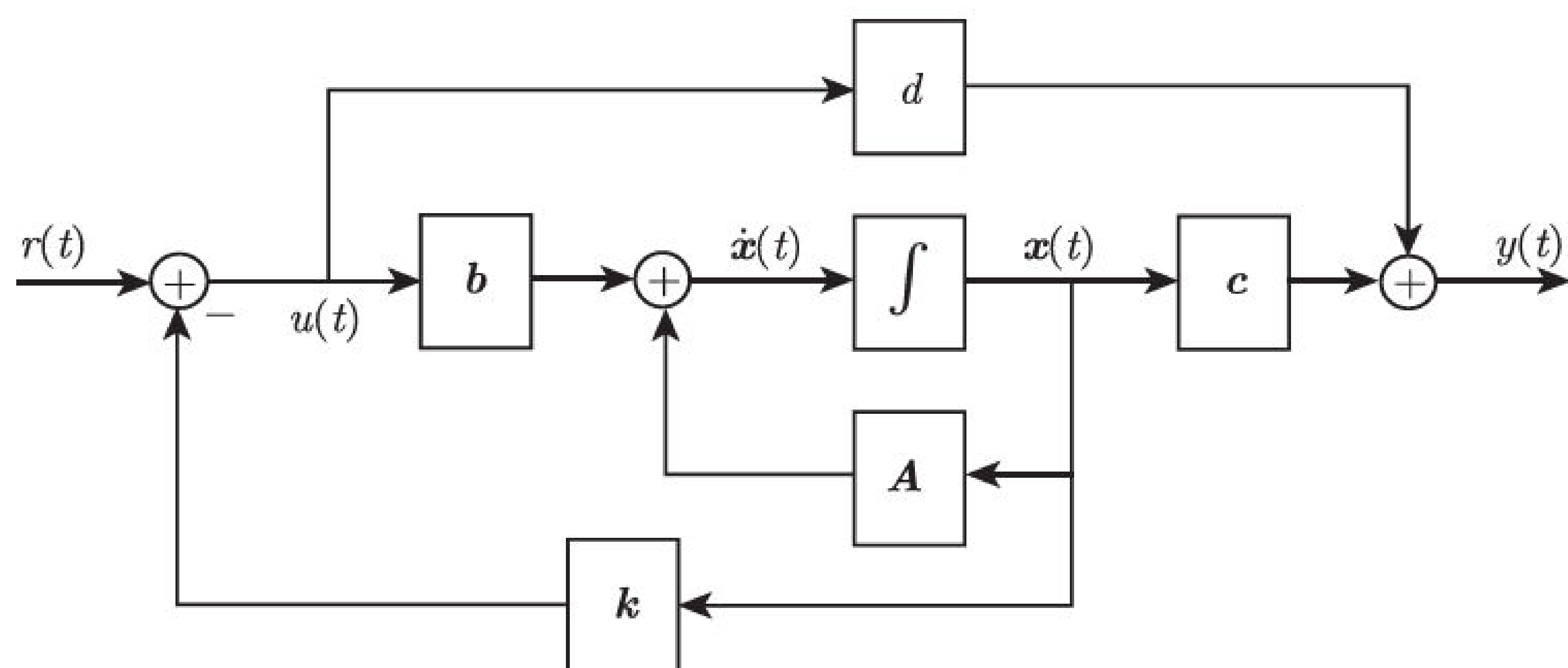



图 6.2.2 状态反馈系统框图 $[u(t) = r(t) - \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}(t)]$

由于状态是一个向量, 对于 SISO 系统 (6.2.1), 输入 $u(t)$ 是一个标量, 故从状态到输入端的反馈增益 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ 是一个行向量. 对于负反馈, **状态反馈表达式** 为

$$u(t) = r(t) - \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}(t),$$

注: 线性系统的稳定性与系统输入信号无关, 有许多资料, 直接把状态反馈写为 $u(t) = -\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}(t)$. 将 $u(t) = r(t) - \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}(t)$ 代入式 (6.2.1) 得到

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}[r(t) - \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}(t)],$$

或

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}r(t).$$

状态反馈后系统的 **特征多项式** (Characteristic Polynomial) 为

$$f(s) := \det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k})].$$

状态反馈 **极点配置** (Pole Placement) 就是: 对于给定的 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, 以及期望闭环系统极点 $s_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ (可能包含重极点), 确定一个增益向量 $\boldsymbol{k} = [k_1, k_2, \cdots, k_n]$, 使特征方程 $f(s) = 0$ 以 $s_i$ 为根.

**注 6.2.1** 从这里, 我们还不能看出, 对于给定的 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, 是否可以通过选择增益向量 $\boldsymbol{k}$ 任意配置闭环系统极点. 也就是说, 是否可以通过选择增益向量 $\boldsymbol{k}$ 使 $f(s)$ 有任意的零点 (即系统极点). 下节通过控制器规范型状态反馈来说明: **状态反馈可以任意配置极点的条件是系统完全可控.**

**2. 状态反馈极点配置的步骤**

(1) 判断系统的能控性. 对于给定的系统 (6.2.1), $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $d$ 已知, 计算能控性矩阵

$$\boldsymbol{Q}_c := [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}] \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

如果 $\boldsymbol{Q}_c$ 满秩, 即 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{Q}_c] = n$, 说明系统能控, 那么状态反馈可以任意配置闭环系统极点.

(2) 计算闭环系统的特征多项式. 因为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $d$ 已知, 故状态反馈闭环系统特征多项式

$$f(s) := \det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k})]$$

是 $s$ 的 $n$ 次首一多项式, 而且是 $k_i$ 的函数.

(3) 对于给定的闭环系统极点 $s_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 构造期望的闭环系统特征多项式:

$$\begin{aligned} f'(s) &= (s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n) \\ &= s^n-(s_1+s_2+\cdots+s_n)s^{n-1}+\cdots+(-1)^n s_1 s_2\cdots s_n \\ &=: s^n+a_1' s^{n-1}+a_2' s^{n-2}+\cdots+a_n'. \end{aligned}$$

(4) 比较系数计算状态反馈增益向量 $\boldsymbol{k}$. 令闭环系统特征多项式 $f(s)$ 等于期望的闭环系统特征多项式 $f'(s)$, 即

$$\det[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k})] = s^n+a_1' s^{n-1}+a_2' s^{n-2}+\cdots+a_n'.$$

比较两边 $s$ 同次幂的系数, 得到关于 $k_i$ 的线性方程组, 求解出 $k_i$, 就得到状态反馈增益向量 $\boldsymbol{k}=[k_1,k_2,\cdots,k_n]$.

(5) 计算闭环系统状态空间方程:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}r(t), \\ y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t)+d[r(t)-\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}(t)] \\ \qquad = (\boldsymbol{c}-d\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}(t)+dr(t), \end{cases}$$

闭环系统的传递函数为

$$G_b(s) := (\boldsymbol{c}-d\boldsymbol{k})[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k})]^{-1}\boldsymbol{b}+d.$$

当 $d=0$ 时, 闭环系统状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}r(t), \\ y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t), \end{cases}$$

闭环系统的传递函数为

$$G_b(s) := \boldsymbol{c}[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k})]^{-1}\boldsymbol{b}.$$

**注 6.2.2** 系统的不可约传递函数等于系统能控能观测子系统的传递函数. 也就是说, 状态反馈只能配置系统可控子系统的极点 (可以把不稳定极点配置为稳定极点), 状态反馈不能改变不可控子系统的极点. 如果一个系统的不能控子系统是稳定的, 则可以通过状态反馈将一个不稳定系统配置为稳定系统, 这样的系统称为能镇定系统. 因此, 状态反馈能稳定 (能镇定) 要求不可控子系统是稳定的.

对于稳定或不稳定的能控系统, 都可以通过状态反馈配置稳定的闭环极点使系统稳定, 这样的系统称为可稳定系统. 因为状态反馈只能任意配置可控状态子系统的极点, 而不能配置不可控子系统的极点. 因此, 当不可控子系统本身是稳定的, 可控子系统可以是不稳定的, 也可以通过状态反馈使其稳定, 这样的系统称为 **能镇定** 系统.

**注 6.2.3 开放问题**

对于跟踪问题 [系统输出 $y(t)$ 跟踪参考输入信号 $r(t)$], 假设给定 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^{1\times n}$, 系统的初始状态为零, 是否存在一个最佳的状态反馈增益向量 $\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^{1\times n}$, 使得下列输出跟踪误差准则函数 (跟踪误差平方积分准则函数) 最小,

$$J=\int_0^{\infty}[r(t)-y(t)]^2\mathrm{d}t,$$

或跟踪误差平方时间积分准则函数,

$$J=\int_0^{\infty} t[r(t)-y(t)]^2\mathrm{d}t.$$

读者可以针对一个二阶系统

$$G(s)=\frac{b}{s^2+as+b},\quad a,b>0$$

对应的状态空间模型, 假设输入信号为单位阶跃函数 $r(t)=1(t)$ 时进行讨论.

**例 6.2.1** 设被控对象的传递函数为

$$G(s)=\frac{3}{s^2-2s-5},$$

设计状态反馈, 将极点配置在 $s=-2+\mathrm{j}3$ 和 $s=-2-\mathrm{j}3$.

**解** 这个传递函数的控制器规范型为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}2&5\\1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}u,\quad y=[0,\ 3]\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&5\\1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=[0,\ 3].$$

设状态反馈为 $u=r-\boldsymbol{kx}$, 计算反馈增益向量 $\boldsymbol{k}=[k_1,\ k_2]$. 由于

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bk}=\begin{pmatrix}2&5\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}[k_1,k_2]=\begin{pmatrix}2&5\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k_1&k_2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-k_1&5-k_2\\1&0\end{pmatrix}.$$

状态反馈闭环系统的特征多项式为

$$f(s):=\det[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bk})]=\begin{vmatrix}s-2+k_1&-5+k_2\\-1&s\end{vmatrix}=s^2+(-2+k_1)s-5+k_2.$$

期望的系统特征多项式为

$$f'(s)=(s+2-\mathrm{j}3)(s+2+\mathrm{j}3)=s^2+4s+13.$$

令 $f(s)=f'(s)$, 即

$$s^2+(-2+k_1)s-5+k_2=s^2+4s+13.$$

比较两边 $s$ 同次幂的系数得到方程

$$-2+k_1=4,\quad -5+k_2=13.$$

故状态反馈增益向量为

$$\boldsymbol{k}=[k_1,\ k_2]=[6,\ 18].$$

状态反馈闭环系统为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bk})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}r(t)\\ \qquad\ =\begin{pmatrix}-4&-13\\1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}r(t)\\ y(t)=[0,\ 3]\boldsymbol{x}(t),\end{cases}$$

闭环系统的传递函数为

$$G_b(s) := \boldsymbol{c}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k})]^{-1}\boldsymbol{b} = [0,\ 3]\begin{pmatrix} s+4 & 13 \\ -1 & s \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= [0,\ 3]\frac{\begin{pmatrix} s & -13 \\ 1 & s+4 \end{pmatrix}}{(s+4)s+13}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{s^2+4s+13}.$$

**例 6.2.2** 设被控对象的传递函数为

$$G(s) = \frac{3}{s^2-2s-5},$$

设计状态反馈, 将极点配置在 $s=-2+\mathrm{j}3$ 和 $s=-2-\mathrm{j}3$.

**解** 这个传递函数不存在零极点对消, 其观测器规范型实现也是能控的. 这个传递函数的观测器规范型为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad y = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = [1,\ 0].$$

对应的状态空间信号流如图 6.2.3 所示.

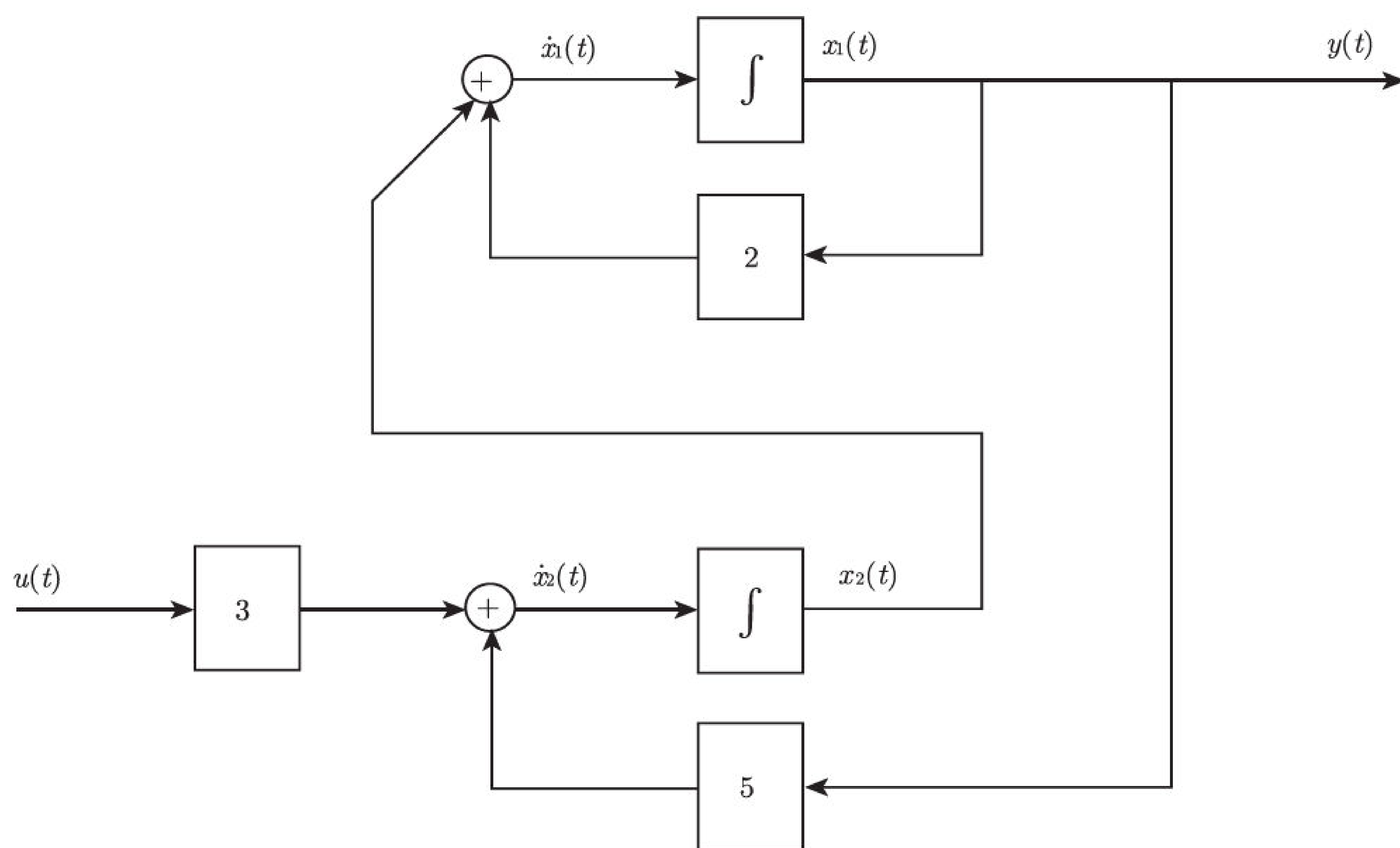



图 6.2.3 例 6.2.2 的状态空间信号流图

设状态反馈为 $u = r - \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}$. 加入状态反馈后的系统信号流如图 6.2.4 所示.

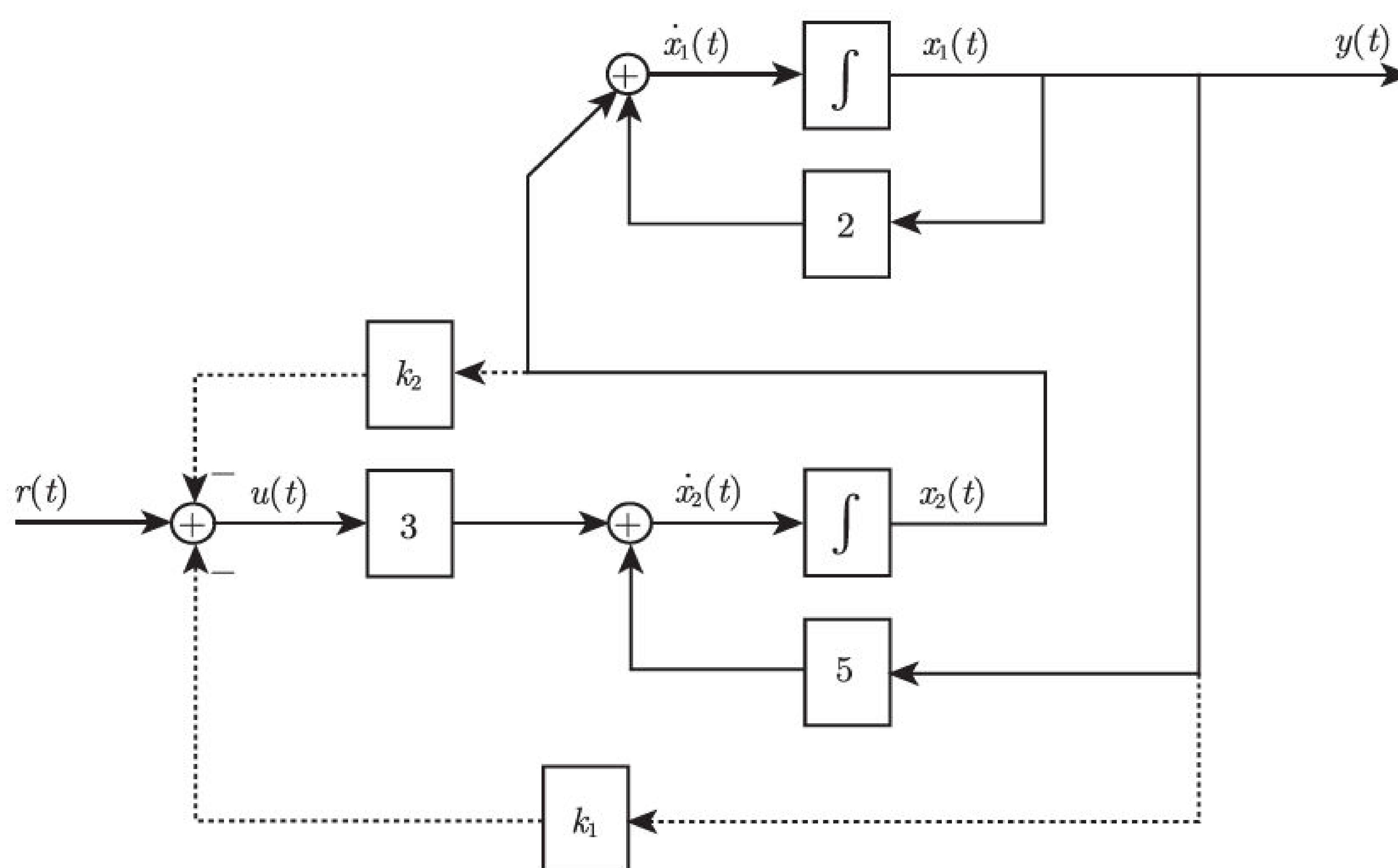



图 6.2.4 例 6.2.2 的状态反馈系统信号流图

下面计算反馈增益向量 $\boldsymbol{k}=[k_1,\ k_2]$. 由于

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bk}=\begin{pmatrix}2&1\\5&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}[k_1,k_2]$$
$$=\begin{pmatrix}2&1\\5&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\3k_1&3k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\5-3k_1&-3k_2\end{pmatrix}.$$

状态反馈闭环系统的特征多项式为

$$\begin{aligned}f(s)&:=\det[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bk})]\\&=\begin{vmatrix}s-2&-1\\-5+3k_1&s+3k_2\end{vmatrix}\\&=(s-2)(s+3k_2)-5+3k_1\\&=s^2+(-2+3k_2)s-5+3k_1-6k_2.\end{aligned}$$

期望的系统特征多项式为

$$f'(s)=(s+2-\mathrm{j}3)(s+2+\mathrm{j}3)=s^2+4s+13.$$

令 $f(s)=f'(s)$, 即

$$s^2+(-2+3k_2)s-5+3k_1-6k_2=s^2+4s+13.$$

比较两边 $s$ 同次幂的系数得到方程

$$\begin{cases}-2+3k_2=4,\\-5+3k_1-6k_2=13.\end{cases}$$

故状态反馈增益向量为

$$\boldsymbol{k}=[k_1,\ k_2]=[10,\ 2].$$

状态反馈闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{bk})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}r(t) \\ \qquad = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -25 & -6 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} r(t) \\ y(t) = [1,\ 0]\boldsymbol{x}(t), \end{cases}$$

闭环系统的传递函数为

$$\begin{aligned} G_b(s) &:= \boldsymbol{c}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{bk})]^{-1}\boldsymbol{b} \\ &= [1,\ 0]\begin{pmatrix} s-2 & -1 \\ 25 & s+6 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= [1,\ 0]\frac{\begin{pmatrix} s+6 & 1 \\ -25 & s-2 \end{pmatrix}}{(s-2)(s+6)+25}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{s^2+4s+13}. \end{aligned}$$

读者可验算一下, 若采用传递函数的控制器规范型实现, 极点配置计算过程要简单一些.

### 6.2.2 控制器规范型极点配置方法

这里讨论基于控制器规范型的 **极点配置方法**.

设系统传递函数为

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n}.$$

对应的控制器规范型实现为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y = [b_1, b_2, \cdots, b_n]\boldsymbol{x}. \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t), \end{cases} \tag{6.2.2}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\boldsymbol{c} = [b_1, b_2, \cdots, b_n] \in \mathbb{R}^{1\times n}.$$

令 **状态反馈** 为 $u(t) = r(t) - \boldsymbol{kx}(t)$, 其中 $r(t)$ 为 **参考输入** (Reference Input), 状态反馈增益向量为

$$\boldsymbol{k} = [k_1, k_2, \cdots, k_n] \in \mathbb{R}^{1\times n}.$$

故

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k} &= \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} [k_1, k_2, \cdots, k_n] \\
&= \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-1} & k_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(a_1+k_1) & -(a_2+k_2) & \cdots & -(a_{n-1}+k_{n-1}) & -(a_n+k_n) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 为 **友矩阵** (Companion Matrix), $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}$ 也为友矩阵, 所以我们可以直接写出其特征多项式

$$f(s)=\det[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k})]=s^n+(a_1+k_1)s^{n-1}+(a_2+k_2)s^{n-2}+\cdots+(a_n+k_n).$$

设期望的系统极点为 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ (可能包含重极点), 对应的特征多项式为

$$
\begin{aligned}
(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n) &= s^n-(s_1+s_2+\cdots+s_n)s^{n-1}+\cdots+(-1)^n s_1 s_2\cdots s_n \\
&=: s^n+a_1' s^{n-1}+a_2' s^{n-2}+\cdots+a_n'.
\end{aligned}
$$

令特征多项式 $f(s)$ 等于上式的期望闭环特征多项式, 即

$$s^n+(a_1+k_1)s^{n-1}+(a_2+k_2)s^{n-2}+\cdots+(a_n+k_n)=s^n+a_1' s^{n-1}+a_2' s^{n-2}+\cdots+a_n'.$$

比较两边 $s$ 同次幂的系数, 可以求得 $k_i=a_i'-a_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 或

$$\boldsymbol{k}=[k_1,k_2,\cdots,k_n]=[a_1'-a_1, a_2'-a_2,\cdots,a_n'-a_n]=:\boldsymbol{a}'-\boldsymbol{a}, \tag{6.2.3}$$

其中

$$\boldsymbol{a}'=[a_1',a_2',\cdots,a_n'], \quad \boldsymbol{a}=[a_1,a_2,\cdots,a_n].$$

故控制器规范型可以任意配置极点, 且控制器规范型的状态反馈增益向量 $\boldsymbol{k}$ 特别容易计算. 非控制器规范型的状态反馈配置极点的计算要复杂, 所以在许可的情况下, 可采用控制器规范型模型进行状态反馈极点配置.

因为原系统 (6.2.2) 为控制器规范型, 状态反馈系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}r(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0, \\ y(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) \end{cases} \tag{6.2.4}$$

也是控制器规范型, 故容易求出状态反馈系统的传递函数 (从 $r(t)$ 到 $y(t)$ 的传递函数),

$$\begin{aligned} G_b(s) &= \boldsymbol{c}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k})]^{-1}\boldsymbol{b} \\ &= \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + (a_1 + k_1)s^{n-1} + (a_2 + k_2)s^{n-2} + \cdots + (a_n + k_n)}. \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

从这个控制器规范型状态反馈极点配置例子, 我们可以得到如下结论.

(1) 一个系统通过状态反馈任意配置极点的充要条件是系统状态 (完全) 能控, 因为任何可控系统都可以通过非奇异线性变换化为控制器规范型.

(2) 从式 (6.2.5) 可知, 状态反馈只改变系统极点, 不改变系统零点 ($d = 0$ 时).

(3) 状态反馈不改变系统的能控性, 但可改变系统的能观测性, 因为控制器规范型在状态反馈后仍为控制器规范型, 控制器规范型肯定是能控的.

(4) 如果被控系统是能控的 (状态能控的), 则总可以找到一个状态反馈增益向量 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ [对输入为向量 $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ 的多输入系统, 为增益矩阵 $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{r\times n}$], 利用状态反馈方法, 使闭环系统极点配置到任意给定的期望位置.

(5) 对单输入系统, 情况要简单得多, 并且状态反馈增益向量是唯一的.

(6) 当控制输入为向量时, 即对于多输入系统, 极点配置方法很多, 有的方法也很复杂, 本书不加讨论. 多输入系统状态反馈配置相同的极点, 状态反馈增益矩阵也不唯一, 可以选择的自由参数也多于 $n$ 个, 也就是说, 除了适当地配置 $n$ 个闭环极点外, 还可以通过选择其他自由参数来改善闭环系统的性能 (如上升时间, 超调量等), 可是还没有具体理论指导如何选择这些自由参数来改善系统的性能, 这是一个 **开放问题** (Open Problem).

**例 6.2.3** 设被控对象的传递函数为

$$G(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)},$$

设计状态反馈, 将极点配置在 $s = -5$ 和 $s = -6$.

**解** 把被控对象的传递函数改写为

$$G(s) = \frac{2s+3}{s^2+3s+2} = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}, \quad \boldsymbol{a} := [a_1,\ a_2] = [3,\ 2],\ [b_1,\ b_2] = [2,\ 3].$$

这里把传递函数化为控制器规范型, 进行极点配置. 参考例 3.5.5, 根据传递函数可直接写出系统的控制器规范型,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad y = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = [b_1,\ b_2] = [2,\ 3].$$

期望的系统特征多项式为

$$s^2 + a_1' s + a_2' = (s+5)(s+6) = s^2 + 11s + 30,$$

所以

$$\boldsymbol{a}' = [a_1',\ a_2'] = [11,\ 30].$$

设状态反馈为 $u = r - \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}$. 根据式 (6.2.3), 可知状态反馈增益向量为

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a} = [a_1',\ a_2'] - [a_1,\ a_2]$$

$$=[11,\ 30]-[3,\ 2]=[8,\ 28].$$

若不为控制器规范型实现, 计算过程要复杂一些. 参考例 3.5.5, 写出系统的能控性规范型实现,

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u,\quad y=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x},$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-a_2\\1&-a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\1&-3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}=[\beta_1,\ \beta_2]=[b_1,\ b_2]\begin{pmatrix}1&0\\a_1&1\end{pmatrix}^{-\mathrm{T}}$$

$$=[b_1,\ b_2]\begin{pmatrix}1&-a_1\\0&1\end{pmatrix}=[2,\ 3]\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}=[2,\ -3].$$

设状态反馈为 $u=r-\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}$. 由于

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}=\begin{pmatrix}0&-a_2\\1&-a_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}[k_1,\ k_2]$$

$$=\begin{pmatrix}0&-a_2\\1&-a_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k_1&k_2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_1&-a_2-k_2\\1&-a_1\end{pmatrix}.$$

状态反馈系统的特征多项式为

$$\det[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k})]=\begin{vmatrix}s+k_1&a_2+k_2\\-1&s+a_1\end{vmatrix}$$

$$=(s+k_1)(s+a_1)+a_2+k_2$$

$$=s^2+(a_1+k_1)s+a_2+a_1k_1+k_2.$$

令这个特征多项式等于期望的特征多项式, 即

$$s^2+(a_1+k_1)s+a_2+a_1k_1+k_2=s^2+a_1's+a_2'.$$

比较两边 $s$ 同次幂的系数得到方程

$$\begin{cases}a_1+k_1=a_1',\\a_2+a_1k_1+k_2=a_2'.\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}k_1=a_1'-a_1,\\a_1k_1+k_2=a_2'-a_2.\end{cases}$$

于是可求得

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\a_1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_1'-a_1\\a_2'-a_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}11-3\\30-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}.$$

故状态反馈增益向量为

$$\boldsymbol{k}=[k_1,\ k_2]=[8,\ 4].$$

从这个例子可以看出, (1) 采用控制器规范型进行极点配置, 计算过程要简单. (2) 采用不同的状态空间模型, 即使期望的闭环极点相同, 状态反馈增益向量也是不同的. (3) 采用状态空间对角标准形, 进行极点配置, 还需要进行 $\boldsymbol{A}$ 矩阵对角化, 计算过程比基于控制器规范型要复杂.

**例 6.2.4** 设被控对象为三阶系统, 其传递函数为

$$G(s)=\frac{b_1s^2+b_2s+b_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}=\frac{s^2+s+1}{s^3+s^2+s+1},$$

设计状态反馈, 使系统的特征多项式为

$$s^3+a_1's^2+a_2's+a_3'=s^3+3s^2+3s+1.$$

**解** 下面仍把传递函数化为控制器规范型, 进行极点配置. 参考例 3.5.5, 可知 $G(s)$ 对应的控制器规范型为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}-a_1 & -a_2 & -a_3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=[b_1,b_2,b_3]\boldsymbol{x}(t).\end{cases}$$

这是一个控制器规范型, 设状态反馈为 $u=r-\boldsymbol{kx}$, 那么根据式 (6.2.3), 容易求得状态反馈增益向量,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}&=[k_1,k_2,k_3]=[a_1'-a_1,a_2'-a_2,a_3'-a_3]\\&=[3-1,\ 3-1,\ 1-1]=[2,\ 2,\ 0].\end{aligned}$$

读者可以基于能控性规范型, 配置这个例子的极点, 可以看出控制器规范型用于极点配置的优点.

### 6.2.3 能控性规范型极点配置方法

上面讨论了控制器规范型模型的状态反馈极点配置方法, 以及状态反馈增益向量的计算方法. 能控性规范型也是一种重要可控规范型, 下面讨论能控性规范型极点配置算法. 基本思想是**通过二阶和三阶系统能控性规范型的极点配置例子, 延伸到高阶系统**, 具体过程从略.

**1. 二阶系统**

**例 6.2.5** 设被控对象的传递函数为

$$G(s)=\frac{b_1s+b_2}{s^2+a_1s+a_2}=\frac{2s+3}{s^2+3s+2},\quad \boldsymbol{a}:=[a_1,\ a_2]=[3,\ 2],\ [b_1,\ b_2]=[2,\ 3].$$

设计状态反馈, 将极点配置在 $s=-3+\mathrm{j}4$ 和 $s=-3-\mathrm{j}4$.

**解** 参考例 6.2.2, 写出系统的能控性规范型实现,

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}0 & -a_2\\ 1 & -a_1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=[\beta_1,\ \beta_2]\boldsymbol{x}(t).\end{cases}$$

这里

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -a_2\\ 1 & -a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=[\beta_1,\ \beta_2]=[2,\ -3].$$

期望的系统特征多项式为

$$s^2+a_1's+a_2'=(s+3-\mathrm{j}4)(s+3+\mathrm{j}4)=s^2+6s+25,$$

所以

$$\boldsymbol{a}' = [a_1', \ a_2'] = [6, \ 25].$$

设状态反馈为 $u(t) = r(t) - \boldsymbol{kx}(t)$. 由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{bk} &= \begin{pmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} [k_1, \ k_2] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & -a_2 - k_2 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

状态反馈系统的特征多项式为

$$\begin{aligned}\det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{bk})] &= \begin{vmatrix} s + k_1 & a_2 + k_2 \\ -1 & s + a_1 \end{vmatrix} \\ &= (s + k_1)(s + a_1) + a_2 + k_2 \\ &= s^2 + (a_1 + k_1)s + a_2 + a_1 k_1 + k_2.\end{aligned}$$

令这个特征多项式等于期望的特征多项式, 即

$$s^2 + (a_1 + k_1)s + a_2 + a_1 k_1 + k_2 = s^2 + a_1' s + a_2'.$$

比较两边 $s$ 同次幂的系数得到方程:

$$\begin{cases} a_1 + k_1 = a_1', \\ a_2 + a_1 k_1 + k_2 = a_2'. \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} k_1 = a_1' - a_1, \\ a_1 k_1 + k_2 = a_2' - a_2. \end{cases}$$

于是可求得

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1' - a_1 \\ a_2' - a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 - 3 \\ 25 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

故状态反馈增益向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k} &= [k_1, \ k_2] = [a_1' - a_1, \ a_2' - a_2] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-\mathrm{T}} \\ &= [3, \ 14].\end{aligned} \tag{6.2.6}$$

**2. 三阶系统**

**例 6.2.6** 设被控对象为三阶系统, 其传递函数为

$$G(s) = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3},$$

设计状态反馈, 使系统的特征多项式为 $f'(s) = s^3 + a_1' s^2 + a_2' s + a_3'$.

**解** 参考例 3.5.5, 可知 $G(s)$ 对应的能控性规范型为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]\boldsymbol{x}(t) \\ \qquad = [b_1, b_2, b_3] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{x}(t). \end{cases}$$

对于能控性规范型, 状态反馈增益向量的计算稍微复杂一点. 这里

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3].$$

设状态反馈为

$$u(t) = r(t) - \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}(t).$$

闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}r(t), \quad y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t).$$

由于

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} [k_1, k_2, k_3] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & -k_2 & -a_3 - k_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

状态反馈系统的特征多项式为

$$\begin{aligned} f(s) &= \det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k})] \\ &= \begin{vmatrix} s + k_1 & k_2 & a_3 + k_3 \\ -1 & s & a_2 \\ 0 & -1 & s + a_1 \end{vmatrix} = (s + k_1) \begin{vmatrix} s & a_2 \\ -1 & s + a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_2 & a_3 + k_3 \\ -1 & s + a_1 \end{vmatrix} \\ &= (s + k_1)(s^2 + a_1 s + a_2) + k_2(s + a_1) + a_3 + k_3 \\ &= s^3 + (a_1 + k_1)s^2 + (a_2 + a_1 k_1 + k_2)s + a_3 + a_2 k_1 + a_1 k_2 + k_3. \end{aligned}$$

令这个特征多项式 $f(s)$ 等于期望的特征多项式 $f'(s)$, 即

$$s^3 + (a_1 + k_1)s^2 + (a_2 + a_1 k_1 + k_2)s + a_3 + a_2 k_1 + a_1 k_2 + k_3 = s^3 + a_1' s^2 + a_2' s + a_3'.$$

比较两边 $s$ 同次幂的系数得到方程:

$$\begin{cases} a_1 + k_1 = a_1', \\ a_2 + a_1 k_1 + k_2 = a_2', \\ a_3 + a_2 k_1 + a_1 k_2 + k_3 = a_3'. \end{cases}$$

把 $a_i$ 移到等号右边可得

$$\begin{cases} k_1 = a_1' - a_1, \\ a_1k_1 + k_2 = a_2' - a_2, \\ a_2k_1 + a_1k_2 + k_3 = a_3' - a_3. \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' - a_1 \\ a_2' - a_2 \\ a_3' - a_3 \end{pmatrix}.$$

解得

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1' - a_1 \\ a_2' - a_2 \\ a_3' - a_3 \end{pmatrix}.$$

所以状态反馈增益向量为

$$\boldsymbol{k} = [k_1, k_2, k_3] = [a_1' - a_1, a_2' - a_2, a_3' - a_3] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-\mathrm{T}}. \tag{6.2.7}$$

**3. $n$ 阶系统**

设传递函数

$$G(s) = \frac{b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \cdots + a_n}.$$

对应的能控性规范型实现为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u(t),$$

$$\begin{aligned} y(t) &= [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n]\boldsymbol{x}(t) \\ &= [b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n] \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & 1 & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{x}(t). \end{aligned}$$

这里

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$\boldsymbol{c}=[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_n]\in\mathbb{R}^{1\times n}$.

设状态反馈为

$$u(t)=r(t)-\boldsymbol{kx}(t).$$

则闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bk})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}r(t),\quad y(t)=\boldsymbol{cx}(t).$$

求状态反馈增益向量, 使系统的特征多项式为 $s^n+a_1's^{n-1}+a_2's^{n-2}+\cdots+a_n'$.

观察式 (6.2.6) 和式 (6.2.7), 可知基于能控性规范型的 **状态反馈增益向量** 为

$$\boldsymbol{k}=[k_1,k_2,\cdots,k_n]$$

$$=[a_1'-a_1,a_2'-a_2,\cdots,a_n'-a_n]\begin{pmatrix}1&&&&\\a_1&1&&&\\a_2&a_1&1&&\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\\a_{n-1}&\cdots&a_2&a_1&1\end{pmatrix}^{-\mathrm{T}}. \tag{6.2.8}$$

### 6.2.4　一般可控状态空间模型极点配置方法

**一般可控状态空间模型极点配置方法**的基本思想: 因为控制器规范型的极点配置方法特别简单, 所以先把状态空间模型变换为控制器规范型, 求出控制器规范型的状态反馈增益向量 $\boldsymbol{k}_c$, 然后通过反变换求得原系统状态反馈增益向量 $\boldsymbol{k}$. 当然, 也可以直接通过状态反馈的定义进行配置. **理论的发展是希望找到一个系统的方法, 即找到直接或间接的计算公式**.

考虑单输入单输出系统:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{Ax}(t)+\boldsymbol{b}u(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\\ y(t)=\boldsymbol{cx}(t),\end{cases} \tag{6.2.9}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ 为系统状态向量, $u(t)\in\mathbb{R}$ 和 $y(t)\in\mathbb{R}$ 分别为系统输入和输出, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^{1\times n}$.

设状态反馈闭环系统期望的特征多项式为

$$f'(s):=s^n+a_1's^{n-1}+a_2's^{n-2}+\cdots+a_{n-1}'s+a_n'.$$

采用状态反馈 $u(t)=r(t)-\boldsymbol{kx}(t)$, 则得到闭环系统,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bk})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}r(t),\quad y(t)=\boldsymbol{cx}(t). \tag{6.2.10}$$

令其特征多项式等于期望的特征多项式 $f'(s)$, 即

$$\det[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bk})]=:s^n+a_1's^{n-1}+a_2's^{n-2}+\cdots+a_{n-1}'s+a_n',$$

比较两边 $s$ 同次幂系数, 得到一系列方程, 求状态反馈增益向量 $\boldsymbol{k}$.

基本思想: **把系统 (6.2.9) 变换为控制器规范型, 求出控制器规范型的状态反馈增益向量 $\boldsymbol{k}_c$, 然后通过反变换求得原系统状态反馈增益向量 $\boldsymbol{k}$.**

对式 (6.2.9) 进行线性变换 (Linear Transformation) $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{T}_c\boldsymbol{x}_c(t)$, $\boldsymbol{T}_c$ 为 **非奇异矩阵** (Non-Singular Matrix). 参考 3.5.1 节的化状态空间模型为控制器规范型方法, 如果变换矩阵选择为

$$\boldsymbol{T}_c=\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-1}\\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{r}_n\end{pmatrix}^{-1}\in\mathbb{R}^{n\times n},\quad \boldsymbol{r}_n=[0,0,\cdots,0,1][\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]^{-1},$$

那么就得到下列 **控制器规范型** (Controller Canonical Form),

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_c(t)=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x}_c(t)+\boldsymbol{b}_cu(t),\\ \ y(t)\ =\boldsymbol{c}_c\boldsymbol{x}_c(t),\end{cases}\tag{6.2.11}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_c=\boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_c=\begin{pmatrix}-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}&-a_n\\ 1&0&\cdots&0&0\\ 0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n},$$

$$\boldsymbol{b}_c=\boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n},$$

$$\boldsymbol{c}_c=\boldsymbol{c}\boldsymbol{T}_c\in\mathbb{R}^{1\times n},$$

$a_i$ 是系统 (6.2.9) 的特征多项式的系数,

$$p(s)=\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=:s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n.$$

对系统 (6.2.11) 采用状态反馈 $u(t)=r(t)-\boldsymbol{k}_c\boldsymbol{x}_c(t)$, 则得到闭环系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_c(t)=(\boldsymbol{A}_c-\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{k}_c)\boldsymbol{x}_c(t)+\boldsymbol{b}_cr(t),\quad y(t)=\boldsymbol{c}_c\boldsymbol{x}_c(t).$$

参考 6.2.2 节控制器规范型极点配置公式 (6.2.3), 可知状态反馈增益向量为

$$\boldsymbol{k}_c=[a_1'-a_1,a_2'-a_2,\cdots,a_n'-a_n].\tag{6.2.12}$$

又

$$\begin{aligned}u(t)&=r(t)-\boldsymbol{k}_c\boldsymbol{x}_c(t)\\ &=r(t)-\boldsymbol{k}_c\boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{x}(t)\\ &=r(t)-\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}(t).\end{aligned}$$

于是, 可得一般可控状态空间模型 (6.2.9) 极点配置的 **状态反馈增益向量**:

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_c\boldsymbol{T}_c^{-1}=[a_1'-a_1,a_2'-a_2,\cdots,a_n'-a_n]\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-1}\\\boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}^{n-2}\\\vdots\\\boldsymbol{r}_n\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{r}_n\end{pmatrix}, \tag{6.2.13}$$

$$\boldsymbol{r}_n=[0,0,\cdots,0,1][\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]^{-1}\in\mathbb{R}^{1\times n}. \tag{6.2.14}$$

这个极点配置算法可以进一步发展为 **爱克曼公式** (Ackermann's Formula).

**注 6.2.4**　对给定的单输入能控状态空间模型, 存在唯一的状态反馈, 可以任意配置闭环系统的极点. 但对多输入系统, 状态反馈配置极点的方法很多, 且状态反馈增益矩阵也不唯一. 也就是说, 状态反馈阵有很多冗余参数 (自由参数), 除了适当地配置 $n$ 个闭环极点外, 如何选择其他冗余参数来改善系统性能, 是一个 **开放问题** (Open Problem).

### 6.2.5　状态空间系统输出反馈

**输出反馈不可能任意配置系统极点, 即使系统是输出完全能控的**. 因为标量系统的输出维数是 1, 可调节的反馈增益系数也是一维, 故不能任意调节闭环系统的 $n$ 个极点 (一阶系统除外). 解决的方法是使用动态反馈 (反馈回路本身是一个动态子系统), 参见 6.1 节. 下面用一个例子加以说明.

考虑线性时不变 SISO 系统:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}u(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\\ y(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t),\end{cases} \tag{6.2.15}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ 为系统状态向量, $u(t)\in\mathbb{R}$ 和 $y(t)\in\mathbb{R}$ 分别为系统输入和输出, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^{1\times n}$.

**输出反馈** (Output Feedback) 是把系统输出信号 $y(t)$, 经过输出反馈系数 $k\in\mathbb{R}$ 引到输入端进行反馈, 如图 6.2.5 所示.

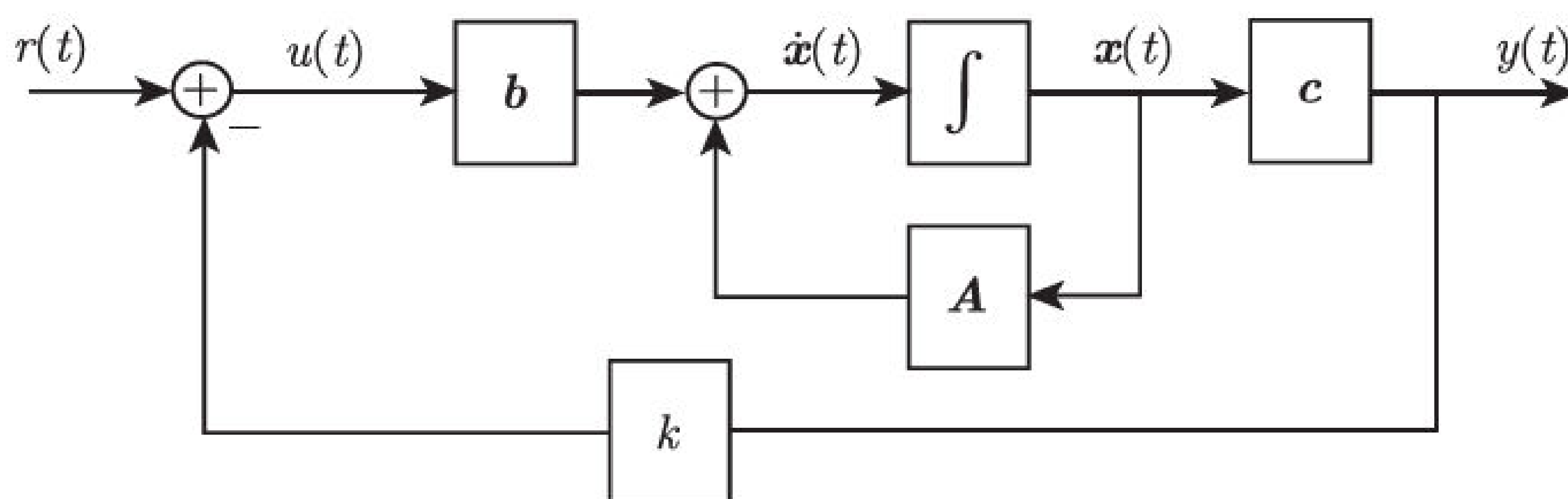



图 6.2.5　输出反馈系统框图 $[u(t)=r(t)-ky(t)]$

$r(t)$ 为设定值 (参考输入, 期望输出). **输出反馈表达式** 为

$$u(t)=r(t)-ky(t),$$

利用式 (6.2.15) 的第 2 式, 可得

$$u(t)=r(t)-k\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t),$$

将上式代入式 (6.2.15) 的第 1 式得到

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}[r(t) - k\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t)] \\ &= (\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}r(t).\end{aligned}$$

输出反馈后系统的 **特征多项式** (Characteristic Polynomial) 为

$$f(s) := \det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})].$$

对于给定的 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$, 上式只有一个可调参数 $k$, 故对于 $n \geqslant 2$ 的系统, 输出反馈不能任意配置闭环系统极点.

**例 6.2.7** 设被控对象的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + as + 6}, \quad a \text{ 为常数},$$

研究输出反馈, 是否可将闭环系统极点配置在 $s = -1$ 和 $s = -2$.

**解** 这个系统的控制器规范型实现为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad y = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -a & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = [0,\ 1].$$

又

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{b}\boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} -a & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}[0,\ 1] \\ &= \begin{pmatrix} -a & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -k-6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

输出反馈系统的特征多项式为

$$f(s) := \det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})] = \begin{vmatrix} s+a & k+6 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + as + k + 6.$$

期望的系统特征多项式为

$$s^2 + a_1's + a_2' = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2,$$

令闭环系统特征多项式等于期望的特征多项式, 得到

$$s^2 + as + k + 6 = s^2 + 3s + 2.$$

比较系数, 求得 $a = 3$, $k = -4$, 闭环系统的极点为 $-1$ 和 $-2$. 这里我们看到, 如果原系统中 $a \neq 3$, 如 $a = 5$, 那上述方程是矛盾的, 即输出反馈不能任意配置系统极点.

## 6.3 状态重构问题与状态观测器

对于状态完全能控的线性时不变系统, 可以通过线性状态反馈任意配置闭环系统极点. 状态反馈不仅需要期望闭环系统极点的信息, 而且更重要的是要求系统状态可测量. 此外, 系统镇定 (System Stabilization) (不可控状态本身是稳定的)、系统解耦、线性二次型最优控

制等问题也都可由状态反馈实现. 因此, 这要求系统所有状态变量都可测量到, 且可有效地用于状态反馈. 然而, 实际中并非所有状态变量都可测量, 也就是说, 有的状态变量或所有状态变量都无法得到时, 状态反馈就无法实现, 一个迁就的办法是对系统状态变量进行估计, 用估计的状态进行反馈, 这是一个新颖的尝试, 理论上证明也是成功的.

利用状态反馈配置系统极点, 需要系统状态的信息. 然而, 在很多情况下, 可以测量的变量是系统输入和输出, 而状态变量是不易测得或不可能测得的, 那么能否利用系统的输入和输出量来重构系统的状态呢? 答案是肯定的, 这就是本节要讨论的状态重构问题或状态估计问题. 估计状态变量的动态方程或动态系统称为 **状态观测器**, 又称为 **状态估计器**、**状态重构器**. 状态观测器的目的是重构系统的状态. 当重构状态变量的数目等于系统状态向量的维数时, 这样的观测器称为全维观测器; 小于状态向量的维数时, 就称为降维观测器.

换句话说, 估计系统状态或者观测状态变量的动态系统称为 **状态观测器** 或 **状态估计器** (State Estimator). 如果状态观测器能观测到系统的所有状态变量, 这种状态观测器称为 **全维状态观测器** (Full-Dimensional State Observer), 简称观测器. 有时不需要观测系统所有状态变量, 而只需观测系统不可量测的状态变量 (观测部分状态变量), 就是 **降维观测器** (Reduced-Order Observer).

### 6.3.1　开环状态观测器

考虑线性时不变单输入单输出系统 (SISO 系统):

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + du(t), \end{cases} \tag{6.3.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}$ 和 $y(t) \in \mathbb{R}$ 分别为系统输入和输出, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $d \in \mathbb{R}$.

对于稳定或不稳定的能控系统, 都可以通过状态反馈配置稳定的闭环极点使系统稳定, 这样的系统称为可稳定系统. 因为状态反馈只能任意配置可控状态子系统的极点, 而不能配置不可控子系统的极点. 因此, 当不可控子系统本身是稳定的, 可控子系统可以是不稳定的, 也可以通过状态反馈使其稳定, 这样的系统称为 **能镇定** 系统.

**参数估计** (Parameter Estimation) 就是利用系统输入输出 $u(t)$ 和 $y(t)$ 来估计系统未知参数或 **参数矩阵** $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, d)$, 而 **状态估计** (State Estimation) 是假设系统参数已知时, 利用系统输入 $u(t)$ 和输出 $y(t)$ 来估计未知系统状态.

**状态观测器** (State Observer) 就是基于可直接量测的输出和输入 (控制) 量来估计或重构状态变量. 利用系统的输入 $u(t)$ 和输出 $y(t)$ 用计算机软件模拟系统 (6.3.1), 就得到一个 **开环状态观测器** (开环状态估计器), 如图 6.3.1 所示, 其表达式为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \quad \hat{\boldsymbol{x}}(t_0) = \hat{\boldsymbol{x}}_0, \\ \hat{y}(t) = \boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + du(t), \end{cases} \tag{6.3.2}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态估计向量, $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}$ 是估计的系统输出 (观测器的输出), $\hat{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathbb{R}^n$ 为状态估计器的初值.

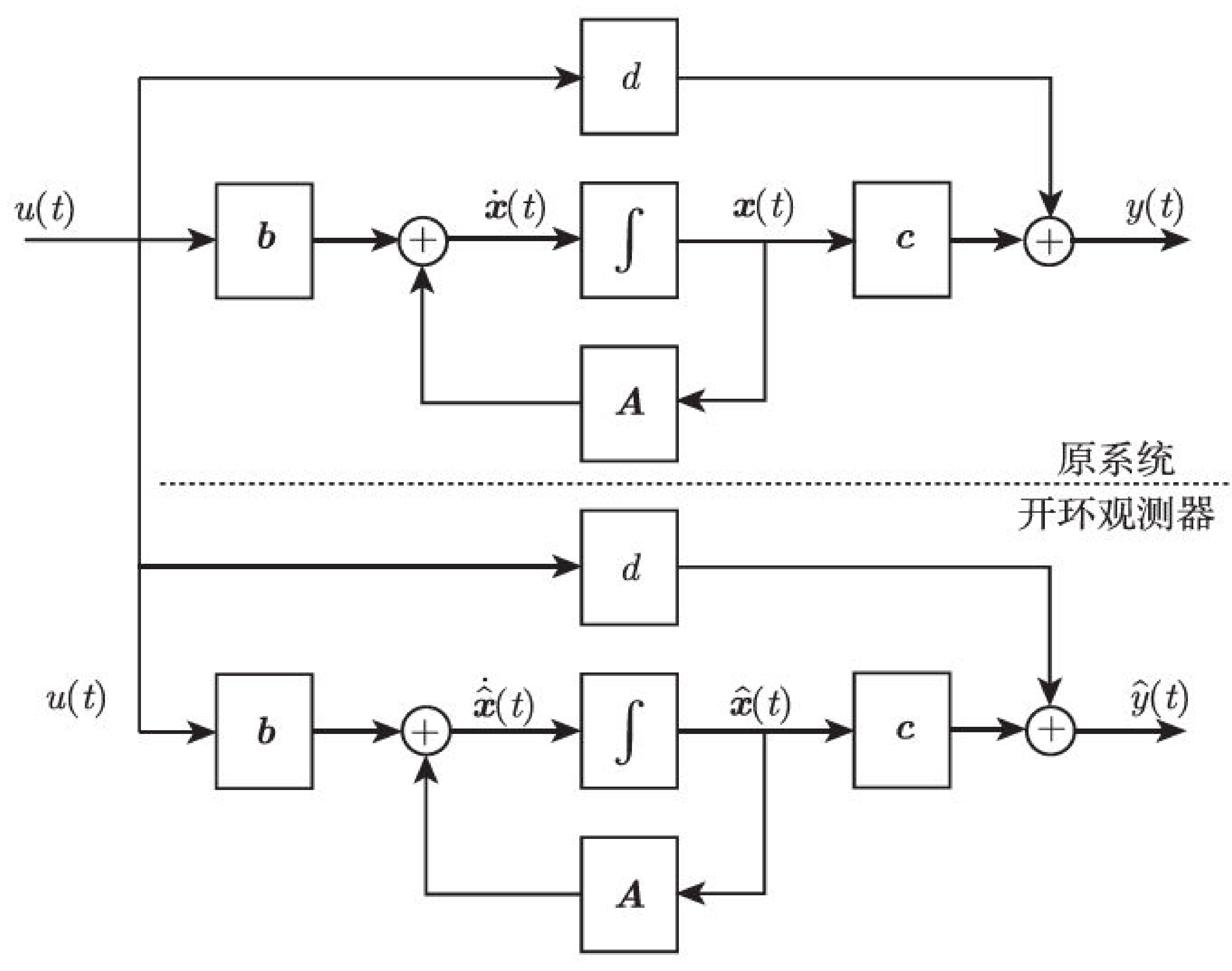



图 6.3.1 开环状态观测器框图

当模拟系统 (6.3.2) 与原系统 (6.3.1) 的状态向量初值相同时, 即 $\hat{\boldsymbol{x}}_0 = \boldsymbol{x}_0$ 时, 那么恒有两个系统的状态向量相等、输出也相等, 即 $\hat{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t)$ 和 $\hat{y}(t) = y(t)$, 参照状态方程 (4.1.13) 和 (4.1.14) 的解就容易明白. 在这种条件下, 就可以把 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ 作为 $\boldsymbol{x}(t)$ 进行状态反馈.

然而实际中, 要精确知道系统状态初值是很困难的, 甚至根本做不到, 所以模拟系统的状态初值只能预估 (预估就有误差) 或任意给定, 导致估计器状态初值与原系统状态初值有差异, 即使两个系统的系统参数矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, d)$ 完全相同, 也存在状态估计偏差 $\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t) \neq \boldsymbol{0}$. 况且, 实际系统的 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, d)$ 也是难以精确知道的, 模拟估计器的参数也不可能与实际系统相同.

因此, 采用反馈思想, 可以用两个系统的输出偏差 $y(t) - \hat{y}(t)$ 进行反馈校正设计闭环观测器. 下节讨论闭环观测器.

需要指出的是: 把式 (6.3.2) 与式 (6.3.1) 的对应式分别相减得到

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) - \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}[\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t)], \quad \hat{\boldsymbol{x}}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0) = \hat{\boldsymbol{x}}_0 - \boldsymbol{x}_0, \\ \hat{y}(t) - y(t) = \boldsymbol{c}[\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t)]. \end{cases} \tag{6.3.3}$$

这个系统的解为

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}[\hat{\boldsymbol{x}}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)], \\ \hat{y}(t) - y(t) = \boldsymbol{c}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}[\hat{\boldsymbol{x}}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)]. \end{cases} \tag{6.3.4}$$

由此可知, 如果系统 (6.3.2) 稳定, 即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有负实部, 那么随着时间的推移, 估计器状态将逼近原系统状态, 估计器输出将逼近原系统输出, 即

$$\lim_{t\to\infty}[\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t)] = \boldsymbol{0}, \quad \lim_{t\to\infty}[\hat{y}(t) - y(t)] = 0.$$

相反, 如果系统不稳定, 状态估计偏差和输出估计偏差就越来越大. 为什么?

评价状态逼近快慢的性能指标可使用 **误差平方积分准则函数**

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^\infty \|\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t)\|^2 \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty [\hat{\boldsymbol{x}}(0) - \boldsymbol{x}(0)]^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A} t} [\hat{\boldsymbol{x}}(0) - \boldsymbol{x}(0)] \mathrm{d}t \\
&= [\hat{\boldsymbol{x}}(0) - \boldsymbol{x}(0)]^{\mathrm{T}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A} t} \mathrm{d}t [\hat{\boldsymbol{x}}(0) - \boldsymbol{x}(0)],
\end{aligned}
$$

或使用 **误差平方时间积分准则函数**

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^\infty t \|\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t)\|^2 \mathrm{d}t \\
&= [\hat{\boldsymbol{x}}(0) - \boldsymbol{x}(0)]^{\mathrm{T}} \int_0^\infty t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A} t} \mathrm{d}t [\hat{\boldsymbol{x}}(0) - \boldsymbol{x}(0)].
\end{aligned}
$$

准则函数只有对稳定系统才有意义.

### 6.3.2　闭环状态观测器

**1．状态观测器** (State Observer)

设 $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^n$ 为输出误差反馈增益向量, 即 **观测器增益向量**. 引入输出误差 $e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ 来校正状态估计, 便得到 **闭环观测器** (简称 **观测器**), 如图 6.3.2 所示, 其表达式为

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) &= \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{b}u(t) + \boldsymbol{L}e(t) \\
&= \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{b}u(t) + \boldsymbol{L}[y(t) - \hat{y}(t)], \quad \hat{\boldsymbol{x}}(t_0) = \hat{\boldsymbol{x}}_0, \qquad (6.3.5)
\end{aligned}
$$

$$
\hat{y}(t) = \boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + du(t). \qquad (6.3.6)
$$

有的资料把这个观测器称为 **龙伯格观测器** (Luenberger Observer).

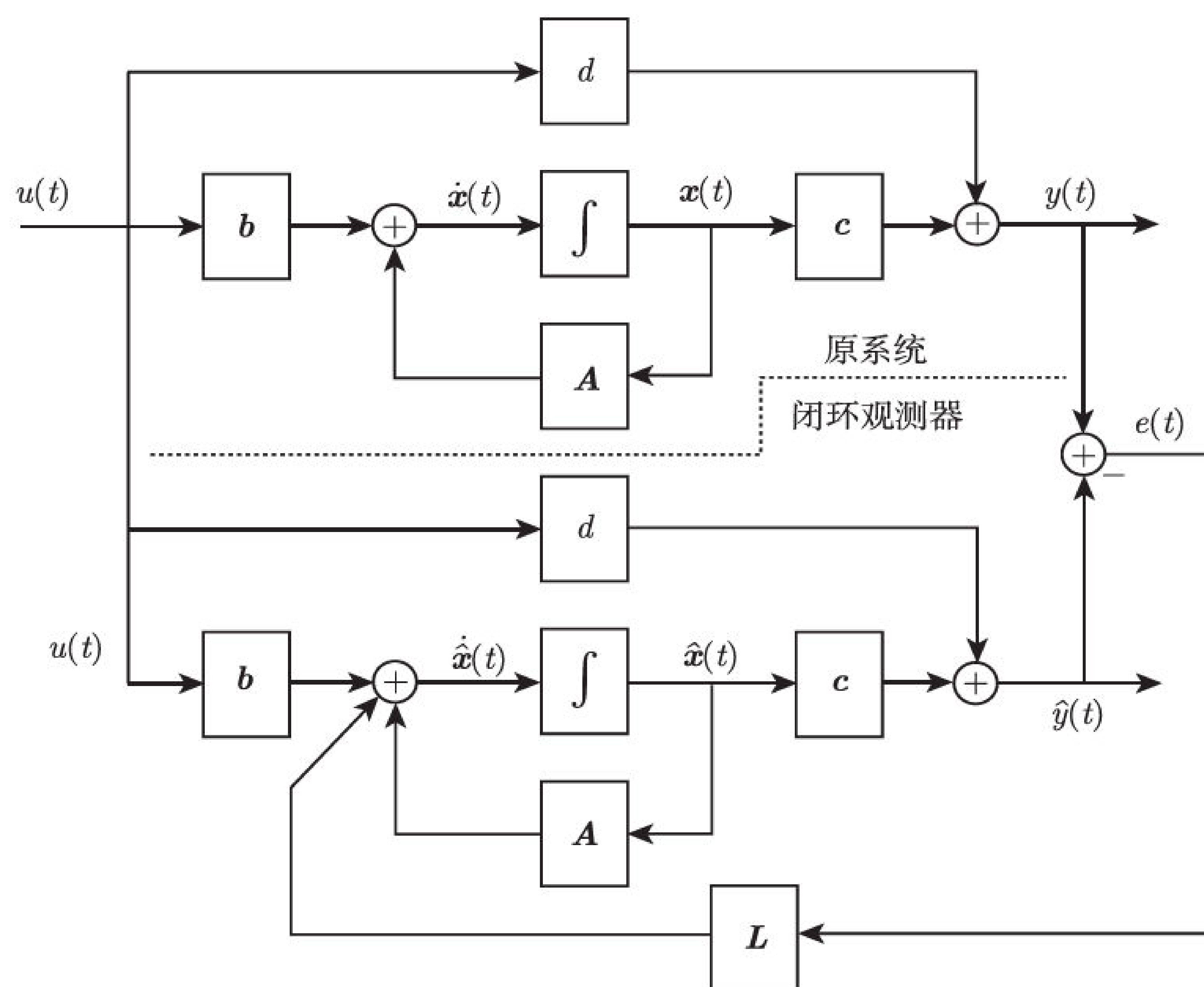



图 6.3.2　闭环状态观测器框图

这里考虑 $d = 0$ 的情形, 利用式 (6.3.6) 和式 (6.3.1) 第 2 式, 从式 (6.3.5) 可得

$$
\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{b}u(t) + \boldsymbol{L}[\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{x}}(t)]
$$

$$= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Lc})\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{b}u(t) + \boldsymbol{Lcx}(t) \tag{6.3.7}$$

$$= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Lc})\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{b}u(t) + \boldsymbol{L}y(t), \quad \hat{\boldsymbol{x}}(t_0) = \hat{\boldsymbol{x}}_0. \tag{6.3.8}$$

观测器把系统输出 $y(t)$ 也作为输入. 式 (6.3.7) 两边减去式 (6.3.1) 第 1 式两边可得

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) - \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Lc})\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{b}u(t) + \boldsymbol{Lcx}(t) - [\boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{b}u(t)] \\ &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Lc})[\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t)], \quad \hat{\boldsymbol{x}}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0) = \hat{\boldsymbol{x}}_0 - \boldsymbol{x}_0.\end{aligned} \tag{6.3.9}$$

其解为

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Lc})(t-t_0)}[\hat{\boldsymbol{x}}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)].$$

由此可知, 即使 $\boldsymbol{A}$ 不稳定, 如果系统可观测, 那么也可以通过选择增益向量 $\boldsymbol{L}$ 使得 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Lc})$ 的特征值具有负实部, 估计的状态也趋近于原系统状态 (即使初值不同 $\hat{\boldsymbol{x}}(t_0) \neq \boldsymbol{x}(t_0)$), 这就是闭环观测器的优点.

观测器 (6.3.8) 的特征多项式为

$$f(s) := \det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Lc})].$$

至此, 我们还不能看出, 对于给定的 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{c}$, 以及给定的观测器极点, 是否可以通过选择观测器增益向量 $\boldsymbol{L}$ 使 $f(s) = 0$ 的根为观测器极点. 下面通过观测器规范型加以说明: **观测器可以任意配置极点的充要条件是系统完全可观测**. 也就是说, **当且仅当系统满足能观测性条件时, 其状态观测器可以任意配置极点**.

**注 6.3.1 开放问题**

对于给定的 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{c}$ (以及 $[\hat{\boldsymbol{x}}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)]$), 如何求解一个最佳的增益向量 $\boldsymbol{L}$, 使得下列状态估计误差准则函数最小,

$$J = \int_0^\infty \|\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t)\|^2 \mathrm{d}t,$$

或

$$J = \int_0^\infty t\|\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t)\|^2 \mathrm{d}t.$$

**2. 观测器的传递函数** (the Transfer Functions of the Observer)

状态观测器 (6.3.8) 有两个输入, 一个是系统输入 $u(t)$, 一个是系统输出 $y(t)$, 故状态观测器的传递关系 (传递函数) 是一个二维行向量. 在零初始条件下, 对式 (6.3.8) 进行 Laplace 变换可得

$$s\hat{\boldsymbol{X}}(s) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Lc})\hat{\boldsymbol{X}}(s) + \boldsymbol{b}U(s) + \boldsymbol{L}Y(s), \quad \hat{Y}(s) = \boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{X}}(s).$$

或

$$\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{X}}(s) = [s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Lc})]^{-1}\boldsymbol{b}U(s) + [s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Lc})]^{-1}\boldsymbol{L}Y(s), \\ &\hat{Y}(s) = \boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{X}}(s).\end{aligned}$$

解得

$$\hat{Y}(s) = \boldsymbol{c}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Lc})]^{-1}\boldsymbol{b}U(s) + \boldsymbol{c}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Lc})]^{-1}\boldsymbol{L}Y(s)$$

$$=: G_1(s)U(s) + G_2(s)Y(s).$$

故从系统输入 $u(t)$ 到观测器输出 $\hat{y}(t)$ 的传递函数为

$$\begin{aligned} G_1(s) &:= \boldsymbol{c}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})]^{-1}\boldsymbol{b} \\ &= \frac{\boldsymbol{c}\,\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})]\boldsymbol{b}}{|s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})|}; \end{aligned} \tag{6.3.10}$$

从系统输出 $y(t)$ 到观测器输出 $\hat{y}(t)$ 的传递函数为

$$\begin{aligned} G_2(s) &:= \boldsymbol{c}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})]^{-1}\boldsymbol{L} \\ &= \frac{\boldsymbol{c}\,\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})]\boldsymbol{L}}{|s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})|}. \end{aligned} \tag{6.3.11}$$

从 $u(t)$ 到 $\hat{y}(t)$ 的传递函数为 $G_1(s)$, 从 $y(t)$ 到 $\hat{y}(t)$ 的传递函数为 $G_2(s)$, 这两个传递函数有相同的极点, 分享相同的动态, 闭环观测器的传递矩阵为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}(s) &:= [G_1(s),\ G_2(s)] \\ &= \left[\frac{\boldsymbol{c}\,\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})]\boldsymbol{b}}{|s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})|},\ \frac{\boldsymbol{c}\,\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})]\boldsymbol{L}}{|s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})|}\right] \\ &= \frac{1}{f(s)}[\boldsymbol{c}\,\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})]\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\,\mathrm{adj}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})]\boldsymbol{L}] \in \mathbb{R}^{1\times 2}, \\ f(s) &:= \det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})]. \end{aligned}$$

**3. 观测器的设计步骤**

(1) 判断系统的能观测性. 对于给定的系统 (6.3.1), $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 已知, 计算能观测性矩阵

$$\boldsymbol{Q}_o := \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

如果 $\boldsymbol{Q}_o$ 满秩, 即 $\mathrm{rank}[\boldsymbol{Q}_o] = n$, 说明系统能观测, 那么观测器可以任意配置极点.

(2) 计算观测器的特征多项式. 因为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 已知, 故观测器特征多项式

$$f(s) := \det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})]$$

是 $s$ 的 $n$ 次首一多项式, 而且是 $\boldsymbol{L} := [l_1, l_2, l_3, \cdots, l_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ 的函数.

(3) 确定期望的观测器特征多项式. 对于给定的观测器极点 $s_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 构造期望的观测器特征多项式:

$$\begin{aligned} f'(s) &= (s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n) \\ &= s^n - (s_1 + s_2 + \cdots + s_n)s^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_1 s_2 \cdots s_n \\ &=: s^n + a_1' s^{n-1} + a_2' s^{n-2} + \cdots + a_n'. \end{aligned}$$

(4) 比较系数计算观测器增益向量 $\boldsymbol{L}$. 令观测器特征多项式 $f(s)$ 等于期望的观测器特征多项式 $f'(s)$, 即

$$\det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})] = s^n + a_1' s^{n-1} + a_2' s^{n-2} + \cdots + a_n'.$$

比较两边 $s$ 同次幂的系数, 得到关于 $l_i$ 的线性方程组, 求解出 $l_i$, 就得到观测器的增益向量 $\boldsymbol{L}=[l_1, l_2, \cdots, l_n]^{\mathrm{T}}$.

(5) 根据计算出的 $\boldsymbol{L}$, 由式 (6.3.8) 和式 (6.3.6) 获得观测器方程, 根据式 (6.3.10) 和式 (6.3.11) 获得观测器的传递函数.

**例 6.3.1** 写出下列系统的状态空间模型, 设计状态观测器, 期望极点为 $s=-3$ 和 $s=-4$,

$$G(s)=\frac{1}{s^2-s-2}.$$

**解** 这个对象的观测器规范型为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}&=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u,\\ y&=[1,\ 0]\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

计算

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\end{pmatrix}[1,\ 0]=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}l_1 & 0\\ l_2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-l_1 & 1\\ 2-l_2 & 0\end{pmatrix}.$$

其特征多项式为

$$|s\boldsymbol{I}_2-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})|=\begin{vmatrix}s-1+l_1 & -1\\ -2+l_2 & s\end{vmatrix}=s^2+(-1+l_1)s+(-2+l_2).$$

期望的系统特征多项式为

$$(s+3)(s+4)=s^2+7s+12.$$

令它们相等得到

$$s^2+(-1+l_1)s+(-2+l_2)=s^2+7s+12.$$

比较系数, 得到 $-1+l_1=7$, $-2+l_2=12$, 求得 $l_1=8$, $l_2=14$. 因此观测器的增益向量为 $\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ 14\end{pmatrix}$. 因此, 观测器方程为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)&=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}u(t)+\boldsymbol{L}y(t)\\ &=\begin{pmatrix}-7 & 1\\ -12 & 0\end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u(t)+\begin{pmatrix}8\\ 14\end{pmatrix}y(t),\\ \hat{y}(t)&=\boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{x}}(t)=[1,\ 0]\hat{\boldsymbol{x}}(t).\end{aligned}$$

### 6.3.3 观测器规范型的观测器设计

设传递函数

$$G(s)=\frac{b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n}.$$

对应的 **观测器规范型** 实现为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}-a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots\\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}u,\\ y=[1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0]\boldsymbol{x},\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}u(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\\ y(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t),\end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots\\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n},$$

$$\boldsymbol{c}=[1,0,0,\cdots,0]\in\mathbb{R}^{1\times n}.$$

由式 (6.3.8) 知观测器方程为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}u(t)+\boldsymbol{L}y(t), \quad \hat{y}(t)=\boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{x}}(t). \tag{6.3.12}$$

设 **观测器增益向量** 为

$$\boldsymbol{L}=[l_1,l_2,l_3,\cdots,l_n]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n}.$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c}&=\begin{pmatrix}-a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots\\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\\ l_3\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}[1,0,0,\cdots,0]\\ &=\begin{pmatrix}-a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots\\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}l_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ l_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ l_3 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ l_n & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-(a_1+l_1) & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -(a_2+l_2) & 0 & 1 & \cdots & 0\\ -(a_3+l_3) & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -(a_n+l_n) & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 为友矩阵, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c}$ 也为友矩阵, 所以我们可以直接写出观测器的特征多项式

$$f(s)=\det[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})]=s^n+(a_1+l_1)s^{n-1}+(a_2+l_2)s^{n-2}+\cdots+(a_n+l_n).$$

设期望的观测器极点为 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ (可能包含重极点), 对应的期望观测器特征多项式为

$$\begin{aligned} f'(s) &= (s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n) \\ &= s^n - (s_1+s_2+\cdots+s_n)s^{n-1}+\cdots+(-1)^n s_1 s_2\cdots s_n \\ &=: s^n + a_1' s^{n-1} + a_2' s^{n-2} + \cdots + a_n'. \end{aligned}$$

令观测器特征多项式 $f(s)$ 等于上式期望的观测器特征多项式 $f'(s)$, 即

$$s^n + (a_1+l_1)s^{n-1} + (a_2+l_2)s^{n-2} + \cdots + (a_n+l_n) = s^n + a_1' s^{n-1} + a_2' s^{n-2} + \cdots + a_n'.$$

比较两边 $s$ 同次幂的系数, 可以求得 $l_i = a_i' - a_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 或

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1'-a_1 \\ a_2'-a_2 \\ \vdots \\ a_n'-a_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a}, \tag{6.3.13}$$

其中

$$\boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

因为 $\boldsymbol{L}$ 有唯一解, 故观测器规范型可以任意配置极点, 且观测器规范型的状态观测器增益向量特别容易计算. 非观测器规范型的观测器设计 (极点配置) 算法的计算要复杂一点, 所以在许可的情况下, 可采用传递函数的观测器规范型实现进行状态观测器设计.

**状态观测器是一个两输入系统**. 状态观测器 (6.3.12) 有两个输入, 一个是系统输入 $u(t)$, 一个是系统输出 $y(t)$, 故状态观测器的传递关系是一个二维行向量. 对式 (6.3.12) 进行 Laplace 变换可得

$$s\hat{\boldsymbol{X}}(s) = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})\hat{\boldsymbol{X}}(s) + \boldsymbol{b}U(s) + \boldsymbol{L}Y(s), \quad \hat{Y}(s) = \boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{X}}(s).$$

或

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{X}}(s) &= [s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})]^{-1}\boldsymbol{b}U(s) + [s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})]^{-1}\boldsymbol{L}Y(s), \\ \hat{Y}(s) &= \boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{X}}(s). \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} \hat{Y}(s) &= \{\boldsymbol{c}[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})]^{-1}\boldsymbol{b}\}U(s) + \boldsymbol{c}[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})]^{-1}\boldsymbol{L}Y(s) \\ &=: G_1(s)U(s) + G_2(s)Y(s), \end{aligned}$$

故从输入 $u(t)$ 到观测器输出 $\hat{y}(t)$ 的传递函数为

$$\begin{aligned} G_1(s) &:= \boldsymbol{c}[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})]^{-1}\boldsymbol{b} \\ &= \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + (a_1+l_1)s^{n-1} + (a_2+l_2)s^{n-2} + \cdots + (a_n+l_n)}. \end{aligned} \tag{6.3.14}$$

从输出 $y(t)$ 到 $\hat{y}(t)$ 的传递函数为

$$G_2(s) := \boldsymbol{c}[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})]^{-1}\boldsymbol{L}$$

$$= \frac{l_1 s^{n-1} + l_2 s^{n-2} + \cdots + l_n}{s^n + (a_1 + l_1)s^{n-1} + (a_2 + l_2)s^{n-2} + \cdots + (a_n + l_n)}. \tag{6.3.15}$$

从这个观测器规范型模型的状态观测器设计 (观测器极点配置) 例子, 我们可以得到结论.

(1) 一个系统状态观测器可以任意配置极点的充要条件是系统状态 (完全) 能观测, 因为任何能观测系统都可以通过非奇异线性变换化为观测器规范型.

(2) 从式 (6.3.14) 可知, 观测器不改变系统零点 ($d = 0$ 时), 因为从输入 $u(t)$ 到观测器输出 $\hat{y}(t)$ 的传递函数分子多项式 (零点) 等于系统开环传递函数的分子多项式 (零点). 如果系统可观测, 那么观测器极点可以通过选择观测器增益向量 $\boldsymbol{L}$ 任意配置.

(3) 从式 (6.3.15) 可知, 从输出 $y(t)$ 到观测器输出 $\hat{y}(t)$ 的传递函数分子多项式系数是观测器增益向量 $\boldsymbol{L}$ 的元, 且从输入 $u(t)$ 到观测器输出 $\hat{y}(t)$ 的传递函数与从输出 $y(t)$ 到观测器输出 $\hat{y}(t)$ 传递函数有相同的分母多项式, 即二者分享相同的动态特性.

(4) 状态观测器不改变系统的能控性和能观测性, 因为观测器不改变系统的传递函数, 即输入 $u(t)$ 到系统输出 $y(t)$ 的传递函数 $G(s)$ 是不变的, 参见图 6.3.2.

(5) 如果被控系统是能观测的, 则总可以找到一个观测器增益向量 $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^n$ [对输出为向量 $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ 的多输出系统, 为增益矩阵 $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{n\times m}$], 使得闭环观测器的极点配置到任意给定的期望位置.

(6) 对单输出系统, 情况要简单得多, 并且观测器增益向量是唯一的. 当输出为向量时, 即对于多输出系统, 满足同一极点位置要求的观测器极点配置方法很多, 观测器增益矩阵也不唯一. 对于多输出系统, 满足同一给定的观测器极点, 观测器可以选择的自由参数也多于 $n$ 个, 也就是说, 除了适当地配置 $n$ 个闭环观测器极点外, 还可以通过选择其他自由参数来改善闭环观测器的性能 (如跟踪的快慢), 可是还没有具体理论指导如何选择这些自由参数来改善观测器的性能, 这也是一个 **开放问题** (Open Problem).

**例 6.3.2** 设被控对象的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2},$$

写出系统的状态空间模型, 设计状态观测器, 将观测器极点配置在 $s = -3$ 和 $s = -4$.

**解** 这个对象的观测器规范型为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad y = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = [1,\ 0].$$

对于这个系统, 有

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

期望的系统特征多项式为

$$s^2 + a_1' s + a_2' = (s+3)(s+4) = s^2 + 7s + 12,$$

所以

$$\boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

根据式 (6.3.13), 观测器的增益向量为

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{a}'-\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}7\\12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\14\end{pmatrix}.$$

因此, 观测器方程为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)&=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}u(t)+\boldsymbol{L}y(t)\\&=\begin{pmatrix}-7&1\\-12&0\end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u(t)+\begin{pmatrix}8\\14\end{pmatrix}y(t),\\\hat{y}(t)&=\boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{x}}(t)=[1,\ 0]\hat{\boldsymbol{x}}(t).\end{aligned}$$

**例 6.3.3** 设被控对象为三阶系统, 其传递函数为

$$G(s)=\frac{b_1s^2+b_2s+b_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}=\frac{s^2+s+1}{s^3+s^2+s+1},$$

写出系统的状态空间模型, 设计状态观测器, 使观测器的特征多项式为

$$s^3+a_1's^2+a_2's+a_3'=s^3+2s^2+3s+4.$$

**解** 该系统对应的观测器规范型为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}-a_1&1&0\\-a_2&0&1\\-a_3&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}u(t),\\y(t)=[1,\ 0,\ 0]\boldsymbol{x}(t).\end{cases}$$

对于这个系统, 有

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}'=\begin{pmatrix}a_1'\\a_2'\\a_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

根据式 (6.3.13) 计算观测器增益向量:

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\l_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{a}'-\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

因此, 观测器方程为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)&=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}u(t)+\boldsymbol{L}y(t)\\&=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-3&0&1\\-4&0&0\end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}u(t)+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}y(t),\\\hat{y}(t)&=\boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{x}}(t)=[1,\ 0,\ 0]\hat{\boldsymbol{x}}(t).\end{aligned}$$

### 6.3.4 能观测性规范型观测器设计方法

上面讨论了观测器规范型的状态观测器设计方法, 以及观测器增益向量的计算方法. 能观测性规范型也是一种重要可观测规范型, 这里讨论能观测性规范型的状态观测器设计方法. 基本思想: 通过二阶和三阶系统能观测性规范型的状态观测器设计例子, 延伸到高阶系统.

**1. 二阶系统**

**例 6.3.4** 设被控对象的传递函数为

$$G(s)=\frac{b_1s+b_2}{s^2+a_1s+a_2},$$

设计状态观测器, 使观测器特征多项式为 $s^2+a_1's+a_2'$.

**解** 参考 3.5.4 节的能观测性规范型, 写出系统的能观测性规范型实现,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -a_2 & -a_1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}u(t),$$

$$y(t)=[1,\ 0]\boldsymbol{x}(t),$$

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}.$$

令观测器增益向量为 $\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\end{pmatrix}$. 由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Lc}&=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -a_2 & -a_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\end{pmatrix}[1,\ 0]\\ &=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -a_2 & -a_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}l_1 & 0\\ l_2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-l_1 & 1\\ -a_2-l_2 & -a_1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

状态观测器的特征多项式为

$$\begin{aligned}\det[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Lc})]&=\begin{vmatrix}s+l_1 & -1\\ a_2+l_2 & s+a_1\end{vmatrix}\\ &=(s+l_1)(s+a_1)+a_2+l_2\\ &=s^2+(a_1+l_1)s+a_2+a_1l_1+l_2.\end{aligned}$$

令这个特征多项式等于期望的观测器特征多项式, 即

$$s^2+(a_1+l_1)s+a_2+a_1l_1+l_2=s^2+a_1's+a_2'.$$

比较两边 $s$ 同次幂的系数得到方程

$$\begin{cases}a_1+l_1=a_1',\\ a_2+a_1l_1+l_2=a_2'.\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}l_1=a_1'-a_1,\\ a_1l_1+l_2=a_2'-a_2.\end{cases}$$

于是可求得

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_1'-a_1\\ a_2'-a_2\end{pmatrix}.$$

因此, 观测器方程为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)&=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Lc})\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{\beta}u(t)+\boldsymbol{L}y(t)\\ &=\begin{pmatrix}-l_1 & 1\\ -a_2-l_2 & -a_1\end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}u(t)\\ &\quad+\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_1'-a_1\\ a_2'-a_2\end{pmatrix}y(t),\end{aligned}\tag{6.3.16}$$

$$\hat{y}(t)=\boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{x}}(t)=[1,\ 0]\hat{\boldsymbol{x}}(t).\tag{6.3.17}$$

**2. 三阶系统**

**例 6.3.5** 设被控对象为三阶系统, 其传递函数为

$$G(s)=\frac{b_1s^2+b_2s+b_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3},$$

设计状态观测器, 使观测器的特征多项式为 $s^3+a_1's^2+a_2's+a_3'$.

**解** 参考例 3.5.5, 可知 $G(s)$ 对应的能观测性规范型为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{\beta}u(t),\\ y(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t).\end{cases}$$

这里

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_3&-a_2&-a_1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1&0&0\\a_1&1&0\\a_2&a_1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=[1,\ 0,\ 0].$$

令 $\boldsymbol{L}=[l_1,l_2,l_3]^{\mathrm{T}}$. 计算

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c}&=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_3&-a_2&-a_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\l_3\end{pmatrix}[1,\ 0,\ 0]\\&=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_3&-a_2&-a_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}l_1&0&0\\l_2&0&0\\l_3&0&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-l_1&1&0\\-l_2&0&1\\-a_3-l_3&-a_2&-a_1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

状态观测器的特征多项式为

$$\begin{aligned}\det[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})]&=\begin{vmatrix}s+l_1&-1&0\\l_2&s&-1\\a_3+l_3&a_2&s+a_1\end{vmatrix}\\&=(s+l_1)\begin{vmatrix}s&-1\\a_2&s+a_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}l_2&-1\\a_3+l_3&s+a_1\end{vmatrix}\\&=(s+l_1)(s^2+a_1s+a_2)+l_2(s+a_1)+a_3+l_3\\&=s^3+(a_1+l_1)s^2+(a_2+a_1l_1+l_2)s+a_3+a_2l_1+a_1l_2+l_3.\end{aligned}$$

令这个特征多项式等于期望的特征多项式, 即

$$s^3+(a_1+l_1)s^2+(a_2+a_1l_1+l_2)s+a_3+a_2l_1+a_1l_2+l_3=s^3+a_1's^2+a_2's+a_3'.$$

比较两边 $s$ 同次幂的系数得到方程

$$\begin{cases}a_1+l_1=a_1',\\a_2+a_1l_1+l_2=a_2',\\a_3+a_2l_1+a_1l_2+l_3=a_3'.\end{cases}$$

把 $a_i$ 移到等号右边可得

$$\begin{cases}l_1=a_1'-a_1,\\a_1l_1+l_2=a_2'-a_2,\\a_2l_1+a_1l_2+l_3=a_3'-a_3.\end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' - a_1 \\ a_2' - a_2 \\ a_3' - a_3 \end{pmatrix}.$$

所以观测器增益向量为

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1' - a_1 \\ a_2' - a_2 \\ a_3' - a_3 \end{pmatrix}.$$

观测器方程为

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\beta}u(t) + \boldsymbol{L}y(t) \\
&= \begin{pmatrix} -l_1 & 1 & 0 \\ -l_2 & 0 & 1 \\ -a_3 - l_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} u(t) \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1' - a_1 \\ a_2' - a_2 \\ a_3' - a_3 \end{pmatrix} y(t),
\end{aligned} \tag{6.3.18}$$

$$\hat{y}(t) = [1,\ 0,\ 0]\hat{\boldsymbol{x}}(t). \tag{6.3.19}$$

**3. $n$ 阶系统**

设系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n}.$$

设计状态观测器, 使观测器的特征多项式为 $s^n + a_1' s^{n-1} + a_2' s^{n-2} + \cdots + a_n'$.

参考 3.5.4 节的能观测性规范型, 该系统的能观测性规范型实现为

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t) \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & 1 & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} u(t), \\
y(t) &= [1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0]\boldsymbol{x}(t).
\end{aligned}$$

观察式 (6.3.16)、式 (6.3.17) 的二阶系统能观测性规范型和式 (6.3.18)、式 (6.3.19) 的三阶系统能观测性规范型的观测器方程, 可推断出一般 $n$ 阶系统能观测性规范型的观测器方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\beta}u(t) + \boldsymbol{L}y(t)$$

$$= \begin{pmatrix} -l_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_2 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ -l_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n - l_{n-1} & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & 1 & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} u(t)$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & 1 & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1' - a_1 \\ a_2' - a_2 \\ a_3' - a_3 \\ \vdots \\ a_n' - a_n \end{pmatrix} y(t), \tag{6.3.20}$$

$$\hat{y}(t) = [1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0]\hat{\boldsymbol{x}}(t), \tag{6.3.21}$$

其中

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & 1 & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1' - a_1 \\ a_2' - a_2 \\ a_3' - a_3 \\ \vdots \\ a_n' - a_n \end{pmatrix}.$$

### 6.3.5　一般可观测状态空间模型观测器设计方法

因为观测器规范型的状态观测器的设计方法 (极点配置方法) 特别简单, 所以这里先把状态空间模型变换为观测器规范型, 设计出观测器规范型的状态观测器, 求出观测器增益向量 $\boldsymbol{L}_o$, 然后通过反变换求得原系统状态观测器的增益向量 $\boldsymbol{L}$.

考虑单输入单输出系统:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t), \end{cases} \tag{6.3.22}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}$ 和 $y(t) \in \mathbb{R}$ 分别为系统输入和输出, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{1\times n}$.

设计状态观测器, 计算观测器的增益向量, 使得观测器的特征多项式为

$$f(s) = \det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})] = s^n + a_1' s^{n-1} + a_2' s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}' s + a_n',$$

具体作法: **把系统 (6.3.22) 变换为观测器规范型, 求出观测器规范型的状态观测器的增益向量 $\boldsymbol{L}_o$, 然后通过反变换求得原系统状态观测器的增益向量 $\boldsymbol{L}$.**

对式 (6.3.22) 进行线性变换 (Linear Transformation) $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{T}_o\boldsymbol{x}_o(t)$, $\boldsymbol{T}_o$ 为**非奇异矩阵** (Non-Singular Matrix). 参考 3.5.3 节的化状态空间模型为观测器规范型方法, 如果变换矩阵

选择为

$$\boldsymbol{T}_o=[\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{l},\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{l},\cdots,\boldsymbol{l}]\in\mathbb{R}^{n\times n},\quad \boldsymbol{l}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{cA}\\ \vdots\\ \boldsymbol{cA}^{n-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n,$$

那么就得到下列观测器规范型 (Observer Canonical Form),

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_o(t)=\boldsymbol{A}_o\boldsymbol{x}_o(t)+\boldsymbol{b}_o u(t),\\ \quad y(t)=\boldsymbol{c}_o\boldsymbol{x}_o(t),\end{cases}\tag{6.3.23}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_o=\boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_o=\begin{pmatrix}-a_1&1&0&\cdots&0&0\\ -a_2&0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&0&\vdots\\ -a_{n-1}&0&0&\cdots&0&1\\ -a_n&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n},\quad \boldsymbol{b}_o=\boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n,$$

$$\boldsymbol{c}_o=\boldsymbol{c}\boldsymbol{T}_o=[1,0,0,\cdots,0]\in\mathbb{R}^{1\times n},$$

$a_i$ 是系统 (6.3.22) 的特征多项式的系数,

$$p(s)=\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=:s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n.$$

系统 (6.3.23) 是观测器规范型, 参考 6.3.3 节观测器规范型的观测器增益向量计算公式 (6.3.13), 有

$$\boldsymbol{L}_o=\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1'-a_1\\ a_2'-a_2\\ \vdots\\ a_n'-a_n\end{pmatrix}.\tag{6.3.24}$$

系统 (6.3.23) 的观测器为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_o(t)=(\boldsymbol{A}_o-\boldsymbol{L}_o\boldsymbol{c}_o)\hat{\boldsymbol{x}}_o(t)+\boldsymbol{b}_o u(t)+\boldsymbol{L}_o y(t),$$

$$\hat{y}(t)=\boldsymbol{c}_o\hat{\boldsymbol{x}}_o(t).$$

由于 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{T}_o\boldsymbol{x}_o(t)$, 所以令 $\hat{\boldsymbol{x}}(t):=\boldsymbol{T}_o\hat{\boldsymbol{x}}_o(t)$, $\boldsymbol{L}:=\boldsymbol{T}_o\boldsymbol{L}_o$, 利用上两式, 我们可得原系统 (6.3.22) 的状态观测器方程为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)&=\boldsymbol{T}_o(\boldsymbol{A}_o-\boldsymbol{L}_o\boldsymbol{c}_o)\boldsymbol{T}_o^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{T}_o\boldsymbol{b}_o u(t)+\boldsymbol{T}_o\boldsymbol{L}_o y(t)\\ &=(\boldsymbol{T}_o\boldsymbol{A}_o\boldsymbol{T}_o^{-1}-\boldsymbol{T}_o\boldsymbol{L}_o\boldsymbol{c}_o\boldsymbol{T}_o^{-1})\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}u(t)+\boldsymbol{T}_o\boldsymbol{L}_o y(t)\\ &=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{T}_o\boldsymbol{L}_o\boldsymbol{c})\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}u(t)+\boldsymbol{T}_o\boldsymbol{L}_o y(t)\\ &=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}u(t)+\boldsymbol{L}y(t),\end{aligned}\tag{6.3.25}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}(t)&=\boldsymbol{c}_o\boldsymbol{T}_o^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}(t)\\ &=\boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{x}}(t).\end{aligned}\tag{6.3.26}$$

于是状态观测器的增益向量为

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{T}_o\boldsymbol{L}_o=[\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{l},\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{l},\cdots,\boldsymbol{l}]\begin{pmatrix}a_1'-a_1\\a_2'-a_2\\\vdots\\a_n'-a_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n,$$

$$\boldsymbol{l}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{cA}\\\vdots\\\boldsymbol{cA}^{n-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n.$$

对于读者, 掌握基本的观测器设计方法和步骤是必要的. 而这些基于规范型的观测器设计方法的公式难以记忆, 是为工程应用编制程序准备的. 前述的基于规范型的状态反馈设计也是如此.

## 6.4 基于观测器的状态反馈控制器设计方法

如果系统状态可以测量, 就可采用状态反馈配置系统极点. 一个自然的问题是, 如果系统状态不可测, 而采用观测器的状态进行反馈, 那么是否可以得到期望的系统性能. 答案是肯定的, 观测器和状态反馈可以独立进行设计和极点配置, 这就是分离性原理.

### 6.4.1 基于观测器状态反馈的复合系统

因为分离性原理对多变量系统 (多输入多输出系统) 也成立, 所以这里考虑线性时不变 MIMO 系统:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), & \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t),\end{cases}\tag{6.4.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ 为系统状态向量, $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbb{R}^r$ 和 $\boldsymbol{y}(t)\in\mathbb{R}^m$ 分别为系统输入和输出向量, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{D}\in\mathbb{R}^{m\times r}$.

系统 (6.4.1) 的观测器方程为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)&=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{L}[\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t)]\\&=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{L}[\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)]\\&=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t),\quad \hat{\boldsymbol{x}}(t_0)=\hat{\boldsymbol{x}}_0,\end{aligned}\tag{6.4.2}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}(t)=\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t).\tag{6.4.3}$$

如果系统状态变量可以获得, 就可采用状态反馈 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$ 配置极点, 得到闭环系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{r}(t),\quad \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t).\tag{6.4.4}$$

故从输入 $\boldsymbol{r}(t)$ 到输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 的传递矩阵为

$$\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{C}[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})]^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}.$$

相反, 这里考虑系统状态不可测情形, 采用观测器的状态进行反馈, 即 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$, 则得到状态反馈子系统:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}[\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t)]\\&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{r}(t) \qquad (6.4.5)\\&=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}[\hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)]+\boldsymbol{B}\boldsymbol{r}(t), \qquad (6.4.6)\\ \boldsymbol{y}(t)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t). \qquad (6.4.7)\end{aligned}$$

将 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ 代入式 (6.4.2) 得到

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)&=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{B}[\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t)]+\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\\&=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{r}(t)+\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t). \qquad (6.4.8)\end{aligned}$$

式 (6.4.5)、式 (6.4.8)、式 (6.4.7) 和式 (6.4.3) 构成了复合动态系统:

$$\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{L}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \hat{\boldsymbol{x}}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{r}(t), \qquad (6.4.9)$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}(t)\\ \hat{\boldsymbol{y}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \hat{\boldsymbol{x}}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t). \qquad (6.4.10)$$

其传递矩阵为

$$\boldsymbol{G}_b(s)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\\ -\boldsymbol{L}\boldsymbol{C} & s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{D}\end{pmatrix}.$$

这个传递矩阵涉及分块矩阵的逆问题, 计算比较复杂. 下面通过非奇异线性变换, 设置不同的状态变量, 来求闭环传递函数 $\boldsymbol{G}_b(s)$, 因为线性变换不改变系统的传递矩阵. 这个简单的线性变换为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \hat{\boldsymbol{x}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)\end{pmatrix}.$$

应用到式 (6.4.9)、式 (6.4.10) 得到

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)-\dot{\boldsymbol{x}}(t)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{L}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)\end{pmatrix}\\&\quad+\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{r}(t)\\&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)\end{pmatrix}\\&\quad+\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{r}(t)\\&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{r}(t), \qquad (6.4.11)\\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{y}(t)\\ \hat{\boldsymbol{y}}(t)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t)\\&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t). \qquad (6.4.12)\end{aligned}$$

因此, 复合系统 (6.4.11) 的特征多项式为

$$p(s)=\det\begin{pmatrix}s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}) & \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{0} & s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\end{pmatrix}$$

$$= \det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})]\det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})]. \tag{6.4.13}$$

上式右边乘积的第 1 项是状态反馈子系统的特征多项式, 与直接进行真实状态反馈闭环系统 (6.4.4) 的特征多项式相等, 第 2 项为全维观测器特征多项式. 这说明复合系统的特征值是由状态反馈子系统和全维观测器的特征值组合而成, 且两部分特征值相互独立, 所以状态反馈阵 $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{r\times n}$ 和观测器输出反馈阵 $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 可独立进行设计. 这就是下面的分离性原理.

### 6.4.2 基于观测器状态反馈的分离性原理

若被控系统既能控又能观测, 即 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 能控, $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A})$ 能观测, 用闭环状态观测器的状态代替系统真实状态进行状态反馈时, 构成的观测器—控制器复合系统的极点配置和观测器设计 (观测器极点配置) 可分别独立进行, 即状态反馈阵 $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{r\times n}$ 和输出反馈阵 $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 可根据极点位置要求由 $\det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})]$ 和 $\det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})]$ 分别进行计算.

分离性原理说明基于观测器的状态反馈的复合系统可以独立配置状态反馈子系统极点和观测器极点.

复合系统 (6.4.11)~(6.4.12) 的传递矩阵为

$$\boldsymbol{G}_b(s) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}) & \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{0} & s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{D} \end{pmatrix}.$$

应用分块三角阵求逆公式 (读者应证明这个公式)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{-1} & -\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_b(s) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})]^{-1} & -[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})]^{-1} \\ \boldsymbol{0} & [s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})]^{-1} \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})]^{-1}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})]^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{C}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})]^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

或

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}(s) \\ \hat{\boldsymbol{Y}}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})]^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{C}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})]^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \boldsymbol{R}(s).$$

上式第 1 行是从输入 $\boldsymbol{r}(t)$ 到输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 的传递矩阵

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})]^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D},$$

它等于直接采用真实状态反馈闭环系统 (6.4.4) 的传递矩阵; 第 2 行是从输入 $\boldsymbol{r}(t)$ 到观测器输出 $\hat{\boldsymbol{y}}(t)$ 的传递矩阵, 也等于直接采用真实状态反馈闭环系统 (6.4.4) 的传递矩阵.

**注 6.4.1**　式 (6.4.11)、式 (6.4.12) 的推导比较复杂, 下面给出一个简单方法. 将式 (6.4.8) 减去式 (6.4.5) 可得

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)-\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}-\boldsymbol{LC})\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{Br}(t)+\boldsymbol{LCx}(t)-[\boldsymbol{Ax}(t)-\boldsymbol{BK}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{Br}(t)]\\&=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC})[\hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)].\end{aligned}\tag{6.4.14}$$

又

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}(t)\\\hat{\boldsymbol{y}}(t)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\\hat{\boldsymbol{x}}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}\\\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t)\\&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\\hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}\\\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t).\end{aligned}\tag{6.4.15}$$

因此联立式 (6.4.6)、式 (6.4.14)、式 (6.4.15) 也可得到复合系统.

此外, 由式 (6.4.14) 可知, 状态估计误差 $[\hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)]$ 与系统输入无关, 是不可控的, 其解不受系统输入大小的影响.

### 6.4.3　基于观测器的状态反馈控制器设计步骤

因为多变量系统极点配置方法的状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}\in\mathbb{R}^{r\times n}$ 和观测器增益矩阵 $\boldsymbol{L}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ 不唯一, 有很多不同方法选择增益矩阵进行极点配置, 无法一一讨论, 这里只给出线性时不变单输入单输出系统的设计方法和步骤.

考虑线性时不变单输入单输出系统 (SISO 系统):

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{Ax}(t)+\boldsymbol{b}u(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\\y(t)=\boldsymbol{cx}(t),\end{cases}\tag{6.4.16}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ 为系统状态向量, $u(t)\in\mathbb{R}$ 和 $y(t)\in\mathbb{R}$ 分别为系统输入和输出, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^{1\times n}$.

假设系统 (6.4.16) 可控可观测, 基于闭环观测器的状态反馈系统如图 6.4.1 所示, 其观测器方程为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)&=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}u(t)+\boldsymbol{L}[y(t)-\hat{y}(t)]\\&=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}u(t)+\boldsymbol{L}[y(t)-\boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{x}}(t)]\\&=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Lc})\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}u(t)+\boldsymbol{L}y(t),\quad \hat{\boldsymbol{x}}(t_0)=\hat{\boldsymbol{x}}_0,\end{aligned}\tag{6.4.17}$$

$$\hat{y}(t)=\boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{x}}(t),\tag{6.4.18}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)\in\mathbb{R}^n$ 为状态估计向量, $\hat{y}(t)\in\mathbb{R}$ 是估计的系统输出 (观测器的输出), $\boldsymbol{L}\in\mathbb{R}^n$ 为观测器增益向量, $\hat{\boldsymbol{x}}_0\in\mathbb{R}^n$ 为观测器 (状态估计器) 的初值.

对于系统状态不可测情形, 采用观测器的状态进行反馈, 即 $u(t)=r(t)-\boldsymbol{k}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$, 则得到状态反馈子系统:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\boldsymbol{Ax}(t)+\boldsymbol{b}[r(t)-\boldsymbol{k}\hat{\boldsymbol{x}}(t)]\\&=\boldsymbol{Ax}(t)-\boldsymbol{bk}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}r(t)\end{aligned}\tag{6.4.19}$$

$$\quad=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bk})\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{bk}[\hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)]+\boldsymbol{b}r(t),\tag{6.4.20}$$

$$y(t)=\boldsymbol{cx}(t).\tag{6.4.21}$$

将 $u(t)=r(t)-\boldsymbol{k}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ 代入式 (6.4.17) 得到

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Lc})\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}[r(t)-\boldsymbol{k}\hat{\boldsymbol{x}}(t)]+\boldsymbol{Lcx}(t)$$

$$= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{bk} - \boldsymbol{Lc})\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{b}r(t) + \boldsymbol{Lcx}(t). \tag{6.4.22}$$

式 (6.4.19)、式 (6.4.21)、式 (6.4.22) 和式 (6.4.18) 构成了复合动态系统, 因为线性变换不改变系统的传递函数, 引入一个新的误差状态向量 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t) := \hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t)$, 将式 (6.4.22) 减去式 (6.4.19) 可得

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) &= \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) - \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\
&= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{bk} - \boldsymbol{Lc})\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{b}r(t) + \boldsymbol{Lcx}(t) - [\boldsymbol{Ax}(t) - \boldsymbol{bk}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{b}r(t)] \\
&= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Lc})[\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t)].
\end{aligned} \tag{6.4.23}$$

又

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y(t) \\ \hat{y}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \hat{\boldsymbol{x}}(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.4.24}$$

因此联立式 (6.4.20), 式 (6.4.23)～ 式 (6.4.24) 也可得到类似于式 (6.4.9)～ 式 (6.4.10) 的复合系统.

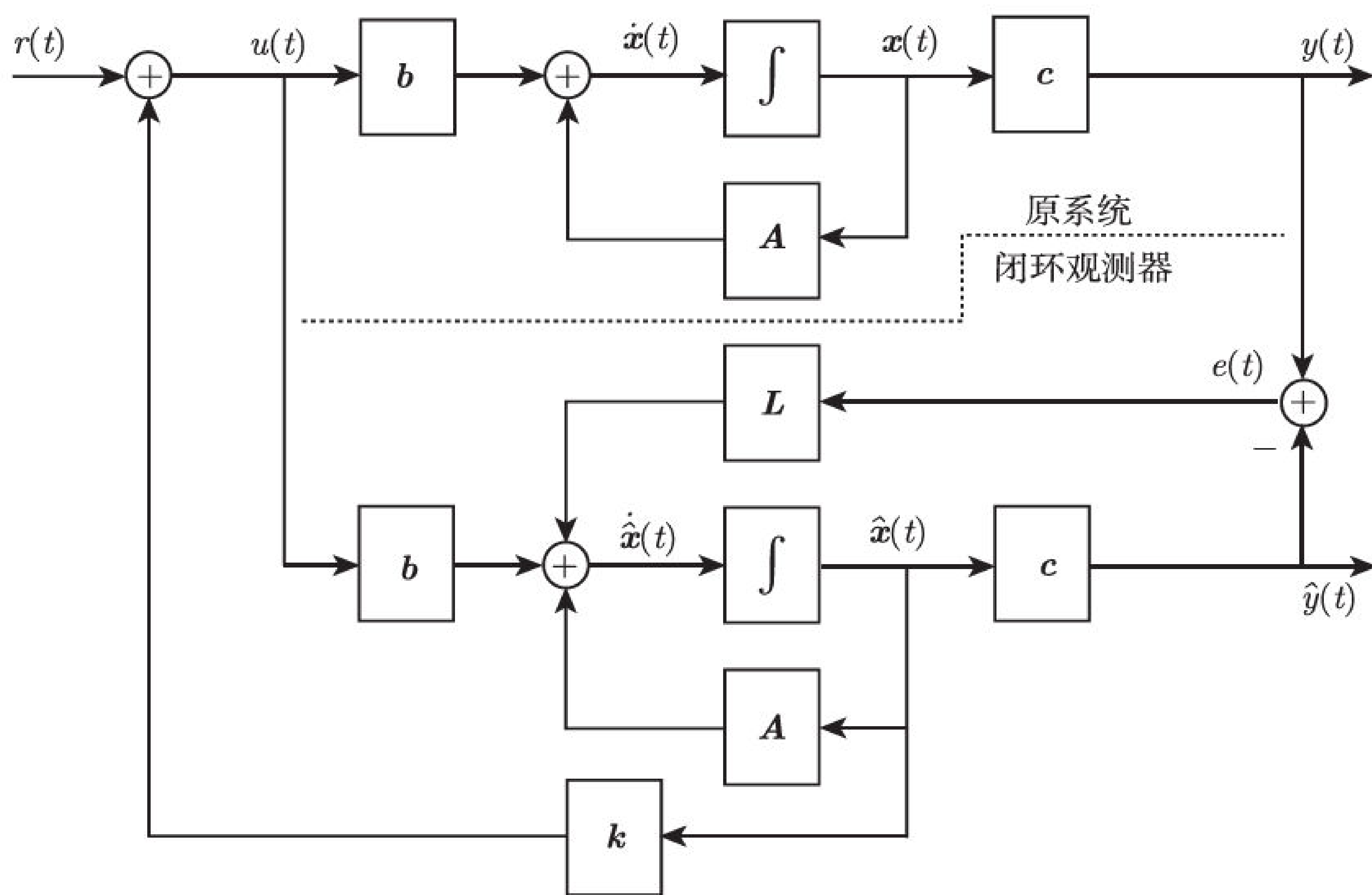



图 6.4.1 基于状态观测器的状态反馈系统框图 [误差 $e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$]

此外, 由式 (6.4.14) 可知, 状态估计误差 $[\hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t)]$ 与系统输入无关, 是不可控的, 其解不受系统输入大小的影响.

**基于观测器的状态反馈极点配置设计步骤**

(1) **判断系统的能控性和能观测性**. 对于给定的系统 (6.4.16), $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 已知, 计算能控性矩阵 $\boldsymbol{Q}_c := [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{Ab}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 如果 $\boldsymbol{Q}_c$ 的秩为 $n$, 即 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{Q}_c] = n$, 说明系统能控.

计算能观测性矩阵

$$Q_o := \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{cA} \\ \boldsymbol{cA}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{cA}^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

如果 $\boldsymbol{Q}_o$ 的秩为 $n$, 即 $\mathrm{rank}[\boldsymbol{Q}_o]=n$, 说明系统能观测, 那么观测器可以任意配置极点.

系统既能控, 又能观测, 说明基于观测器状态反馈的闭环系统可以任意配置极点.

(2) **确定闭环系统的特征多项式**. 因为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 已知的, 故闭环系统特征多项式

$$p(s) := \det[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bk})]$$

是 $s$ 的 $n$ 次首一多项式, 而且是 $\boldsymbol{k}:=[k_1,k_2,\cdots,k_n]\in\mathbb{R}^{1\times n}$ 的函数.

(3) **确定观测器的特征多项式**. 因为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 已知的, 故观测器特征多项式

$$f(s) := \det[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Lc})]$$

是 $s$ 的 $n$ 次首一多项式, 而且是 $\boldsymbol{L}:=[l_1,l_2,l_3,\cdots,l_n]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$ 的函数.

(4) **构造闭环系统的特征多项式**. 对于给定的闭环系统极点 $s_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 构造期望的闭环系统特征多项式:

$$\begin{aligned} p'(s) &= (s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n) \\ &= s^n-(s_1+s_2+\cdots+s_n)s^{n-1}+\cdots+(-1)^n s_1s_2\cdots s_n \\ &=: s^n+a_1's^{n-1}+a_2's^{n-2}+\cdots+a_n'. \end{aligned}$$

(5) **构造期望的观测器特征多项式**. 对于给定的观测器极点 $\lambda_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 构造期望的观测器特征多项式:

$$\begin{aligned} f'(s) &= (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n) \\ &= s^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)s^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \\ &=: s^n+a_1''s^{n-1}+a_2''s^{n-2}+\cdots+a_n''. \end{aligned}$$

(6) **比较系数计算状态反馈增益向量 $\boldsymbol{k}$**. 令闭环系统特征多项式 $p(s)$ 等于期望的闭环系统特征多项式 $p'(s)$, 即

$$\det[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bk})] = s^n+a_1's^{n-1}+a_2's^{n-2}+\cdots+a_n'.$$

比较两边 $s$ 同次幂的系数, 得到关于 $k_i$ 的线性方程组, 求解出 $k_i$, 就得到状态反馈增益向量

$$\boldsymbol{k}=[k_1,k_2,\cdots,k_n].$$

(7) **比较系数计算观测器增益向量 $\boldsymbol{L}$**. 令观测器特征多项式 $f(s)$ 等于期望的观测器特征多项式 $f'(s)$, 即

$$\det[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Lc})] = s^n+a_1''s^{n-1}+a_2''s^{n-2}+\cdots+a_n''.$$

比较两边 $s$ 同次幂的系数, 得到关于 $l_i$ 的线性方程组, 求解出 $l_i$, 就得到观测器的增益向量

$$\boldsymbol{L}=[l_1,l_2,\cdots,l_n]^{\mathrm{T}}.$$

(8) **计算闭环系统状态空间方程**. 闭环系统状态空间方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}r(t),\\ y(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t).\end{cases}$$

(9) **获得状态反馈闭环系统方程和观测器方程**. 根据计算出的 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{L}$, 由式 (6.4.20) 和 (6.4.21) 获得状态反馈闭环系统方程:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}[\hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)]+\boldsymbol{b}\boldsymbol{r}(t), \tag{6.4.25}$$

$$y(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t); \tag{6.4.26}$$

由式 (6.4.17) 和式 (6.4.18) 获得观测器方程:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}u(t)+\boldsymbol{L}y(t),\quad \hat{\boldsymbol{x}}(t_0)=\hat{\boldsymbol{x}}_0, \tag{6.4.27}$$

$$\hat{y}(t)=\boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{x}}(t). \tag{6.4.28}$$

## 6.5 离散时间系统时变增益最优观测器设计方法

在许多现代控制理论课本中, 都讨论了可观测状态空间系统的观测器设计问题, 都是假设观测器增益是时不变向量或时不变矩阵, 通过人为给定的观测器极点来设计增益向量 $\boldsymbol{L}$. 这里基于卡尔曼滤波思想, 研究时变增益状态观测器的设计问题, 即状态观测器的反馈增益是一个时变向量 (矩阵) $\boldsymbol{L}(t)$. 例子证实了提出的时变增益观测器具有更小的状态估计误差. 本节内容主要选自《科学技术与工程》2008 年第 15 期上的论文 “基于卡尔曼滤波思想的时变增益最优观测器设计” [27].

### 6.5.1 系统描述与状态观测器

考虑下列可控可观测状态空间模型描述的 SISO 离散时间系统:

$$\boldsymbol{x}(t+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}u(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0, \tag{6.5.1}$$

$$y(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t)+du(t), \tag{6.5.2}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ 为系统状态向量, $u(t)\in\mathbb{R}$ 和 $y(t)\in\mathbb{R}$ 分别为系统输入和输出, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^{1\times n}$, $d\in\mathbb{R}$.

设 $\boldsymbol{L}\in\mathbb{R}^n$ 为输出误差反馈增益向量, 即观测器增益向量. 众所周知, 闭环观测器方程如下,

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t+1)=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}u(t)+\boldsymbol{L}[y(t)-\hat{y}(t)], \tag{6.5.3}$$

$$\hat{y}(t)=\boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+du(t). \tag{6.5.4}$$

利用式 (6.5.4) 和式 (6.5.2), 从式 (6.5.3) 可得

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}(t+1)&=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}u(t)+\boldsymbol{L}[\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{x}}(t)] &(6.5.5)\\ &=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}u(t)+\boldsymbol{L}\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t). &(6.5.6)\end{aligned}$$

式 (6.5.5) 两边减去式 (6.5.1) 两边可得

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t+1)-\boldsymbol{x}(t+1)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}u(t)+\boldsymbol{L}\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t)-[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}u(t)]$$

$$=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})[\hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)]. \tag{6.5.7}$$

其解为

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})^t[\hat{\boldsymbol{x}}(0)-\boldsymbol{x}(0)]. \tag{6.5.8}$$

因此, 对于给定的 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 以及观测器极点, 或 (由观测器极点构造) 观测器特征多项式 $p(z)$, 令

$$p(z)=|z\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})|,$$

可以计算出观测器增益向量 $\boldsymbol{L}$. 进一步, 如果状态初值 $\boldsymbol{x}(0)$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}(0)$ 已知, 那么, 可以用下列状态估计误差 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)$ 平方和准则函数的大小衡量状态估计精度,

$$J=\sum_{t=0}^{\infty}[\hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)]^{\mathrm{T}}[\hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)].$$

### 6.5.2 时变增益最优观测器设计

在上面状态观测器方程中, 增益向量 $\boldsymbol{L}$ 是常数向量 (时不变的), 下面通过设置一个时变增益向量 $\boldsymbol{L}(t)$, 讨论时变增益观测器的设计. 借助于时不变增益 (常数增益) 观测器设计思想, 参照式 (6.5.3)、式 (6.5.4), 设时变增益观测器取下列形式,

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t+1)=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}u(t)+\boldsymbol{L}(t)[y(t)-\boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{x}}(t)-du(t)]. \tag{6.5.9}$$

目标是确定一个最优的增益向量 $\boldsymbol{L}(t)\in\mathbb{R}^n$ 使估计误差

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t):=\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t)$$

最小. 式 (6.5.9) 两边减去式 (6.5.1) 两边, 可知状态估计误差满足

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t+1)=[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}(t)\boldsymbol{c}]\tilde{\boldsymbol{x}}(t). \tag{6.5.10}$$

定义状态估计误差矩阵

$$\boldsymbol{P}(t):=\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t).$$

用 $t+1$ 代替 $t$, 并利用式 (6.5.10) 可得

$$\boldsymbol{P}(t+1)=[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}(t)\boldsymbol{c}]\boldsymbol{P}(t)[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}(t)\boldsymbol{c}]^{\mathrm{T}}. \tag{6.5.11}$$

因为 $\boldsymbol{P}(t)$ 是非负定矩阵, 把 $\boldsymbol{P}(t+1)$ 配成下列形式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(t+1)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{L}(t)\boldsymbol{c}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(t)+\boldsymbol{L}(t)[\boldsymbol{c}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(t)\\&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{c}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}]^{-1}\boldsymbol{c}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\&\quad+\{\boldsymbol{L}(t)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{c}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}]^{-1}\}[\boldsymbol{c}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}]\{\boldsymbol{L}(t)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{c}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}]^{-1}\}^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

为了极小化估计误差阵 $\boldsymbol{P}(t+1)$, 从上式可以得到待定最优增益向量 $\boldsymbol{L}(t)$. 上式矩阵 $\boldsymbol{P}(t+1)$ 包含 3 项: 第 1 项与 $\boldsymbol{L}(t)$ 无关, 第 2 项是非负定的, 因为矩阵 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 是正定的. 如果选择增益 $\boldsymbol{L}(t)$ 使上式右边最后一项为零, 则有

$$\boldsymbol{L}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{c}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}]^{-1}, \tag{6.5.12}$$

$$\boldsymbol{P}(t+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{c}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}]^{-1}\boldsymbol{c}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}. \tag{6.5.13}$$

式 (6.5.9)、式 (6.5.12)、式 (6.5.13) 构成了时变增益观测器的状态估计算法, 把它称为确定性系统的一步超前卡尔曼状态估计算法, 为了防止上两式中作分母的 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 为零, 可加上一个小常数 $\epsilon$ (如 $\epsilon=10^{-6}$), 修改的算法如下,

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t+1)=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{b}u(t)+\boldsymbol{L}(t)[y(t)-\boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{x}}(t)-du(t)], \tag{6.5.14}$$

$$\boldsymbol{L}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}[\epsilon+\boldsymbol{c}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}]^{-1},\quad 0<\epsilon\leqslant 1, \tag{6.5.15}$$

$$\boldsymbol{P}(t+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{L}(t)\boldsymbol{c}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}. \tag{6.5.16}$$

这是推导状态估计算法的一种最简便方法. 从上述推导看: 这种状态估计误差具有最小方差性质. 但理论上要证明这个递推算法给出的估计误差收敛于零, 即 $\boldsymbol{P}(t)\to\boldsymbol{0}$, 还很困难. 这也是有待研究的课题.

**例 6.5.1** 设对象的传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{100s^2+10s+1},$$

对应的状态空间模型为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}-0.10 & -0.04\\ 0.25 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}0.25\\ 0\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=[0,0.16]\boldsymbol{x}(t).\end{cases}$$

取采样周期为 $h=1\,\mathrm{s}$, 离散化状态空间模型为

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}x_1(kh+h)\\ x_2(kh+h)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.90016 & 0.03800\\ 0.23751 & 0.99517\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(kh)\\ x_2(kh)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.23751\\ 0.03021\end{pmatrix}u(kh),\\ y(kh)=[0,\ 0.16]\boldsymbol{x}(kh).\end{cases}$$

设观测器极点为 $0.5+\mathrm{j}0.5$ 和 $0.5-\mathrm{j}0.5$, 对应的观测器增益向量为

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}10.55492\\ 5.59581\end{pmatrix}.$$

设状态向量初值为 $\boldsymbol{x}(0)=[1,\ 2]^{\mathrm{T}}$, 状态估计器初值为 $\hat{\boldsymbol{x}}(0)=[-1,-2]^{\mathrm{T}}$, 系统的输入为

$$u(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<15h, 30h\leqslant t<45h,\cdots\\ -1, & 15h\leqslant t<30h, 45h\leqslant t<60h,\cdots\end{cases}$$

系统真实状态 (True)、观测器状态 (Observer) 和时变增益状态观测器状态 (D-Kalman) 如图 6.5.1 和图 6.5.2 所示, 状态估计误差 $\delta=[\hat{\boldsymbol{x}}(kh)-\boldsymbol{x}(kh)]^{\mathrm{T}}[\hat{\boldsymbol{x}}(kh)-\boldsymbol{x}(kh)]$ 随 $k$ 变化曲线如图 6.5.3 所示, 状态估计误差 $\delta$ 如表 6.5.1 所示.

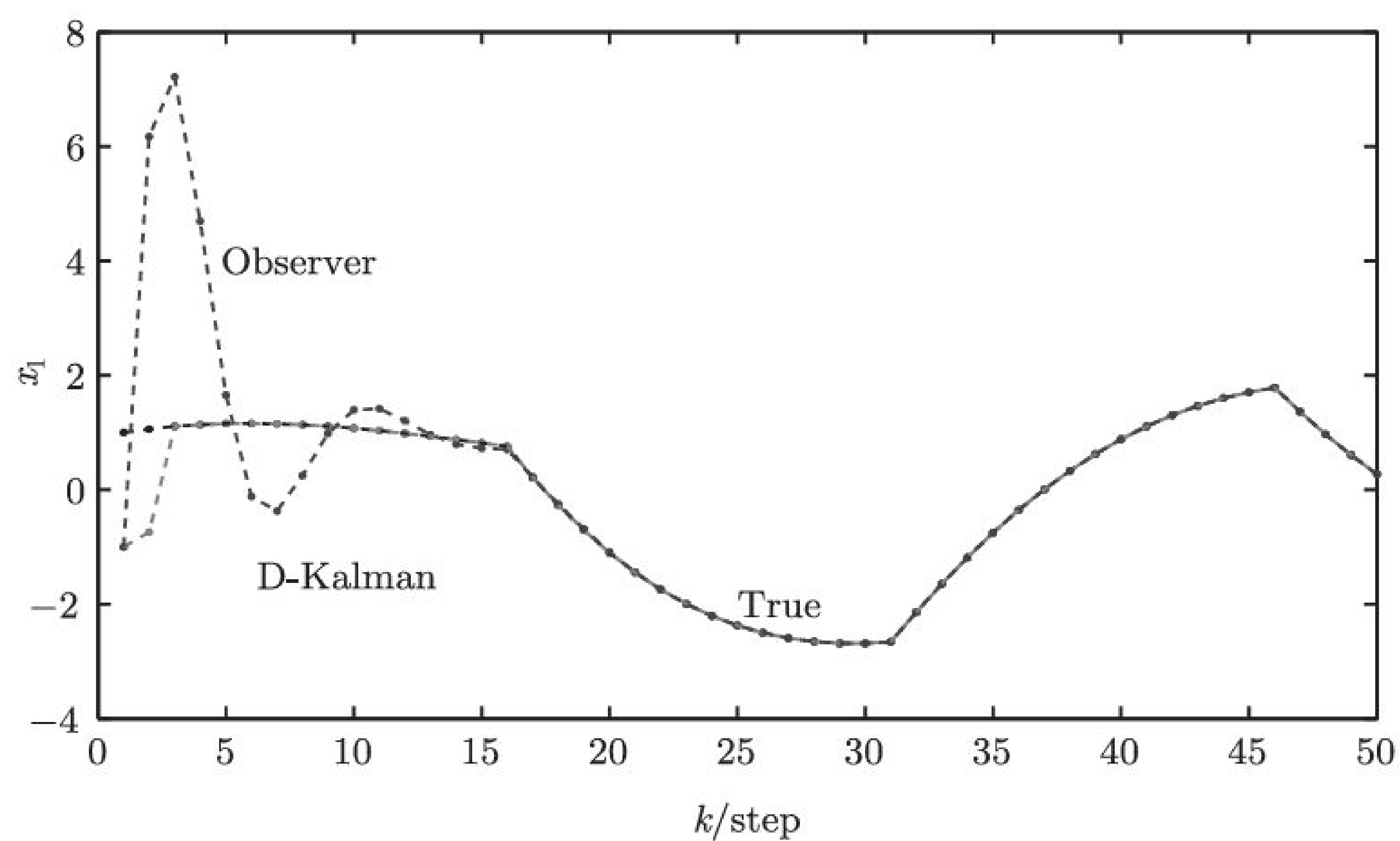



图 6.5.1　状态估计 $\hat{x}_1(t)$ 随 $t = kh$ 变化曲线

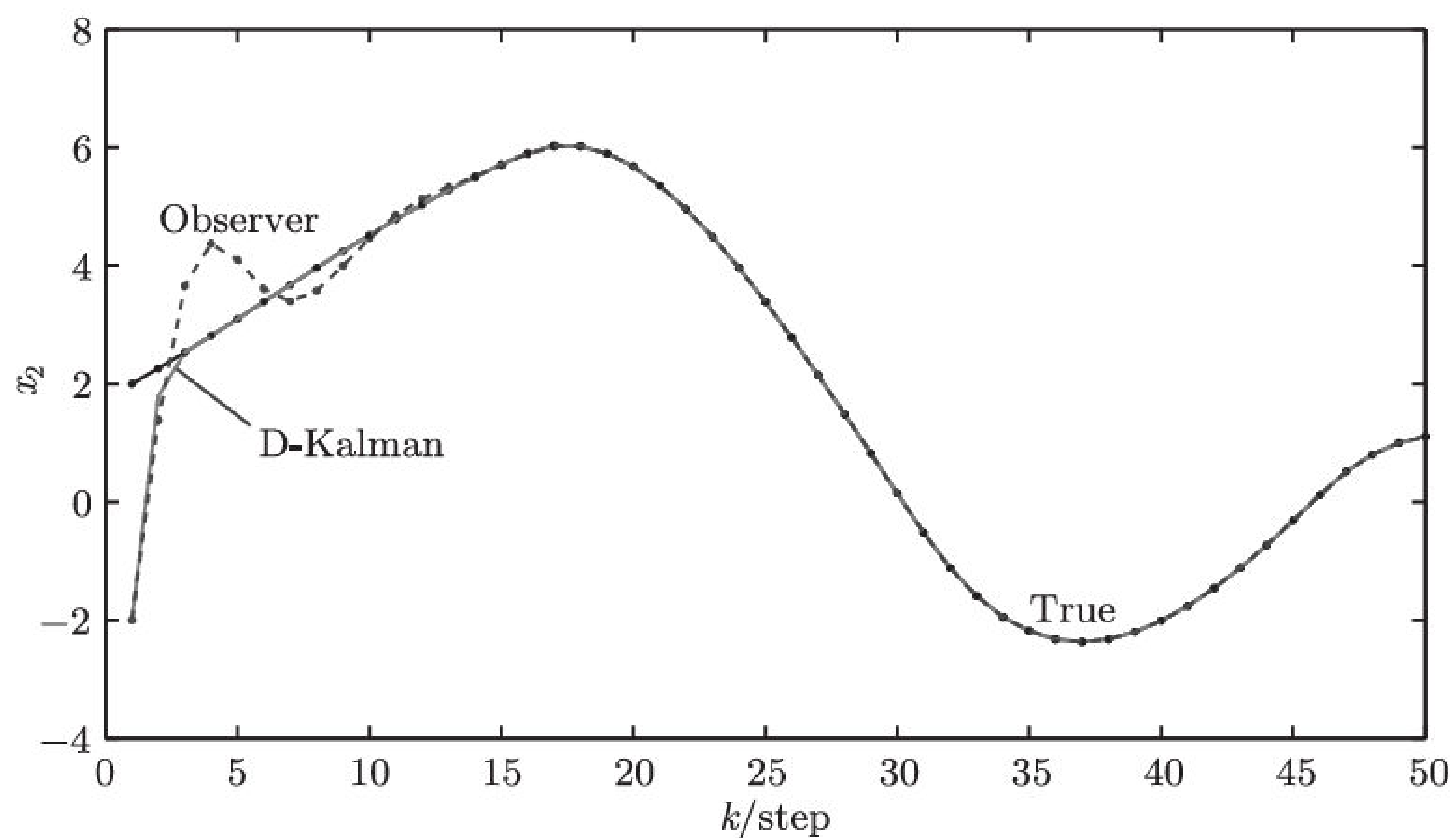



图 6.5.2　状态估计 $\hat{x}_2(t)$ 随 $t = kh$ 变化曲线

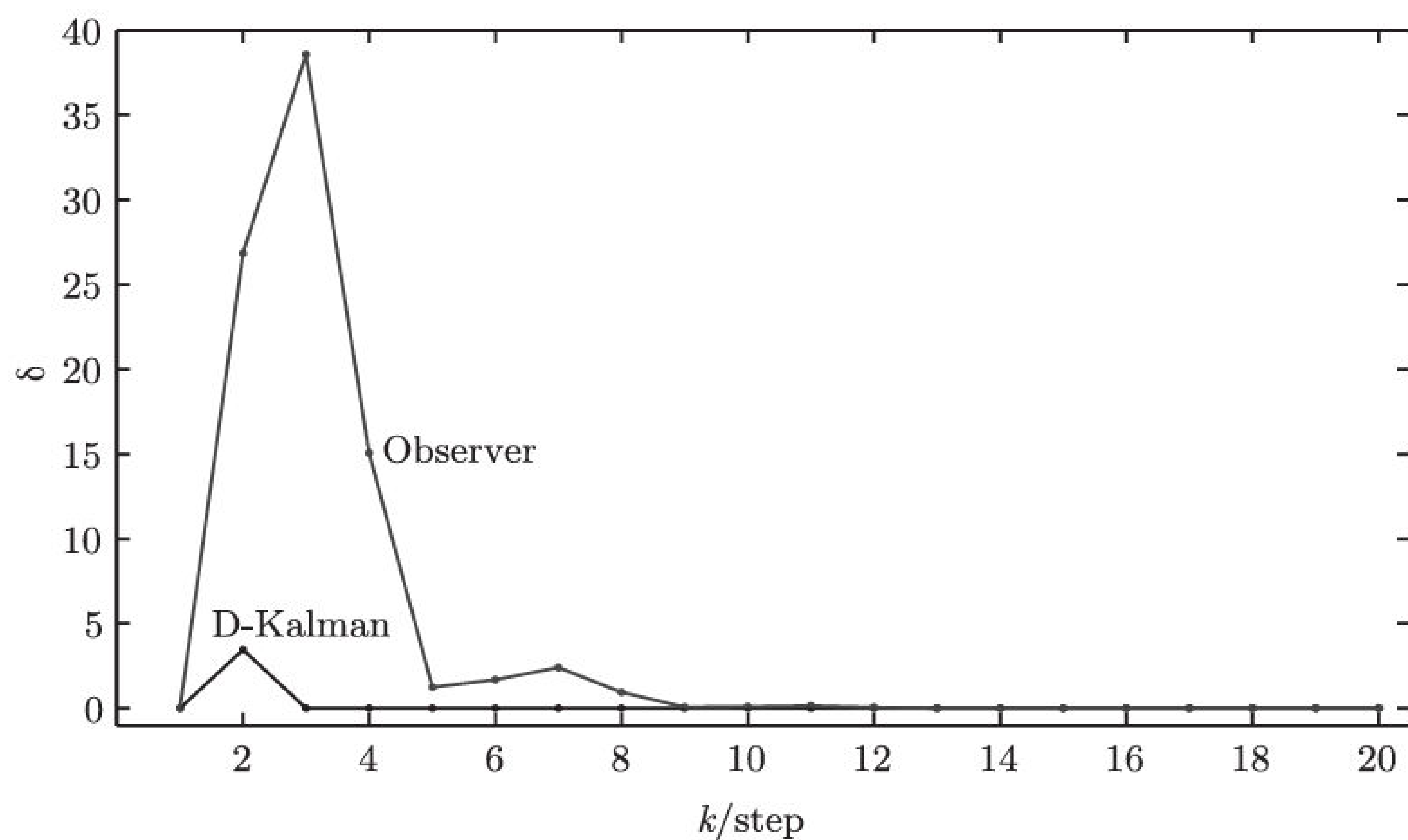



图 6.5.3　状态估计误差 $\delta$ 随 $t = kh$ 变化曲线

表 6.5.1 状态估计误差

| $k$ | 时变增益观测器 | 传统观测器 |
|---|---|---|
| 1 | 3.4669408777 | 26.8442485630 |
| 2 | 0.0000034740 | 38.5604293260 |
| 3 | 0.0000001343 | 15.0691525222 |
| 4 | 0.0000000129 | 1.2500000000 |
| 5 | 0.0000000020 | 1.6777655352 |

从图 6.5.1~ 图 6.5.3 和表 6.5.1 可以看出, 时变增益状态观测器给出的状态估计误差要小于传统观测器状态估计误差. 时变增益状态观测器比传统状态观测器具有更好的跟踪性能.

## 6.6 降维状态观测器及其设计

当观测器状态向量的维数小于被控对象状态向量的维数时, 称为 **降维状态观测器** (Reduced-Order State Observer). 对于 $m$ 维输出系统, 由于系统输出是由 $n$ 个状态变量的线性组合构成的 (一般 $n > m$), 如果通过适当的线性变换, 使得变换后的系统输出参数矩阵有下列形式,

$$\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{I}_m] \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \boldsymbol{I}_m \text{ 为 } n \text{ 阶单位阵},$$

那么就有 $m$ 状态变量可直接由输出得到 (不必估计), 则只需估计另外 $n-m$ 个状态变量, 只需设计 $n-m$ 维状态观测器, 它的维数小于 $n$, 故称为 **降维观测器** (Reduced-Order Observer).

### 6.6.1 线性变换

考虑多输入多输出系统:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{w}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{w}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{w}(t_0) = \boldsymbol{w}_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{w}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t), \end{cases} \tag{6.6.1}$$

其中 $\boldsymbol{w}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态向量, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ 和 $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统输入和输出向量, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{m\times r}$.

假设矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行线性无关 (即 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{C}] = m$), 对式 (6.6.1) 进行线性变换:

$$\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}(t),$$

非奇异变换矩阵为

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix}^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

式中 $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{(n-m)\times n}$ 是一个保证 $\boldsymbol{T}$ 满秩的任选矩阵. 变换后的系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t), \end{cases} \tag{6.6.2}$$

因为

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{T} \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}_n.$$

所以

$$\boldsymbol{CT} = [\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{I}_m].$$

对系统 (6.6.2) 的状态向量、系统矩阵进行分块,

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_1(t) \in \mathbb{R}^{n-m}, \quad \boldsymbol{x}_2(t) \in \mathbb{R}^{m}, \quad \boldsymbol{A}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}, \quad \boldsymbol{A}_{12} \in \mathbb{R}^{(n-m)\times m},$$

$$\boldsymbol{A}_{21} \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}, \quad \boldsymbol{A}_{22} \in \mathbb{R}^{m\times m}, \quad \boldsymbol{B}_1 \in \mathbb{R}^{(n-m)\times r}, \quad \boldsymbol{B}_2 \in \mathbb{R}^{m\times r}.$$

可得

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1(t) \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t), \tag{6.6.3}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(t) &= [\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{I}_m] \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix} + \boldsymbol{Du}(t) \\ &= \boldsymbol{x}_2(t) + \boldsymbol{Du}(t). \end{aligned} \tag{6.6.4}$$

因此, 子状态向量 $\boldsymbol{x}_2(t)$ 不必估计, 它可以从上式计算出

$$\boldsymbol{x}_2(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{Du}(t). \tag{6.6.5}$$

从式 (6.6.3) 可得

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1(t) = \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_2(t) + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}(t), \tag{6.6.6}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2(t) = \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2(t) + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}(t). \tag{6.6.7}$$

将式 (6.6.5) 代入式 (6.6.6) 可得

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_1(t) &= \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{A}_{12}[\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{Du}(t)] + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}(t) \\ &= \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{y}(t) + [\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{D}]\boldsymbol{u}(t). \end{aligned} \tag{6.6.8}$$

定义一个新变量 (向量)

$$\boldsymbol{y}_1(t) := \dot{\boldsymbol{x}}_2(t) - \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2(t) - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}(t). \tag{6.6.9}$$

将式 (6.6.5) 代入上式可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1(t) &= [\dot{\boldsymbol{y}}(t) - \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{u}}(t)] - \boldsymbol{A}_{22}[\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{Du}(t)] - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}(t) \\ &= \dot{\boldsymbol{y}}(t) - \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{Du}(t) - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}(t). \end{aligned} \tag{6.6.10}$$

因为系统输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 和输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 可以测得, 所以上式 $\boldsymbol{y}_1(t)$ 也能够计算出来. 将式 (6.6.7) 右边最后两项移到方程左边得到

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2(t) - \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2(t) - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1(t).$$

参见 $\boldsymbol{y}_1(t)$ 的定义式, 有

$$\boldsymbol{y}_1(t) = \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1(t). \tag{6.6.11}$$

因为 $\boldsymbol{y}_1(t)$ 可计算得到, 故可作为以 $\boldsymbol{x}_1(t)$ 为子状态向量的动态系统 (6.6.8) 的输出. 因此, 设计降维观测器的动态系统由式 (6.6.8) 和式 (6.6.11) 构成.

### 6.6.2 变换后的降维观测器

考虑降维状态方程描述的系统 (6.6.8) 和 (6.6.11), 重写为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)=\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{y}(t)+(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{D})\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{y}_1(t)=\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1(t).\end{cases}\tag{6.6.12}$$

其中 $\boldsymbol{x}_1(t)\in\mathbb{R}^{n-m}$ 是待估计的降维状态向量, $\boldsymbol{y}_1(t)\in\mathbb{R}^m$ 是降维系统的输出向量 [由式 (6.6.10) 计算得到], 其他变量的定义同上节.

设 $\boldsymbol{L}_1\in\mathbb{R}^{(n-m)\times m}$ 为增益矩阵. 闭环观测器方程为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_1(t)&=\boldsymbol{A}_{11}\hat{\boldsymbol{x}}_1(t)+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{y}(t)+(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{D})\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{L}_1[\boldsymbol{y}_1(t)-\hat{\boldsymbol{y}}_1(t)]\\&=\boldsymbol{A}_{11}\hat{\boldsymbol{x}}_1(t)+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{y}(t)+(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{D})\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_{21}\hat{\boldsymbol{x}}_1(t)+\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{y}_1(t)\\&=(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_{21})\hat{\boldsymbol{x}}_1(t)+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{y}(t)+(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{D})\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{y}_1(t),\end{aligned}\tag{6.6.13}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}_1(t)=\boldsymbol{A}_{21}\hat{\boldsymbol{x}}_1(t).\tag{6.6.14}$$

将式 (6.6.10) 代入上式可得

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_1(t)&=(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_{21})\hat{\boldsymbol{x}}_1(t)+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{y}(t)+(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{D})\boldsymbol{u}(t)\\&\quad+\boldsymbol{L}_1[\dot{\boldsymbol{y}}(t)-\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{u}}(t)+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}(t)]\\&=(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_{21})\hat{\boldsymbol{x}}_1(t)+(\boldsymbol{A}_{12}-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_{22})\boldsymbol{y}(t)+(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{u}(t)\\&\quad+\boldsymbol{L}_1\dot{\boldsymbol{y}}(t)-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{u}}(t).\end{aligned}$$

由于导数项对噪声敏感, 故定义新变量, 消除导数项. 同样在传递函数 (矩阵) 的状态空间模型实现中和状态观测器设计中, 也不希望出现输入或输出的导数项. 为了消除上式中导数项 $\dot{\boldsymbol{y}}(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{u}}(t)$, 定义

$$\boldsymbol{v}_1(t):=\hat{\boldsymbol{x}}_1(t)-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t),\tag{6.6.15}$$

或

$$\hat{\boldsymbol{x}}_1(t)=\boldsymbol{v}_1(t)+\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t).\tag{6.6.16}$$

对式 (6.6.15) 两边求导, 并利用式 (6.6.15) 和上式可得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{v}}_1(t)&=\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_1(t)-\boldsymbol{L}_1\dot{\boldsymbol{y}}(t)+\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{u}}(t)\\&=(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_{21})\hat{\boldsymbol{x}}_1(t)+(\boldsymbol{A}_{12}-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_{22})\boldsymbol{y}(t)+(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{u}(t)\\&=(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_{21})[\boldsymbol{v}_1(t)+\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)]+(\boldsymbol{A}_{12}-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_{22})\boldsymbol{y}(t)\\&\quad+(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{u}(t)\\&=(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{v}_1(t)+(\boldsymbol{A}_{12}-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{L}_1-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{L}_1)\boldsymbol{y}(t)\\&\quad+(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{D})\boldsymbol{u}(t).\end{aligned}\tag{6.6.17}$$

在这个新状态方程中消除了输出和输入的导数项. 将式 (6.6.16) 代入由式 (6.6.12) 的第 2 式子可得输出方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_1(t)&=\boldsymbol{A}_{21}[\boldsymbol{v}_1(t)+\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)]\\&=\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{v}_1(t)+\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t).\end{aligned}\tag{6.6.18}$$

式 (6.6.17) 和式 (6.6.18) 构成了降维观测器的动态方程.

## 6.7 鲁棒观测器–控制器的设计

我们已经讨论了基于观测器的状态反馈控制器设计方法, 其前提是系统参数是确定的, 即参数是常数, 没有参数摄动. 但在实际中, 系统必然会有一定的参数摄动, 即系统在运行过程中参数会发生小的变化, 而系统参数摄动会使系统原有的分离性原理遭到破坏, 使得观测器和控制器无法独立配置极点. 为此本书作者提出了 "鲁棒观测器–控制器的设计方法"(《控制理论与应用》1992 年第 4 期)[28]. 本节介绍存在参数摄动时鲁棒观测器–控制器闭环系统的设计方法, 并给出了参数摄动情况下的鲁棒稳定条件, 并通过 Gronwall 引理进行了鲁棒性验证.

### 6.7.1 参数摄动多变量系统

考虑下列参数摄动多变量系统:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{6.7.1}$$

其中 $\boldsymbol{x} := \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $\boldsymbol{u} := \boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ 为输入向量, $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ 为输出向量; $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 均为适当维数的常矩阵; $\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$, $\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u})$, $\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$ 是线性或非线性时变参数摄动.

当参数摄动为线性时, 可假设 $\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \Delta\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, $\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) = \Delta\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$, $\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) = \Delta\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$; 当参数摄动为非线性时, 假设参数摄动是在线性区域内变化的, 如图 6.7.1 所示的上部分. 在这种情况下, 可假设这些非线性参数摄动的上界值为

$$\|\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\| \leqslant \beta_1\|\boldsymbol{x}\|, \quad \|\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u})\| \leqslant \beta_2\|\boldsymbol{u}\|, \quad \|\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})\| \leqslant \beta_3\|\boldsymbol{x}\|, \tag{6.7.2}$$

其中假设上界系数 $\beta_1$、$\beta_2$ 和 $\beta_3$ 已知. $n$ 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的范数定义为

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \tag{6.7.3}$$

$n$ 维矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ 的范数定义为

$$\|\boldsymbol{A}\| = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{6.7.4}$$

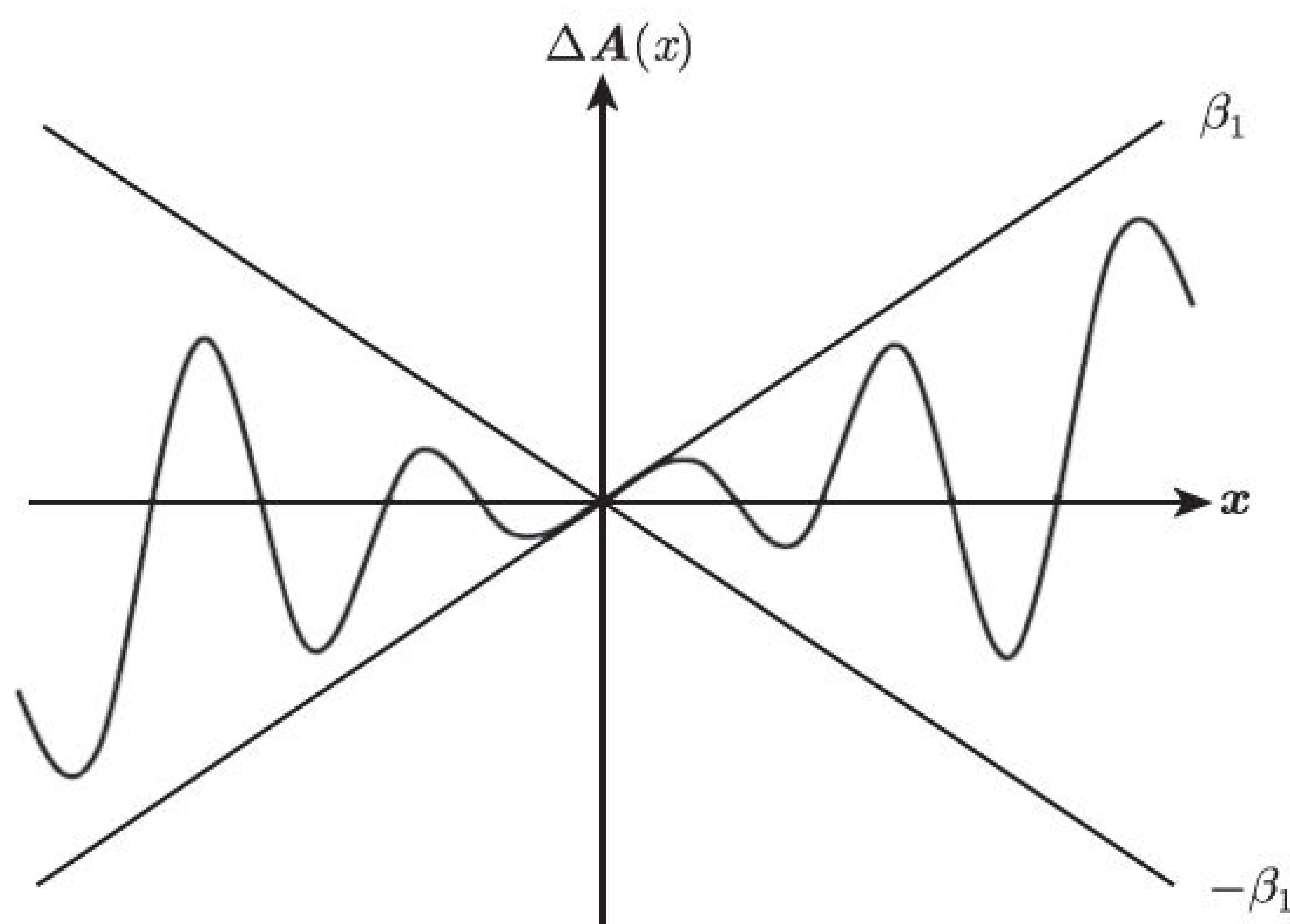



图 6.7.1 设定参数摄动上界示意图

实践中, 假设标称模型的参数 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 是已知的, 而参数摄动 $\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$、$\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u})$、$\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$ 是未知的, 但其上界是已知的, 即式 (6.7.2) 中的上界系数 $\beta_1$、$\beta_2$ 和 $\beta_3$ 是已知的. 在这种情况下, 我们的目标是在状态不可测时, 设计基于观测器的鲁棒控制器使得状态反馈闭环系统渐近稳定.

### 6.7.2 鲁棒观测器–控制器

由于参数摄动 $\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$、$\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u})$、$\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$ 是未知的, 只能通过系统 (6.7.1) 的标称模型, 即近似系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\end{cases} \tag{6.7.5}$$

的参数 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 来设计观测器和控制器, 并且使得闭环系统有一定的稳定裕量, 以至于在式 (6.7.2) 所规定的参数摄动范围内闭环系统是鲁棒稳定的.

当设计鲁棒观测器–控制器时, 如果选择的控制器反馈参数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和观测器的参数矩阵 $\boldsymbol{L}$ 可以使构成的鲁棒观测器–控制器闭环状态反馈系统渐近稳定. 那么, 在设计观测器时可以忽略参数摄动, 即采用标称模型作为设计观测器的状态空间模型. 图 6.7.2 是鲁棒观测器–控制器设计的原理图, 该图分为上下两部分, 上部分表示原系统, 下部分就是利用标称模型构成的闭环观测器和状态反馈控制器. 假设 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 能控, $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A})$ 能观测, 根据图 6.7.2 可以写出系统 (6.7.1) 的观测器–控制器的状态方程:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}&=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{y}})\\&=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{L}[\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}]\\&=\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{L}\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \quad \hat{\boldsymbol{x}}(t_0)=\hat{\boldsymbol{x}}_0,\end{aligned} \tag{6.7.6}$$

观测器的输出方程:

$$\hat{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}, \tag{6.7.7}$$

基于观测器的状态反馈控制律 (Control Law):

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}, \tag{6.7.8}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{x}}\in\mathbb{R}^n$ 为观测器状态, $\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^r$ 为参考输入或期望输出, $\boldsymbol{L}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ 和 $\boldsymbol{K}\in\mathbb{R}^{r\times n}$ 分别是观测器的增益矩阵和状态反馈矩阵. 式 (6.7.6)、式 (6.7.8) 构成了参数摄动线性系统的基于状态反馈的鲁棒观测器–控制器闭环系统.

带观测器的闭环系统方程为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}, \tag{6.7.9}$$

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}. \tag{6.7.10}$$

**引理 6.7.1 Gronwall 引理** 的微分形式

设 $u(t)$ 和 $\beta(t)$ 是定义区间 $T_s:=[a,b)\in\mathbb{R}$ 上的实值连续时间函数, 且在 $T_s$ 的开子区间 $T_s^0$ 上可微, 且满足不等式:

$$u'(t)\leqslant\beta(t)u(t), \quad t\in T_s^0.$$

那么下列不等式成立:

$$u(t) \leqslant u(a) \exp\left(\int_a^t \beta(\tau)\mathrm{d}\tau\right), \quad t \in T_s.$$

这里没有对函数 $u(t)$ 和 $\beta(t)$ 的符号作假设.

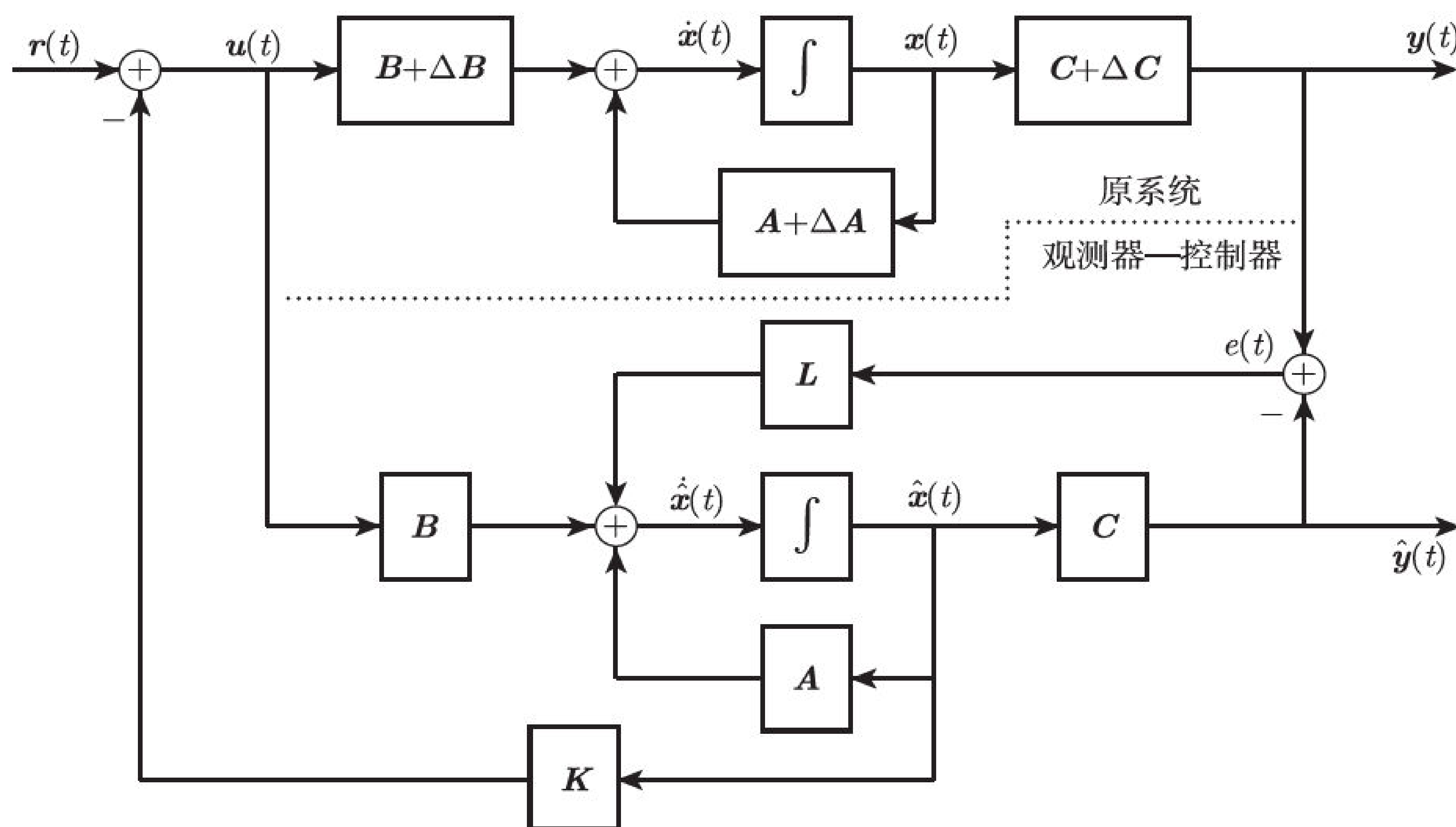



图 6.7.2　鲁棒观测器—控制器系统框图 [误差 $\boldsymbol{e}(t) := \boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t)$]

**证明**　定义函数

$$v(t) = \exp\left(\int_a^t \beta(\tau)\mathrm{d}\tau\right), \quad t \in T_s.$$

注意到 $v(t)$ 满足

$$v'(t) = \beta(t)v(t), \quad t \in T_s^0,$$

且 $v(a) = 1$, $v(t) > 0$. 根据商微分公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{u(t)}{v(t)} = \frac{u'(t)v(t) - v'(t)u(t)}{v^2(t)} = \frac{u'(t)v(t) - \beta(t)v(t)u(t)}{v^2(t)} \leqslant 0, \quad t \in T_s^0.$$

因此函数 $u(t)/v(t)$ 的导数是非正的, 且有上界

$$\frac{u(t)}{v(t)} \leqslant \frac{u(a)}{v(a)} = u(a), \quad t \in T_s.$$

这就是 Gronwall 不等式. 引理证毕.

上面是微分形式的 Gronwall 引理或 Gronwall 不等式, 下面是积分形式的 Gronwall 引理或 Gronwall 不等式.

**引理 6.7.2 Gronwall 引理 的积分形式**

设 $u(t)$, $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 是定义区间 $T_s := [a, \infty)$, 或 $T_s := [a, b]$, 或 $T_s := [a, b)$ 上的实值时间函数, $u(t)$ 和 $\beta(t)$ 是连续的.

(1) 如果 $\beta(t)$ 是非负的, $u(t)$ 满足积分不等式:

$$u(t) \leqslant \alpha(t) + \int_a^t \beta(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t \in T_s. \tag{6.7.11}$$

那么下列不等式成立,

$$u(t) \leqslant \alpha(t) + \int_a^t \alpha(\tau)\beta(\tau)\exp\left(\int_\tau^t \beta(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\tau, \quad t \in T_s. \tag{6.7.12}$$

(2) 进一步, 如果函数 $\alpha(t)$ 非降, 那么有

$$u(t) \leqslant \alpha(t)\exp\left(\int_a^t \beta(\tau)\mathrm{d}\tau\right), \quad t \in T_s. \tag{6.7.13}$$

**证明** (1) 定义函数

$$v(t) = \exp\left(-\int_a^t \beta(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\int_a^t \beta(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t \in T_s. \tag{6.7.14}$$

根据函数乘积微分公式, 有

$$\begin{aligned} v'(t) &= \left(u(t) - \int_a^t \beta(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\beta(t)\exp\left(-\int_a^t \beta(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ &\leqslant \alpha(t)\beta(t)\exp\left(-\int_a^t \beta(\tau)\mathrm{d}\tau\right), \quad t \in T_s. \end{aligned}$$

由于 $\beta(t)$ 和指数函数都是非负的, 上式给出了 $v'(t)$ 的上界. 由于 $v(a) = 0$, 上式两边对 $t$ 从 $t = a$ 到 $t$ 积分得到

$$\begin{aligned} v(t) &\leqslant \int_a^t \alpha(t)\beta(t)\exp\left(-\int_a^t \beta(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^t \alpha(\xi)\beta(\xi)\exp\left(-\int_a^\xi \beta(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\xi, \quad t \in T_s. \end{aligned}$$

根据 $v(t)$ 的定义式 (6.7.14) 有

$$\begin{aligned} \int_a^t \beta(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau &= \exp\left(\int_a^t \beta(\tau)\mathrm{d}\tau\right)v(t) \\ &\leqslant \exp\left(\int_a^t \beta(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\int_a^t \alpha(\xi)\beta(\xi)\exp\left(-\int_a^\xi \beta(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\xi \\ &= \int_a^t \alpha(\xi)\beta(\xi)\exp\left(\int_a^t \beta(\tau)\mathrm{d}\tau - \int_a^\xi \beta(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\xi \\ &= \int_a^t \alpha(\xi)\beta(\xi)\exp\left(\int_\xi^t \beta(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

$$=\int_a^t \alpha(\tau)\beta(\tau)\exp\left(\int_\tau^t \beta(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\tau,\quad t\in T_s. \tag{6.7.15}$$

将上式代入积分不等式 (6.7.11) 即得结论 (1).

(2) 由函数 $\alpha(t)$ 非降假设, 那么有 $\alpha(\tau)\leqslant\alpha(t)$, $\tau\leqslant t$, 根据积分学基本定理, 由结论 (1) 可得

$$\begin{aligned}u(t)&\leqslant\alpha(t)+\int_a^t \alpha(\tau)\beta(\tau)\exp\left(\int_\tau^t \beta(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\tau\\&\leqslant\alpha(t)+\alpha(t)\int_a^t \beta(\tau)\exp\left(\int_\tau^t \beta(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\tau\\&=\alpha(t)-\alpha(t)\exp\left(\int_\tau^t \beta(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\Bigg|_{\tau=a}^{\tau=t}\\&=\alpha(t)\exp\left(\int_a^t \beta(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\\&=\alpha(t)\exp\left(\int_a^t \beta(\tau)\mathrm{d}\tau\right),\quad t\in T_s.\end{aligned}$$

这就是结论 (2). 引理证毕.

由 Gronwall 引理 6.7.2 可知: 对于常数 $\alpha$ 和 $\beta$, 如果下式成立,

$$u(t)\leqslant\alpha+\beta\int_a^t u(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\in T_s,$$

那么下列不等式成立:

$$u(t)\leqslant\alpha\mathrm{e}^{\beta(t-a)},\quad t\in T_s.$$

### 6.7.3　鲁棒稳定性定理

在研究系统的稳定性时, 通常不考虑参考输入 $\boldsymbol{r}(t)$, 即认为 $\boldsymbol{r}(t)=\mathbf{0}$, 此时 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}$. 在这种情况下, 式 (6.7.1) 可以表示为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}[-\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}]+\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u})\\&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}+\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0.\end{aligned} \tag{6.7.16}$$

式 (6.7.16) 和式 (6.7.6) 构成了复合动态系统:

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\\\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}&\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\hat{\boldsymbol{x}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u})\\\boldsymbol{L}\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix},\\ \boldsymbol{y}=[\boldsymbol{C},\ \mathbf{0}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\hat{\boldsymbol{x}}\end{pmatrix}+\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}).\end{cases} \tag{6.7.17}$$

为分析该闭环系统的特性, 对式 (6.7.17) 作等效变换, 即不用状态估计值 $\hat{\boldsymbol{x}}$, 而用状态估计值误差 $(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}})$ 作状态变量, 故引入如下相似变换

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\mathbf{0}\\\boldsymbol{I}&-\boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\hat{\boldsymbol{x}}\end{pmatrix}.$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 为单位阵, $\tilde{\boldsymbol{x}} := \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}$ 为状态估计值误差. 令变换矩阵为

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} \end{pmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} \end{pmatrix}.$$

对式 (6.7.17) 作 $\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hat{\boldsymbol{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \tilde{\boldsymbol{x}} \end{pmatrix}$ 的线性变换, 则变换后的状态空间模型为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK} & \boldsymbol{BK} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \tilde{\boldsymbol{x}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) \\ \Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{L}\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{y} = [\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{0}] \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \tilde{\boldsymbol{x}} \end{pmatrix} + \Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}). \end{cases} \tag{6.7.18}$$

记

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{x}} &:= \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \tilde{\boldsymbol{x}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{A}} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK} & \boldsymbol{BK} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC} \end{pmatrix}, \\ \Delta\bar{\boldsymbol{A}}(\bar{\boldsymbol{x}}) &:= \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) \\ \Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{L}\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \\ \bar{\boldsymbol{C}} &:= [\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{0}], \quad \Delta\bar{\boldsymbol{C}}(\bar{\boldsymbol{x}}) := \Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{6.7.19}$$

式 (6.7.18) 可简写成

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}} + \Delta\bar{\boldsymbol{A}}(\bar{\boldsymbol{x}}), \quad \bar{\boldsymbol{x}}(t_0) = \bar{\boldsymbol{x}}_0 = [\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}, \tilde{\boldsymbol{x}}_0^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \tag{6.7.20}$$

$$\boldsymbol{y} = \bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}} + \Delta\bar{\boldsymbol{C}}(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{6.7.21}$$

令 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为闭环系统 (6.7.20)~(6.7.21) 的状态转移矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t) := \exp(\bar{\boldsymbol{A}}t). \tag{6.7.22}$$

为了使闭环系统 (6.7.20)~(6.7.21) 稳定, 至少需要选择适当观测器–控制器的参数 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{K}$, 使得矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的所有特征值 $\lambda_i(\bar{\boldsymbol{A}})$ 均位于左半平面内 $(i = 1, 2, \cdots, 2n)$. 因为 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 能控, $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A})$ 能观测, 所以要使特征值均在左半平面是很容易做到的.

当 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的离虚轴最近的特征值是非重特征根时, 取 $-\alpha = \max \mathrm{Re}[\lambda_i(\bar{\boldsymbol{A}})]$ ($\mathrm{Re}[s]$ 指 $s$ 的实部, 当 $s = \sigma + \mathrm{j}\omega$, $\sigma$ 和 $\omega$ 均为实数时, $\mathrm{Re}[s] = \sigma$), 则存在常数 $\delta_1 > 0$ 使下述不等式成立:

$$\|\boldsymbol{\Phi}(t)\| \leqslant \delta_1 \exp(-\alpha t), \quad t \geqslant 0. \tag{6.7.23}$$

当 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的离虚轴最近的特征值 $\lambda_i[\bar{\boldsymbol{A}}]$ 为 $q$ 重时, 则存在常数 $\alpha$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ 和 $t_0 > 0$ 使不等式

$$\|\boldsymbol{\Phi}(t)\| \leqslant \delta_2 t^q \exp(-\alpha_1 t) \leqslant \delta_1 \exp(-\alpha t), \quad t \geqslant t_0 \tag{6.7.24}$$

成立, 其中 $-\alpha_1 = \max \mathrm{Re}[\lambda_i(\bar{\boldsymbol{A}})]$, $0 < \alpha < \alpha_1$.

**定理 6.7.1** 设系统 (6.7.1) 的参数摄动满足关系式 (6.7.2), 如果通过选择观测器–控制器的增益矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{K}$, 那么使闭环系统 (6.7.20)~(6.7.21) 渐进稳定的充分条件是不等式

$$\alpha > \delta_1(2\beta_1 + 2\beta_2\|\boldsymbol{K}\| + \beta_3\|\boldsymbol{L}\|) \tag{6.7.25}$$

成立.

**证明**　式 (6.7.20) 的解为

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\bar{\boldsymbol{x}}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\Delta\bar{\boldsymbol{A}}(\bar{\boldsymbol{x}}(\tau))\mathrm{d}\tau. \tag{6.7.26}$$

对式 (6.7.26) 两边取范数, 得到

$$\|\bar{\boldsymbol{x}}(t)\|\leqslant\|\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\|\|\bar{\boldsymbol{x}}_0\|+\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\|\|\Delta\bar{\boldsymbol{A}}(\bar{\boldsymbol{x}}(\tau))\|\mathrm{d}\tau. \tag{6.7.27}$$

由式 (6.7.19) 可得

$$\begin{aligned}\|\Delta\bar{\boldsymbol{A}}(\bar{\boldsymbol{x}}(\tau))\|&=\left\|\begin{matrix}\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u})\\ \Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{L}\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})\end{matrix}\right\|\\&\leqslant\|\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u})\|+\|\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{L}\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})\|\\&\leqslant 2\|\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\|+2\|\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u})\|+\|\boldsymbol{L}\|\|\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})\|\\&\leqslant 2\beta_1\|\boldsymbol{x}(\tau)\|+2\beta_2\|\boldsymbol{u}(\tau)\|+\beta_3\|\boldsymbol{L}\|\|\boldsymbol{x}(\tau)\|\\&\leqslant(2\beta_1+2\beta_2\|\boldsymbol{K}\|+\beta_3\|\boldsymbol{L}\|)\|\bar{\boldsymbol{x}}(\tau)\|.\end{aligned} \tag{6.7.28}$$

使用式 (6.7.23) 或式 (6.7.24) 和式 (6.7.28), 由式 (6.7.27) 可得

$$\|\bar{\boldsymbol{x}}(t)\|\leqslant\delta_1\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\|\bar{\boldsymbol{x}}_0\|+\int_{t_0}^{t}\delta_1\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}(2\beta_1+2\beta_2\|\boldsymbol{K}\|+\beta_3\|\boldsymbol{L}\|)\|\bar{\boldsymbol{x}}(\tau)\|\mathrm{d}\tau,$$

或

$$\|\bar{\boldsymbol{x}}(t)\|\mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)}\leqslant\delta_1\|\bar{\boldsymbol{x}}_0\|+\int_{t_0}^{t}\delta_1(2\beta_1+2\beta_2\|\boldsymbol{K}\|+\beta_3\|\boldsymbol{L}\|)\mathrm{e}^{\alpha(\tau-t_0)}\|\bar{\boldsymbol{x}}(\tau)\|\mathrm{d}\tau.$$

运用 Gronwall 引理 6.7.2 之结论 (2) 得到

$$\|\bar{\boldsymbol{x}}(t)\|\mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)}\leqslant\delta_1\|\bar{\boldsymbol{x}}_0\|\exp[\delta_1(2\beta_1+2\beta_2\|\boldsymbol{K}\|+\beta_3\|\boldsymbol{L}\|)t],$$

或

$$\|\bar{\boldsymbol{x}}(t)\|\leqslant\delta_1\|\bar{\boldsymbol{x}}_0\|\mathrm{e}^{\alpha t_0}\mathrm{e}^{[-\alpha+\delta_1(2\beta_1+2\beta_2\|\boldsymbol{K}\|+\beta_3\|\boldsymbol{L}\|)]t}.$$

而

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{y}(t)\|&=\|\bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}}+\Delta\boldsymbol{C}(\bar{\boldsymbol{x}})\|\\&\leqslant\|\bar{\boldsymbol{C}}\|\|\bar{\boldsymbol{x}}(t)\|+\|\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})\|\\&\leqslant(\|\bar{\boldsymbol{C}}\|+\beta_3)\|\bar{\boldsymbol{x}}(t)\|\\&\leqslant(\|\boldsymbol{C}\|+\beta_3)\delta_1\|\bar{\boldsymbol{x}}_0\|\mathrm{e}^{\alpha t_0}\mathrm{e}^{[-\alpha+\delta_1(2\beta_1+2\beta_2\|\boldsymbol{K}\|+\beta_3\|\boldsymbol{L}\|)]t}.\end{aligned}$$

由于 $(\|\boldsymbol{C}\|+\beta_3)\delta_1\|\bar{\boldsymbol{x}}_0\|\mathrm{e}^{\alpha t_0}$ 有界, 且

$$\alpha>\delta_1(2\beta_1+2\beta_2\|\boldsymbol{K}\|+\beta_3\|\boldsymbol{L}\|),$$

必有 $t\to\infty$ 时, $\|\boldsymbol{y}(t)\|\to 0$, 即系统稳定. 定理证毕.

不等式 (6.7.25) 只是闭环系统稳定的充分条件. 也就是说: 即使式 (6.7.25) 不成立, 我们也不能说闭环系统不稳定.

**鲁棒观测器–控制器的设计步骤**

(1) 假设系统标称模型的参数 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 已知, 找出系统参数摄动 $\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$、$\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u})$ 和 $\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$ 的上界系数 $\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$.

(2) 给定矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的特征值 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,2n)$, 即期望的状态反馈闭环系统的极点和观测器极点, 确定 $\alpha$.

(3) 对于无重根情形, 取最靠近虚轴的特征值的实部为 $-\alpha$.

(4) 根据极点配置方法, 求出观测器–控制器的状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和观测器增益矩阵 $\boldsymbol{L}$, 也就是使 $|s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})|$ 和 $|s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC})|$ 的零点位于指定的期望极点位置, 从而确定 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{K}$.

(5) 检查鲁棒稳定性条件 $\alpha>\delta_1(2\beta_1+2\beta_2\|\boldsymbol{K}\|+\beta_3\|\boldsymbol{L}\|)$, 若成立转到第 (7) 步; 否则继续执行第 (6) 步.

(6) 将已给出的负数特征值沿 $x$ 轴左移, 即 $\lambda_i:=\lambda_i+\Delta\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,2n)$, 其中 $\Delta\lambda_i$ 为一适当负数, 再转到第 (3) 步.

(7) 由式 (6.7.9)、式 (6.7.10) 确定鲁棒观测器–控制器闭环系统方程.

在有参数摄动的情况下, 介绍了多变量系统鲁棒观测器–控制器的设计方法. 这种方法适用于具有线性与非线性参数摄动模型, 运用 Gronwall 引理导出了鲁棒稳定性条件, 并通过选取适当的观测器–控制器参数 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 来满足鲁棒稳定要求, 这给参数摄动系统的鲁棒观测器–控制器的设计提供了新的途径.

## 6.8 多变量系统解耦

对于多输入多输出系统, 由于不同输入输出间存在耦合, 一个输入要影响多个输出, 一个输出要受到多个输入的影响, 使得多变量系统的分析和设计变得非常复杂. 一种方法是设计解耦补偿器进行解耦, 将一个多变量系统变为多个单输入单输出系统, 使得一个输入只影响一个输出 (解耦系统要求输入输出数相同), 这样控制器设计就变简单了, 可以按照单输入单输出系统进行设计. 本节讨论串联解耦方法 (即前馈补偿器解耦) 和反馈解耦方法.

### 6.8.1 前馈补偿器解耦

前馈补偿器解耦是通过串联前馈补偿器, 使得串联后系统的传递函数阵为对角阵. 串联解耦系统如图 6.8.1 所示, 其中 $\boldsymbol{G}(s)\in\mathbb{R}^{r\times r}$ 为待解系统的传递矩阵, $\boldsymbol{G}_c(s)\in\mathbb{R}^{r\times r}$ 为前馈补偿器的传递矩阵, $\boldsymbol{U}(s)\in\mathbb{R}^r$ 为控制输入向量、$\boldsymbol{R}(s):=[R_1(s),\ R_2(s),\ \cdots,\ R_r(s)]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^r$ 为参考输入向量、$\boldsymbol{Y}(s):=[Y_1(s),\ Y_2(s),\ \cdots,\ Y_r(s)]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^r$ 为输出向量.

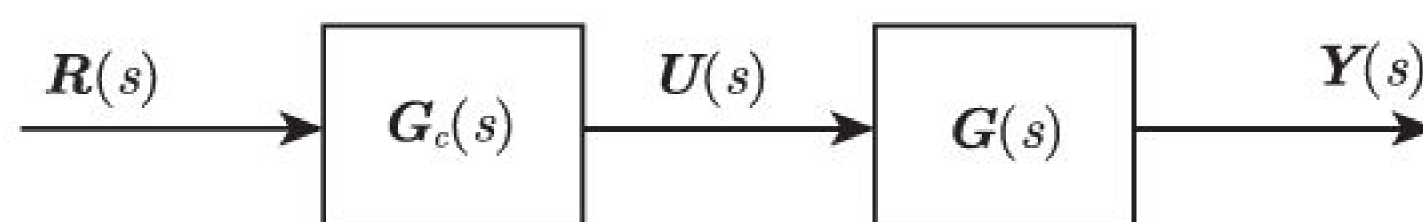



图 6.8.1 前馈补偿器解耦框图

由于串联系统的传递矩阵等于两个传递矩阵的乘积, 所以前馈补偿解耦后传递矩阵为

$$\boldsymbol{G}_b(s)=\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_c(s). \tag{6.8.1}$$

解耦后系统传递矩阵 $\boldsymbol{G}_b(s)$ 应为对角阵, 假设为

$$\boldsymbol{G}_b(s)=\begin{pmatrix} G_1(s) & & & \\ & G_2(s) & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_r(s) \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{r\times r}, \tag{6.8.2}$$

其中 $G_i(s)\in\mathbb{R}$ 是真有理分式 (真有理分式指分子次数不高于分母次数, 严格真有理分式指分子次数小于分母次数). 真有理分式传递函数是可实现的.

在 $\boldsymbol{G}_b(s)$ 为对角阵情况下, 解耦后系统的输入输出关系为

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_r(s) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} G_1(s) & & & \\ & G_2(s) & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_r(s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \\ \vdots \\ R_r(s) \end{pmatrix}.$$

其等价为

$$Y_i(s)=G_i(s)R_i(s),\quad i=1,2,\cdots,r.$$

由此可以看出: 每个输入 $R_i(s)$ 只影响一个输出 $Y_i(s)$, 解耦后系统变成为 $r$ 个单输入单输出系统, 因此解耦后系统可以按照单输入单输出系统进行分析和综合.

不同于常数矩阵的秩的定义, 函数矩阵的秩定义为行列式不恒为零的最大子矩阵的维数. 函数方阵满秩指其行列式不恒为零. 例如, $|\boldsymbol{G}(s)|=\dfrac{s-1}{(s+1)(s+2)}$ 的矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 是满秩的 (是可逆的).

因为两个矩阵乘积的秩等于两个矩阵秩中最小一个. 根据式 (6.8.1) 可知, 串联解耦必须要求对象传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 是可逆的. 在这种条件下, 可求得前馈补偿器的传递矩阵:

$$\boldsymbol{G}_c(s)=\boldsymbol{G}^{-1}(s)\boldsymbol{G}_b(s)\in\mathbb{R}^{r\times r}. \tag{6.8.3}$$

要使前馈补偿器是可实现的, 要求传递矩阵 $\boldsymbol{G}_c(s)$ 是真有理分式或**严格真有理分式** (Strictly Proper Rational Fraction).

**例 6.8.1** 设一个 2 输入 2 输出系统如图 6.8.2 所示, 系统的传递函数矩阵为

$$\boldsymbol{G}(s)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+2} \end{pmatrix}.$$

设计前馈补偿器 $\boldsymbol{G}_c(s)$ 使解耦系统的传递函数矩阵为

$$\boldsymbol{G}_b(s)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2s+1} \end{pmatrix}.$$

**解** 将待解耦系统传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 和期望得到的传递矩阵 $\boldsymbol{G}_b(s)$ 代入式 (6.8.3), 可求得串联补偿器的传递矩阵:

$\boldsymbol{G}_c(s)=\boldsymbol{G}^{-1}(s)\boldsymbol{G}_b(s)$

$$
= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2s+1} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -\dfrac{(s+1)(s+2)}{s} & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{s+2}{s} & \dfrac{s+2}{2s+1} \end{pmatrix}.
$$

用前馈补偿器实现解耦的结构如图 6.8.3 所示.

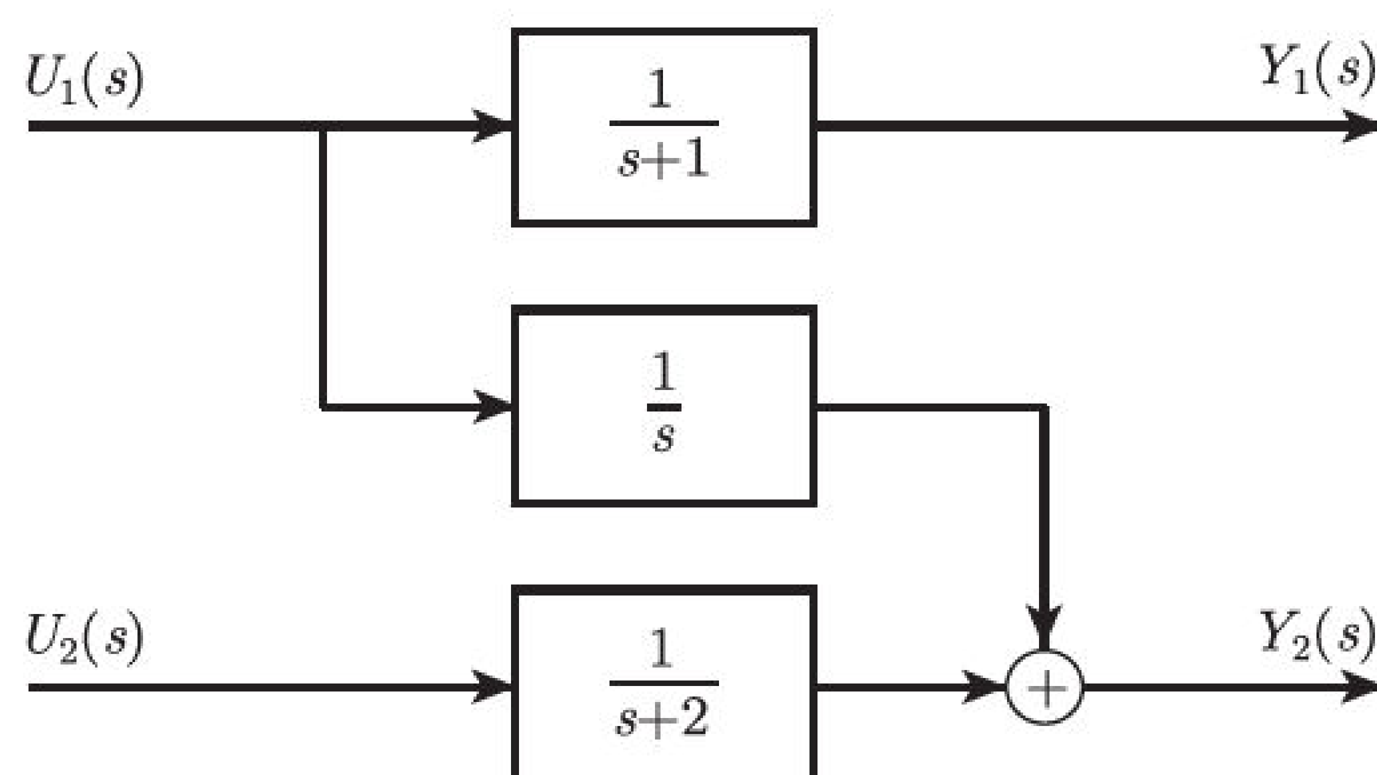



图 6.8.2 系统结构图

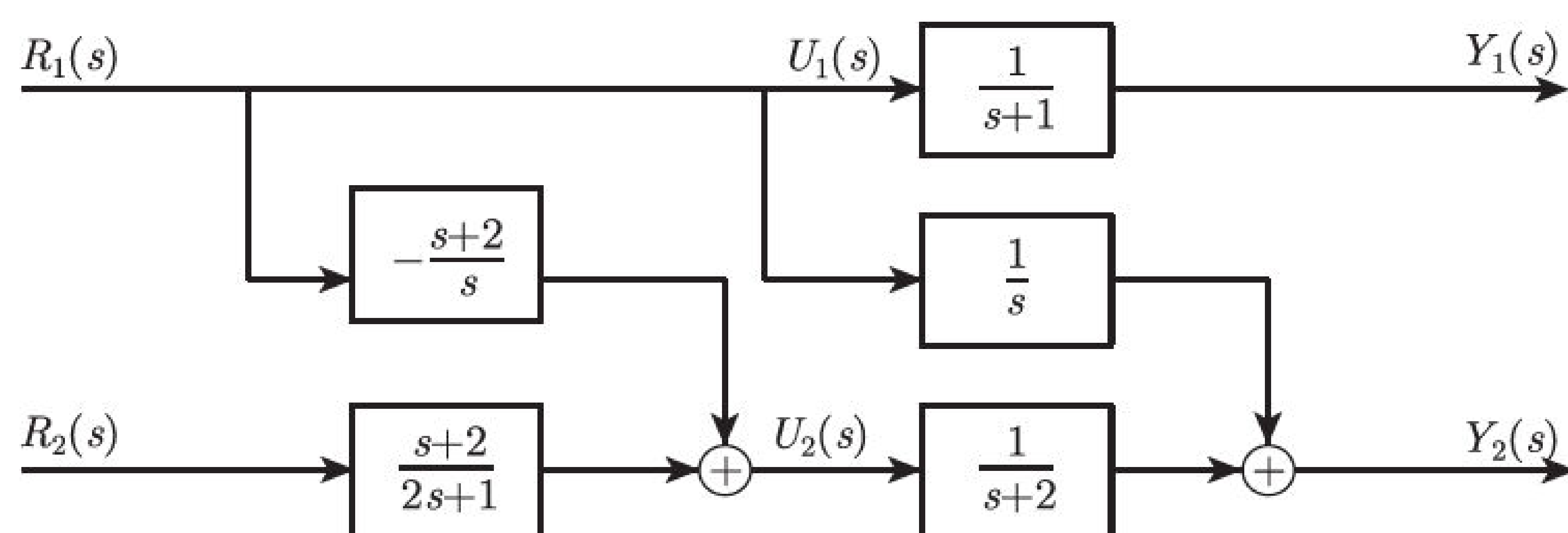



图 6.8.3 用前馈补偿器实现解耦的系统结构图

### 6.8.2 单位反馈前向通道补偿器解耦

在使用反馈解耦时, 补偿器可以位于前向通道, 串联于对象前端, 反馈增益为单位阵, 即单位负反馈, 这种解耦称为 **单位反馈前向通道补偿器解耦**. 当补偿器位于反馈通道上, 就称为 **反馈通道补偿器解耦**. 如果前向通道和反馈通道都有补偿器, 就称为 **前向通道反馈通道补偿器解耦**.

单位反馈前向通道补偿器解耦是在开环传递函数矩阵前串联补偿器, 使最终的单位负反馈系统的闭环传递函数矩阵为对角阵. 在图 6.8.4 所示系统中, $\boldsymbol{G}(s)$ 为给定的开环传递矩阵, $\boldsymbol{G}_c(s)$ 为串联补偿器. 解耦目标就是确定补偿器 $\boldsymbol{G}_c(s)$, 使得从参考输入 $\boldsymbol{R}(s) \in \mathbb{R}^r$ 到系统输出 $\boldsymbol{Y}(s) \in \mathbb{R}^r$ 的闭环传递矩阵 $\boldsymbol{G}_b(s)$ 为对角有理分式传递函数矩阵.

与图 6.8.1 相比, 图 6.8.4 将系统的输出信号 $\boldsymbol{Y}(s)$ 反馈到输入端, 并与参考输入信号 $\boldsymbol{R}(s)$ 进行比较, 使用 $\boldsymbol{R}(s) - \boldsymbol{Y}(s)$ 驱动补偿器 $\boldsymbol{G}_c(s)$ 的输出再作为控制信号 $\boldsymbol{U}(s)$, 因此, 我们有关系

$$
\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_c(s)\boldsymbol{E}(s) \tag{6.8.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_c(s)[\boldsymbol{R}(s) - \boldsymbol{Y}(s)] \\
&= \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_c(s)\boldsymbol{R}(s) - \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_c(s)\boldsymbol{Y}(s),
\end{aligned}
$$

或

$$[\boldsymbol{I}_r + \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_c(s)]\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_c(s)\boldsymbol{R}(s).$$

由此可得从参考输入 $\boldsymbol{R}(s) \in \mathbb{R}^r$ 到输出 $\boldsymbol{Y}(s) \in \mathbb{R}^r$ 的闭环传递矩阵

$$\boldsymbol{G}_b(s) = [\boldsymbol{I}_r + \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_c(s)]^{-1}\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_c(s).$$

通常的做法是假定 $\boldsymbol{G}_b(s)$ 是给定的有理分式对角传递函数矩阵，再通过上式求得补偿器 $\boldsymbol{G}_c(s)$.

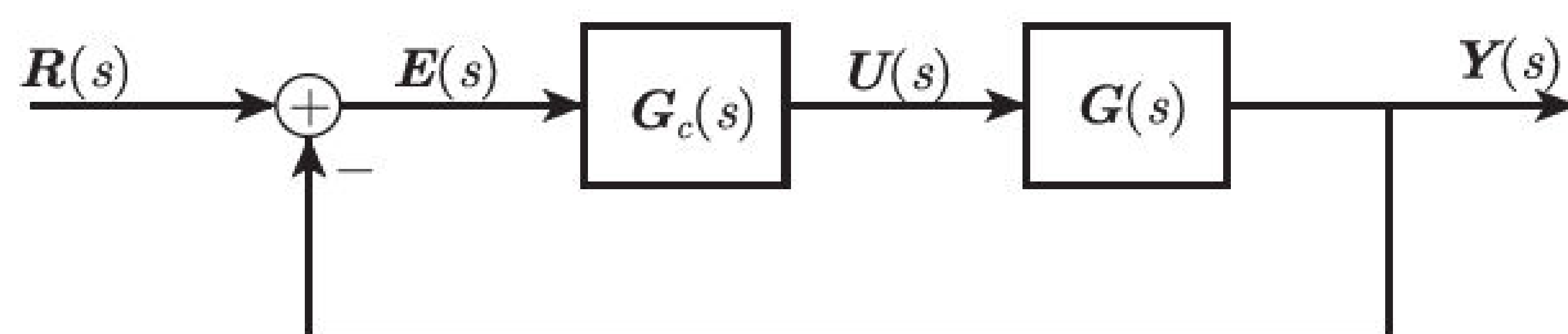



图 6.8.4　前向通道—串联补偿器解耦框图

将上式两端左乘 $[\boldsymbol{I}_r + \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_c(s)]$ 得

$$[\boldsymbol{I}_r + \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_c(s)]\boldsymbol{G}_b(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_c(s).$$

移项经整理得到

$$\boldsymbol{G}_b(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_c(s)[\boldsymbol{I}_r - \boldsymbol{G}_b(s)].$$

故补偿器的传递函数矩阵为

$$\boldsymbol{G}_c(s) = \boldsymbol{G}^{-1}(s)\boldsymbol{G}_b(s)[\boldsymbol{I}_r - \boldsymbol{G}_b(s)]^{-1}. \tag{6.8.5}$$

由于 $[\boldsymbol{I}_r - \boldsymbol{G}_b(s)]^{-1}$ 与 $\boldsymbol{G}_b(s)$ 是乘法可交换的，故有

$$\boldsymbol{G}_c(s) = \boldsymbol{G}^{-1}(s)[\boldsymbol{I}_r - \boldsymbol{G}_b(s)]^{-1}\boldsymbol{G}_b(s). \tag{6.8.6}$$

对于给定的传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 和解耦后系统对角传递矩阵 $\boldsymbol{G}_b(s)$，代入式 (6.8.5) 或式 (6.8.6) 可以求得补偿器传递矩阵 $\boldsymbol{G}_c(s)$.

**例 6.8.2**　对于例 6.8.1 的 2 输入 2 输出系统，参见图 6.8.2，开环系统传递函数矩阵为

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+2} \end{pmatrix}.$$

试设计单位反馈前向通道补偿器，使得解耦后系统的传递函数阵为

$$\boldsymbol{G}_b(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2s+1} \end{pmatrix}.$$

**解** 将开环传递函数阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 和期望的传递函数阵 $\boldsymbol{G}_b(s)$ 代入式 (6.8.5) 中, 可计算出前向通道上的串联补偿器:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G}_c(s) &= \boldsymbol{G}^{-1}(s)\boldsymbol{G}_b(s)[\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}_b(s)]^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{s}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{2s}{2s+1} \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -\dfrac{(s+1)(s+2)}{s} & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{s+1}{s} & 0 \\ 0 & \dfrac{2s+1}{2s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -\dfrac{(s+1)(s+2)}{s} & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{s+1}{s} & 0 \\ \dfrac{-(s+1)(s+2)}{s^2} & \dfrac{s+2}{2s} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

加上单位负反馈前向通道串联补偿器后的闭环系统框图如图 6.8.5 所示.

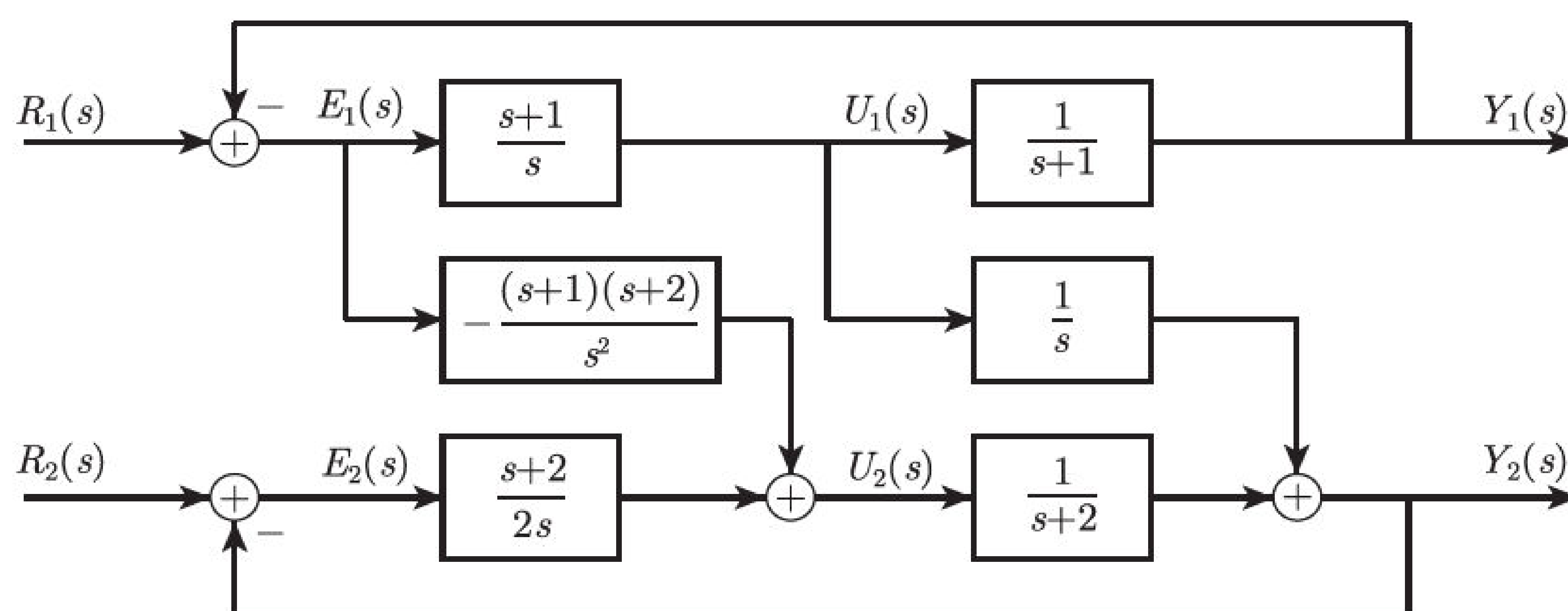



图 6.8.5 单位负反馈前向通道串联补偿器后的闭环系统框图

**例 6.8.3** 假设系统的开环传递函数矩阵为

$$
\boldsymbol{G}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{s+1} & \dfrac{1}{s+4} \\ \dfrac{1}{s+4} & \dfrac{4}{s+2} \end{pmatrix},
$$

其结构框图如图 6.8.6 所示, 试设计单位反馈前向通道控制器, 使解耦后系统闭环传递函数阵为

$$
\boldsymbol{G}_b(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{s+3} & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{s+4} \end{pmatrix}.
$$

**解** 将开环传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 和期望的闭环传递矩阵 $\boldsymbol{G}_b(s)$ 代入式 (6.8.5) 中, 可计算出前向通道上的串联控制器:

$$
\boldsymbol{G}_c(s) = \boldsymbol{G}^{-1}(s)\boldsymbol{G}_b(s)[\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}_b(s)]^{-1}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \dfrac{3}{s+1} & \dfrac{1}{s+4} \\ \dfrac{1}{s+4} & \dfrac{4}{s+2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{s+3} & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{s+4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{s+1}{s+3} & 0 \\ 0 & \dfrac{s+2}{s+4} \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{4(s+1)(s+4)^2}{(s+5)(11s+38)} & -\dfrac{(s+1)(s+2)(s+4)}{(s+5)(11s+38)} \\ -\dfrac{(s+1)(s+2)(s+4)}{(s+5)(11s+38)} & \dfrac{3(s+2)(s+4)^2}{(s+5)(11s+38)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{s+3} & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{s+4} \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} \dfrac{s+3}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{s+4}{s+2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{4(s+1)(s+4)^2}{(s+5)(11s+38)} & -\dfrac{(s+1)(s+2)(s+4)}{(s+5)(11s+38)} \\ -\dfrac{(s+1)(s+2)(s+4)}{(s+5)(11s+38)} & \dfrac{3(s+2)(s+4)^2}{(s+5)(11s+38)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{s+2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{8(s+4)^2}{(s+5)(11s+38)} & -\dfrac{2(s+1)(s+4)}{(s+5)(11s+38)} \\ -\dfrac{2(s+2)(s+4)}{(s+5)(11s+38)} & \dfrac{6(s+4)^2}{(s+5)(11s+38)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

加上串联补偿器后的系统如图 6.8.7 所示.

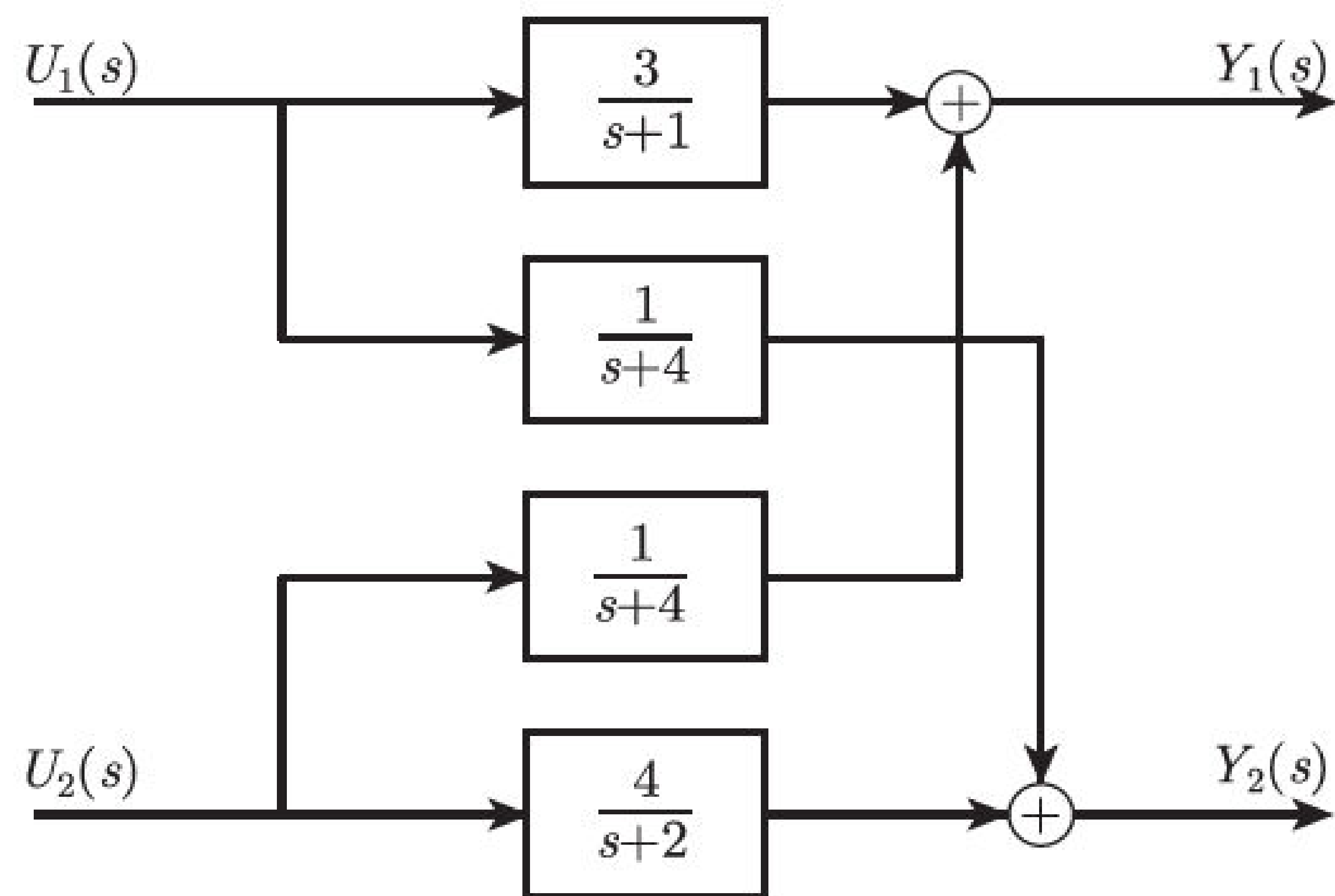



图 6.8.6 开环系统结构图

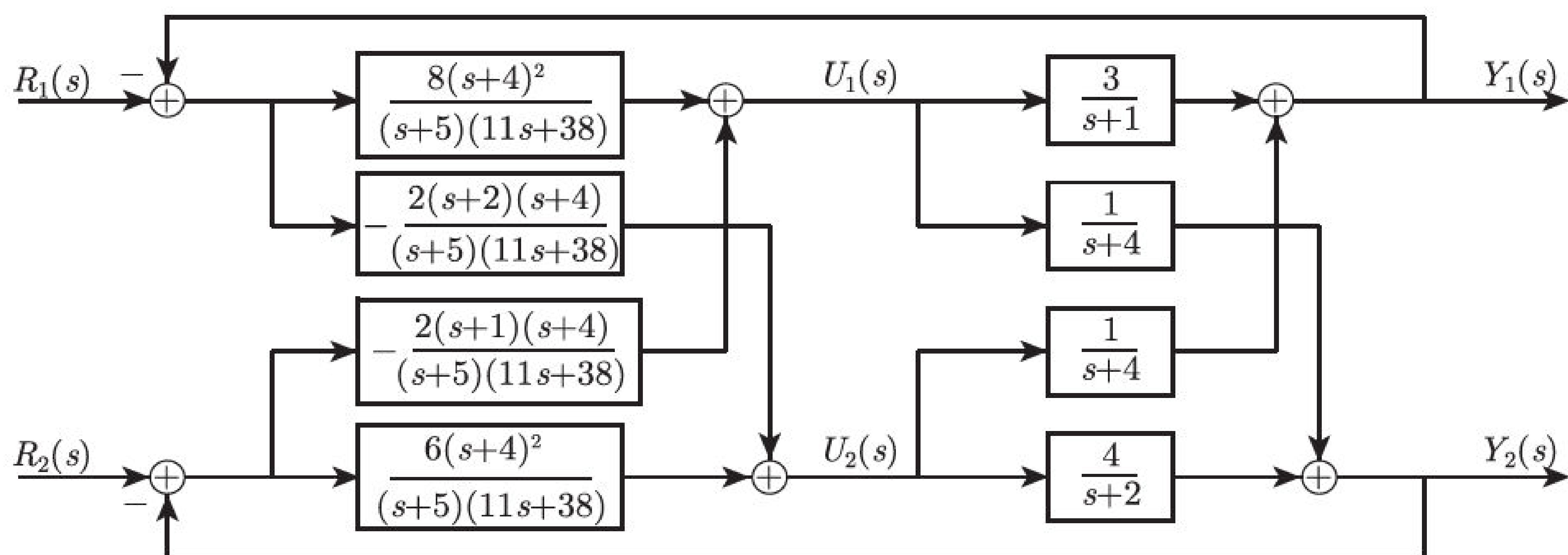



图 6.8.7 前向通道—串联补偿器实现解耦的系统结构图

### 6.8.3 反馈通道补偿器解耦

补偿器可以在前向通道上实现反馈闭环系统解耦控制, 还可以在反馈通道上实现闭环系统解耦控制. 下面讨论反馈通道补偿器解耦设计问题. 图 6.8.8 中 $\boldsymbol{G}(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ 为受控对象的开环传递函数矩阵, $\boldsymbol{H}(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ 为补偿器传递函数矩阵.

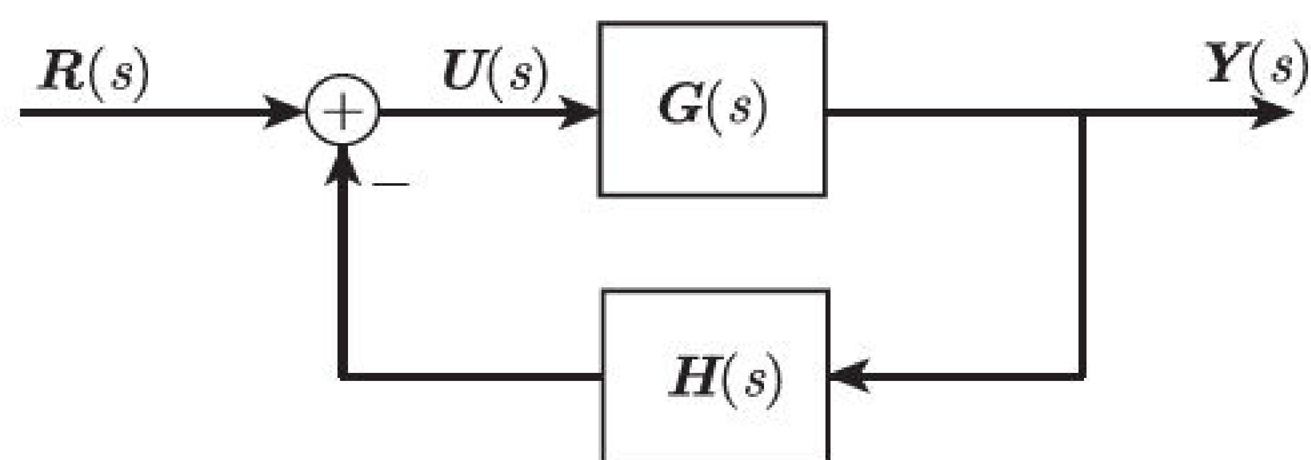



图 6.8.8 反馈补偿器解耦框图

参见 3.7 节, 由图 6.8.8 可得从输入 $\boldsymbol{R}(s)$ 到输出 $\boldsymbol{Y}(s)$ 的传递矩阵:

$$\boldsymbol{G}_b(s) = [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{H}(s)]^{-1}\boldsymbol{G}(s)$$

两边左乘 $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{H}(s)$ 得到

$$[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{H}(s)]\boldsymbol{G}_b(s) = \boldsymbol{G}(s)$$

求解得到

$$\boldsymbol{H}(s) = \boldsymbol{G}_b^{-1}(s) - \boldsymbol{G}^{-1}(s). \tag{6.8.7}$$

由上式可以看出, 解耦补偿器 $\boldsymbol{H}(s)$ 存在且可实现, 要求 $\boldsymbol{G}_b(s)$ 和 $\boldsymbol{G}(s)$ 可逆, 且 $\boldsymbol{G}_b^{-1}(s) - \boldsymbol{G}^{-1}(s)$ 的分子次数不应大于分母次数. 因此, 为了实现反馈通道补偿器解耦, 两个行列式 $|\boldsymbol{G}_b(s)|$ 和 $|\boldsymbol{G}(s)|$ 均为真有理分式: $|\boldsymbol{G}_b(s)|$ 的分子分母次数相同, $|\boldsymbol{G}(s)|$ 的分子分母次数相同.

设给定解耦后系统闭环传递矩阵 $\boldsymbol{G}_b(s)$ 为对角线阵, 将对象开环传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 和 $\boldsymbol{G}_b(s)$ 代入式 (6.8.7) 可求得补偿器 $\boldsymbol{H}(s)$, 从而实现解耦控制.

**例 6.8.4** 假设系统的开环传递矩阵为

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{3s}{s+1} & \dfrac{s}{s+4} \\ \dfrac{s}{s+4} & \dfrac{4s}{s+2} \end{pmatrix}$$

试在反馈通道上设计一个补偿器 $\boldsymbol{H}(s)$, 使得解耦后系统的闭环传递函数矩阵为

$$\boldsymbol{G}_b(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{s}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{s}{s+2} \end{pmatrix}.$$

**解** 将开环传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 和闭环传递函数 $\boldsymbol{G}_b(s)$ 代入式 (6.8.7) 中, 可知补偿器的传递矩阵为

$$\boldsymbol{H}(s) = \boldsymbol{G}_b^{-1}(s) - \boldsymbol{G}^{-1}(s)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{s}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s}{s+2} \end{pmatrix}^{-1} - \begin{pmatrix} \frac{3s}{s+1} & \frac{s}{s+4} \\ \frac{s}{s+4} & \frac{4s}{s+2} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{s+2}{s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4(s+1)(s+4)^2}{s(s+5)(11s+38)} & -\frac{(s+1)(s+2)(s+4)}{s(s+5)(11s+38)} \\ -\frac{(s+1)(s+2)(s+4)}{s(s+5)(11s+38)} & \frac{3(s+2)(s+4)^2}{s(s+5)(11s+38)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(s+1)(7s^2+61s+126)}{s(s+5)(11s+38)} & \frac{(s+1)(s+2)(s+4)}{s(s+5)(11s+38)} \\ \frac{(s+1)(s+2)(s+4)}{s(s+5)(11s+38)} & \frac{(s+2)(8s^2+69s+142)}{s(s+5)(11s+38)} \end{pmatrix}.$$

### 6.8.4　前向通道反馈通道补偿器解耦

前面的研究说明: 在一定条件下, 单位反馈前向通道串联补偿器可以解耦, 反馈通道补偿器也可以解耦. 从待定补偿器自由度数目看, 如果前向通道和反馈通道有两个补偿器 $\boldsymbol{G}_c(s)$ 和 $\boldsymbol{H}(s)$, 肯定可以使前向通道反馈通道补偿器解耦控制, 如图 6.8.9 所示, $\boldsymbol{G}(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ 为开环系统传递函数阵, $\boldsymbol{G}_c(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ 为前项通道串联补偿器传递函数, $\boldsymbol{H}(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ 为反馈通道补偿器传递矩阵.

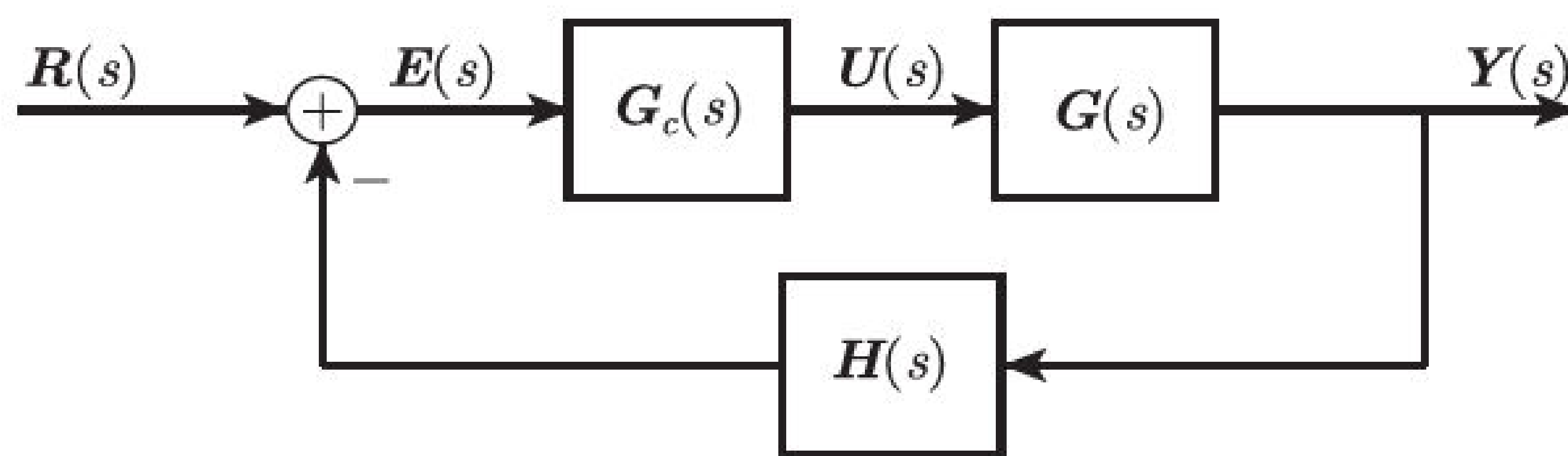



图 6.8.9　一般情况解耦框图

根据图中输入输出关系, 可求得闭环传递函数为

$$\boldsymbol{G}_b(s) = [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_c(s)\boldsymbol{H}(s)]^{-1}\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_c(s).$$

上式两端均左乘 $[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_c(s)\boldsymbol{H}(s)]$ 得

$$[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_c(s)\boldsymbol{H}(s)]\boldsymbol{G}_b(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_c(s). \tag{6.8.8}$$

对于给定的开环传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 和解耦后的闭环系统对角传递矩阵 $\boldsymbol{G}_b(s)$, 上式有两个待定矩阵 $\boldsymbol{G}_c(s)$ 和 $\boldsymbol{H}(s)$, 自由度大了, 可以先选定一个, 再求另一个.

一种方法是先给定 $\boldsymbol{H}(s)$, 后求 $\boldsymbol{G}_c(s)$. 由式 (6.8.8) 可得

$$\boldsymbol{G}_b(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{G}_c(s)[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{G}_b(s)]$$

故求得串联补偿器 $\boldsymbol{G}_c(s)$ 为

$$\boldsymbol{G}_c(s) = \boldsymbol{G}^{-1}(s)\boldsymbol{G}_b(s)[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{G}_b(s)]^{-1} \tag{6.8.9}$$

将给定的开环传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$, 解耦后的闭环系统对角传递矩阵 $\boldsymbol{G}_b(s)$, 以及先确定的 $\boldsymbol{H}(s)$ 代入上式可计算得到前向通道串联补偿器 $\boldsymbol{G}_c(s)$. 注: 可以反复给不同的、可实现的 $\boldsymbol{H}(s)$, 使得 $\boldsymbol{G}_c(s)$ 简单可实现.

## 6.9 思考题

1. 设系统的前向通道传递函数为

   $$G(s)=\frac{1}{s(s-1)},$$

   采用比例–积分输出负反馈:

   $$H(s)=k+\frac{a}{s},$$

   试确定参数 $k$ 和 $a$, 使得期望的闭环系统极点为 $-1\pm\mathrm{j}$. 问闭环系统可否任意配置极点?

2. 假设系统传递函数为

   $$G(s)=\frac{1}{s^2+4s+3},$$

   设计状态反馈, 使闭环系统的极点为 $-2+\mathrm{j}$ 和 $-2-\mathrm{j}$.

3. 假设系统传递函数为

   $$G(s)=\frac{1}{s^2-4s+3},$$

   设计状态反馈, 使闭环系统的极点为 $-2+\mathrm{j}$ 和 $-2-\mathrm{j}$.

4. 传递函数

   $$G(s)=\frac{s+1}{s^2+4s+3}$$

   有一个二阶的控制器规范型实现, 设计状态反馈, 使闭环系统的极点为 $-2+\mathrm{j}$ 和 $-2-\mathrm{j}$. 若该传递函数用一个二阶的观测器规范型实现, 设计状态反馈, 可否将闭环系统极点配置在 $-2+\mathrm{j}$ 和 $-2-\mathrm{j}$?

5. 假设系统的状态方程为

   $$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=[5,\ 6]\boldsymbol{x}(t),\end{cases}$$

   设计状态反馈使系统极点为 $-1\pm\mathrm{j}$.

6. 假设系统传递函数为

   $$G(s)=\frac{1}{s^2+4s+3},$$

   设计状态观测器, 使观测器的极点为 $-2$ 和 $-2$. 假设初始条件为

   $$\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{x}}(0)=\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix},$$

   输入分别为单位脉冲和单位阶跃函数, 计算状态估计误差:

   $$J=\int_0^{\infty}[\hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)]^{\mathrm{T}}[\hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)]\mathrm{d}t.$$

   又假设观测器极点为 $-20$ 和 $-20$, 重新计算.

7. 假设系统传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s^2-4s+3},$$

设计状态观测器, 使观测器的极点为 $-2$ 和 $-2$. 假设初始条件为

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{x}}(0)=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},$$

输入分别为单位脉冲和单位阶跃函数, 计算状态估计误差:

$$J=\int_0^{\infty}[\hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)]^{\mathrm{T}}[\hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)]\mathrm{d}t.$$

又假设观测器极点为 $-20$ 和 $-20$, 重新计算.

8. 假设系统的状态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=[2,\ 1]\boldsymbol{x}(t),\end{cases}$$

设计状态观测器, 使系统极点为 $-1\pm\mathrm{j}$.

9. 假设系统的状态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=[1,\ 2]\boldsymbol{x}(t),\end{cases}$$

设计状态观测器, 使系统极点为 $-1\pm\mathrm{j}$.

10. 假设系统的状态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=[0,\ 1]\boldsymbol{x}(t),\end{cases}$$

设计降维状态观测器, 使观测器极点为 $-1$.

11. 假设系统的状态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=[2,\ 1]\boldsymbol{x}(t),\end{cases}$$

假设参考输入 $r(t)$ 为单位阶跃函数, 初始条件为 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

(1) 设计状态反馈 $u(t)=r(t)-\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}(t)$, 使系统的闭环极点为 $-1$ 和 $-1$, 计算闭环系统的输出;

(2) 设计状态观测器, 使观测器的极点为 $-2$ 和 $-2$; 又根据观测器状态 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ 设计状态反馈 $u(t)=r(t)-\boldsymbol{k}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$, 使系统的闭环极点仍为 $-1$ 和 $-1$, 假设观测器初值为 $\hat{\boldsymbol{x}}(0)=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, 计算闭环系统的输出, 绘制两种情况下的输出比较.

(3) 又假设观测器极点为 $-20$ 和 $-20$, 重新计算, 绘制两种情况下的输出比较, 并进行分析, 说明观测器极点位置对系统性能的影响.

12. 设系统的状态空间模型为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}u(t), \quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$y(t)=[4,\ -3]\boldsymbol{x}(t)$,

(1) 输入 $u(t)=1(t)$ 为单位阶跃函数, 求状态向量解和输出. (2) 设计状态反馈 $u(t)=r(t)-\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}(t)$, 使系统极点为 $-1$ 和 $-2$.

13. 假设矩阵 $\boldsymbol{A}_{11}\in\mathbb{F}^{n_1\times n_1}$, $\boldsymbol{A}_{22}\in\mathbb{F}^{n_2\times n_2}$, $\boldsymbol{A}_{12}\in\mathbb{F}^{n_1\times n_2}$, 证明等式:

$$\begin{vmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{0} & s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{22} \end{vmatrix}=|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{12}||s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{22}|.$$

14. 假设矩阵 $\boldsymbol{A}_{11}\in\mathbb{F}^{n_1\times n_1}$ 和 $\boldsymbol{A}_{22}\in\mathbb{F}^{n_2\times n_2}$ 可逆, $\boldsymbol{A}_{12}\in\mathbb{F}^{n_1\times n_2}$, 证明等式:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{-1} & -\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

15. 设 $\boldsymbol{G}\in\mathbb{R}^{m\times r}$, $\boldsymbol{H}\in\mathbb{R}^{r\times m}$, $[\boldsymbol{I}_r+\boldsymbol{H}\boldsymbol{G}]$ 是可逆矩阵. 证明 $[\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}]$ 是可逆矩阵, 且

$$\boldsymbol{G}[\boldsymbol{I}_r+\boldsymbol{H}\boldsymbol{G}]^{-1}=[\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}]^{-1}\boldsymbol{G}.$$

第 7 章
CHAPTER 7

# 李雅普诺夫稳定性分析

判断线性时不变系统的稳定性相对比较容易, 而判断非线性系统和非线性时变系统的稳定性可能非常困难, 甚至是不可能的. 李雅普诺夫稳定性理论是分析非线性系统稳定性的强有力工具, 是分析一些非线性系统稳定性的一种有效方法. 但是在确定许多非线性系统的稳定性时, 需要用到特殊的技巧和经验. 本章仅简单讨论几种非线性系统的稳定性分析方法. 内容包括李雅普诺夫稳定性理论、线性时不变系统的李雅普诺夫稳定性分析.

## 7.1 系统平衡状态与稳定性定义

控制系统的稳定性分析是极其重要的. 线性时不变系统的稳定性有很多判据方法, 如奈奎斯特稳定性判据和劳斯稳定性判据等. 但它们不适用于非线性系统、线性时变系统、非线性时变系统.

李雅普诺夫第二方法 (也称李雅普诺夫直接法) 是确定非线性系统和 (或) 时变系统的一般方法. 这种方法也适用于线性时不变系统的稳定性分析, 适用于解二次型最佳控制问题.

下面介绍一些预备知识: 不同类型系统稳定性的定义、纯量函数的概念、李雅普诺夫第二方法的主稳定性定理、李雅普诺夫函数、李雅普诺夫第二方法应用于线性定常系统的稳定性分析.

### 7.1.1 系统的平衡状态

1892 年, 李雅普诺夫提出了两种方法 (称为第一方法和第二方法) 用于确定由常微分方程描述动力学系统的稳定性. 第一种方法是用微分方程的解进行系统分析. 第二种方法不需求出微分方程的解, 也就是说, 李雅普诺夫第二方法可以在不解出状态方程解的条件下, 确定系统的稳定性. 这种方法研究非线性系统和 (或) 非线性时变系统的稳定性显示出很大的优越性.

尽管李雅普诺夫第二方法分析非线性系统的稳定性有其局限性, 特别是选择李雅普诺夫函数的困难, 但它仍然是研究确定一些非线性系统稳定性的有效方法.

考虑非线性时变系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t), \tag{7.1.1}$$

式中 $\boldsymbol{x} := [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ 为 $n$ 维状态向量, 它是时间 $t$ 的函数, 即 $\boldsymbol{x}(t) := [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$; $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ 是变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 $t$ 的 $n$ 维函数向量.

假设在给定的初始条件下, 方程 (7.1.1) 有唯一解. 用 $\boldsymbol{\phi}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ 表示这个唯一解, 即 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$. 当 $t = t_0$ 时, 记 $\boldsymbol{x}_0 := \boldsymbol{x}(t_0)$. 于是有 $\boldsymbol{\phi}(t_0; \boldsymbol{x}_0, t_0) = \boldsymbol{x}_0$.

注：本章主要内容根据《现代控制工程》(绪方胜彦著, 科学出版社, 1984) 相关章节发展而成.

在系统 (7.1.1) 中, 如果存在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_e$, 使得对所有 $t$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_e, t) = \boldsymbol{0}$ 成立, 就称 $\boldsymbol{x}_e$ 为系统的**平衡状态** (Equilibrium State).

对于线性时不变系统: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 则当 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵时, 系统只存在一个平衡状态 $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$; 当 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵时, 系统存在无穷多个平衡状态. 对于非线性系统, 可有一个或多个平衡状态. 平衡状态是根据方程 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_e, t) = \boldsymbol{0}$ 确定.

任意一个孤立的平衡状态 (即彼此孤立的平衡状态) 都可通过坐标变换, 移到坐标原点处, 即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}, t) = \boldsymbol{0}$, 因为只需令 $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e$, 就移到坐标原点. 因此一般就讨论在原点处的平衡状态的稳定性.

### 7.1.2 稳定性的定义

#### 1. 李雅普诺夫意义下的稳定性

用 $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e\| \leqslant r$ 表示平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 为球心、半径为 $r$ 的球型区域, $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e\|$ 称为 **欧几里得范数** (Euclidean Norm), 定义为

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e\| := [(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \cdots + (x_n - x_{ne})^2]^{1/2}.$$

设 $S(\delta)$ 包含使 $\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_e\| \leqslant \delta$ 的所有点的一个球域, 而 $S(\epsilon)$ 包含使 $\|\boldsymbol{\phi}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0) - \boldsymbol{x}_e\| \leqslant \epsilon$ 的所有点的一个球域 (对所有 $t$). 如果对应于每一个 $S(\epsilon)$, 存在一个 $S(\delta)$, 使得当 $t$ 趋于无穷时, 从 $S(\delta)$ 里出发的轨迹不脱离 $S(\epsilon)$, 则称系统 (7.1.1) 的平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 是李雅普诺夫意义下的稳定. 实数 $\delta$ 与 $\epsilon$ 有关, 通常也与 $t_0$ 有关. 如果 $\delta$ 与 $t_0$ 无关, 则这种平衡状态称为**一致稳定的平衡状态**. 这种稳定性类似于数学极限中的 $\epsilon - \delta$ 说法.

即选择一个域 $S(\epsilon)$, 对应于每一个 $S(\epsilon)$, 必存在一个域 $S(\delta)$, 使得当 $t$ 趋于无穷时, 从 $S(\delta)$ 里出发的轨迹总不脱离域 $S(\epsilon)$, 系统就是李雅普诺夫意义下的稳定.

#### 2. 渐近稳定性

如果平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 在李雅普诺夫意义下是稳定的, 且从域 $S(\delta)$ 里出发的任一条轨迹, 当时间 $t$ 趋于无穷时, 都不脱离 $S(\epsilon)$, 且收敛于 $\boldsymbol{x}_e$, 则系统 (7.1.1) 平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 称为 **渐近稳定** (Asymptotical Stability).

渐近稳定性收敛于平衡点, 它比前述的纯稳定性更重要. 由于渐近稳定性是一个局部概念, 所以简单地确定渐近稳定性并不意味着系统能正常工作. 通常有必要确定渐近稳定性的最大范围. 该最大范围称为吸引域. 它是发生渐近稳定轨迹的那部分状态空间. 换句话说, 发生于吸引域内的每一个轨迹都是渐近稳定的.

#### 3. 大范围渐近稳定性

如果从所有的状态 (状态空间中的所有点) 出发的轨迹都是渐近稳定的, 则平衡状态称为大范围渐近稳定. 也就是说, 如果式 (7.1.1) 描述的系统是稳定的, 并且它的每一个解在 $t$ 趋于无穷时都收敛于 $\boldsymbol{x}_e$, 则系统的平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 称为大范围渐近稳定的. 显然, 大范围渐近稳定性的必要条件是在整个状态空间中只有一个平衡状态.

在控制工程问题中, 总希望系统具有大范围渐近稳定的特性. 如果平衡状态不是大范围渐近稳定的, 那么问题就转化为确定渐近稳定的最大范围, 这通常非常困难. 然而, 对所有的实际问题, 如果能确定一个渐近稳定范围足够大, 以致扰动不会超过它就可以了.

**4. 不稳定性**

如果对于某个实数 $\epsilon > 0$ 和任何一个实数 $\delta > 0$, 不管这两个实数多么小, 在 $S(\delta)$ 内总存在一个状态 $\boldsymbol{x}_0$, 使得始于这一状态的轨迹最终会脱离开 $S(\epsilon)$, 那么平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 称为不稳定的.

**5. 稳定性、渐近稳定性和不稳定性的图示**

用图形表示, 可使上述稳定性概念更为清晰. 下面研究二维平面的情况. 图 7.1.1 (a)、(b) 和 (c) 分别表示平衡状态及对应于稳定性、渐近稳定性和不稳定性的典型轨迹. 在图 7.1.1 中, 域 $S(\delta)$ 制约着初始状态 $\boldsymbol{x}_0$, 而域 $S(\epsilon)$ 是起始于 $\boldsymbol{x}_0$ 的轨迹的边界.

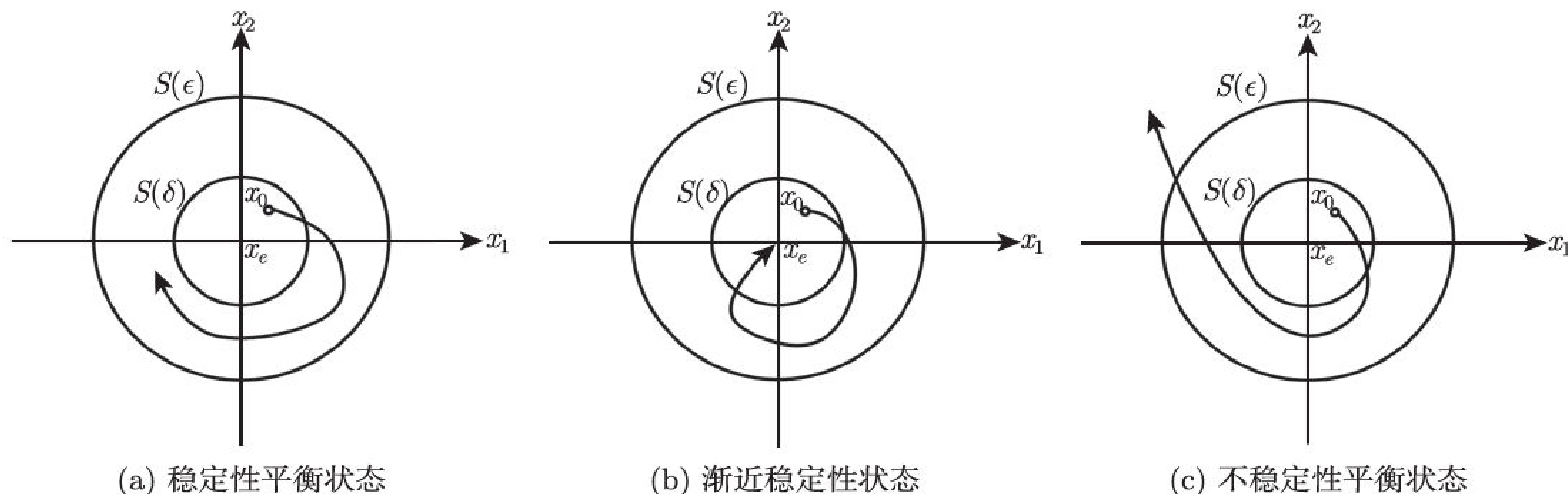



图 7.1.1 稳定性、渐近稳定性和不稳定性的图示

注意, 由于上述定义不能详细地说明可容许初始条件的精确域, 因而除非 $S(\epsilon)$ 对应于整个状态平面, 否则这些定义只能应用于平衡状态的邻域.

注意, 在图 7.1.1 (c) 中, 轨迹离开了 $S(\epsilon)$, 这说明平衡状态是不稳定的. 然而却不能说明轨迹将趋于无穷远处, 这是因为轨迹还可能趋于在 $S(\epsilon)$ 外的某个极限环 (如果线性定常系统是不稳定的, 则在不稳定平衡状态附近出发的轨迹将趋于无穷远. 但在非线性系统中, 这并不一定正确).

上述各定义的内容, 对于理解本章介绍的线性和非线性系统的稳定性分析, 是最低限度要求. 注意, 这些定义不是确定平衡状态稳定性概念的唯一方法. 实际上, 其他文献中有另外的定义. 例如, 在经典控制理论中, 只有渐近稳定的系统才称为稳定的系统; 那么在李雅普诺夫意义下是稳定的, 但不是渐近稳定的系统则叫做不稳定系统.

### 7.1.3 纯量函数的性态

**1. 纯量函数的正定性**

如果对所有在域 $\boldsymbol{\Omega}$ 中的非零状态 $\boldsymbol{x}$, 有 $V(\boldsymbol{x}) > 0$, 在 $\boldsymbol{x} = 0$ 处有 $V(\boldsymbol{0}) = 0$, 则在域 $\boldsymbol{\Omega}$ (域 $\boldsymbol{\Omega}$ 包含状态空间的原点) 内的纯量函数 $V(\boldsymbol{x})$ 称为正定函数.

如果时变函数 $V(\boldsymbol{x}, t)$ 由一个定常的正定函数作为下限, 即存在一个正定函数 $V(\boldsymbol{x})$, 使得对所有 $t \geqslant t_0$, 有 $V(\boldsymbol{x}, t) > V(\boldsymbol{x})$, $V(\boldsymbol{0}, t) = 0$, 则称时变函数 $V(\boldsymbol{x}, t)$ 在域 $\boldsymbol{\Omega}$ ($\boldsymbol{\Omega}$ 包含状态空间原点) 内是正定的.

**2. 纯量函数的负定性**

如果 $-V(\boldsymbol{x})$ 是正定函数, 则纯量函数 $V(\boldsymbol{x})$ 称为负定函数.

**3. 纯量函数的正半定性**

如果纯量函数 $V(\boldsymbol{x})$ 除了原点以及某些状态等于零外, 在域 $\boldsymbol{\Omega}$ 内所有状态都是正定的, 则 $V(\boldsymbol{x})$ 称为正半定纯量函数.

**4. 纯量函数的负半定性**

如果 $-V(\boldsymbol{x})$ 是正半定函数, 则纯量函数 $V(\boldsymbol{x})$ 称为负半定函数.

**5. 纯量函数的不定性**

如果在域 $\boldsymbol{\Omega}$ 内, 不管域 $\boldsymbol{\Omega}$ 多么小, $V(\boldsymbol{x})$ 既可为正值, 也可为负值, 纯量函数 $V(\boldsymbol{x})$ 称为不定的纯量函数.

**例 7.1.1** 纯量函数的例子, 设 $\boldsymbol{x}$ 为二维向量, 有下列结论.

(1) $V(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2$ 是正定的.

(2) $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ 是正定的.

(3) $V(\boldsymbol{x}) = (x_1 + 2x_2)^2$ 是正半定的.

(4) $V(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 - 2(3x_1 - 4x_2)^2$ 是负定的.

(5) $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 10x_1x_2$ 是不定的.

(6) $V(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + \dfrac{2x_2^2}{1+|x_1|}$ 是正定的.

### 7.1.4 二次型函数

用李雅普诺夫第二方法的稳定性分析, 一类纯量函数是很重要的, 即**二次型函数**. 例如,

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{x} := [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ 为实向量, $\boldsymbol{P} := [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为实对称矩阵 ($\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$, $p_{ij} = p_{ji}$).

二次型 $V(\boldsymbol{x})$ 的正定性可用 **西尔维斯特准则** 判断. 该准则指出, 二次型 $V(\boldsymbol{x})$ 为正定的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的所有 **主子行列式** 均为正值, 即

$$p_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \cdots, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

如果上面所有主子行列式大于等于零, $V(\boldsymbol{x})$ 就是正半定的. 如果 $-V(\boldsymbol{x})$ 是正定的, 则 $V(\boldsymbol{x})$ 是负定的. 同样, 如果 $-V(\boldsymbol{x})$ 是正半定的, 则 $V(\boldsymbol{x})$ 是负半定的.

**例 7.1.2** 研究下列二次型的正定性,

$$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

**解** 二次型 $V(\boldsymbol{x})$ 可写为

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3]\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&-1\\-1&-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

利用西尔维斯特准则, 考察其主子行列式:

$$1>0,\quad \begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1>0,\quad \begin{vmatrix}1&1&-1\\1&2&-1\\-1&-1&4\end{vmatrix}=3>0.$$

因为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的所有主子行列式均为正, 所以 $V(\boldsymbol{x})$ 是正定的.

## 7.2 李雅普诺夫第一方法

李雅普诺夫第一方法又称间接法. 它的基本思路是通过系统状态方程的解来判别系统的稳定性. 对于线性定常系统, 只需解出特征方程的根即可判断稳定性, 这是很麻烦的, 简单的方法是利用劳斯判据判断系统特征方程的根是否在左半复平面即可.

对于可近似线性化的非线性系统 (在平衡点邻域存在偏导数), 则可通过线性化处理, 取其一次近似得到线性化方程, 然后再根据其特征根来判断系统的局部稳定性.

### 7.2.1 线性系统的稳定判据

考虑线性时不变系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u,\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0, \tag{7.2.1}$$

$$y=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}+du, \tag{7.2.2}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 为状态向量、$u\in\mathbb{R}$ 为系统输入、$y\in\mathbb{R}$ 为系统输出、$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$、$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$、$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^{1\times n}$、$d\in\mathbb{R}$ 为系统参数.

系统 (7.2.1) 有唯一的平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$, 这个平衡状态渐近稳定的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值均具有负实部.

线性系统的稳定性只与系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有关, 与系统输入 $u$ 无关, 也与控制系数向量 $\boldsymbol{b}$ 和输出系数向量 $\boldsymbol{c}$ 无关, 与轨迹的初始时间 $t_0$ 和初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 无关. 因此线性系统的稳定是大范围渐近稳定的. 也就是说, 当输入为零时, 从任何初始状态出发的轨迹, 随着时间的推移, 都会趋于状态空间的原点; 当输入有界时, 系统的输出也是有界的.

以上讨论的都是指系统的 **状态稳定性**, 或称内部稳定性. 从系统 (7.2.1)~(7.2.2) 方程看, 状态稳定, 输出 $y$ 就稳定. 但从能控性与能观测性角度看, 如果不稳定的状态不能观测, 就不会在输出中体现, 因此不能观测的状态不稳定, 系统的输出也可能是稳定的. 这就引出了系统输出的稳定性. 如果系统对于有界输入 $u$ 所引起的输出 $y$ 是有界的, 则称系统为 **输出稳定** 或称 **有界输入有界输出稳定** (Bounded Input Bounded Output Stability, **BIBO 稳定**).

从以上分析可得结论: 线性时不变系统输出稳定的充分条件是其传递函数

$$G(s)=\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}+d$$

的所有极点都位于 $s$ 的左半平面, 即系统特征方程 $|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$ 的根在左半平面. 下面的例子证实了这一结论.

**例 7.2.1** 设系统的状态空间模型为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}u,$$

$$y=[1,\ 0]\boldsymbol{x}.$$

研究该系统的状态稳定性与输出稳定性.

**解** 对于该系统, 有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

其特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0\\0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)=0.$$

可求得两个特征值 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2$. 故该系统的状态不是渐近稳定的. 系统的传递函数

$$\begin{aligned}G(s)&=\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}+d\\&=[1,\ 0]\begin{pmatrix}s+1&0\\0&s-2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{s-2}{(s+1)(s-2)}=\frac{1}{s+1}.\end{aligned}$$

可见传递函数的极点 $s=-1$ 位于 $s$ 的左半平面, 故系统输出稳定. 这是因为具有正实部的特征值 $\lambda_2=2$ 被系统的零点 $s=2$ 对消了, 所以在系统的输入输出特性中没被表现出来. 由此可见, 只有当系统的传递函数 $G(s)$ 不出现零、极点对消现象时, 即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与系统传递函数 $G(s)$ 的极点相同, 此时系统的状态稳定性才与其输出稳定性相一致.

### 7.2.2 非线性系统的稳定性

设系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t), \tag{7.2.3}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 为状态向量; $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t):=[f_1(\boldsymbol{x},t),f_2(\boldsymbol{x},t),\cdots,f_n(\boldsymbol{x},t)]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$ 为状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 和时间 $t$ 的向量函数, 且对 $\boldsymbol{x}$ 具有连续的偏导数.

设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_e$ 为系统 (7.2.3) 的平衡状态. 为讨论系统在平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_e$ 处的稳定性, 将非线性函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_e$ 邻域内展成泰勒级数:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_e,t)+\frac{1}{1!}\left.\frac{\partial\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)}{\partial\boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_e}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e)+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}), \tag{7.2.4}$$

其中当 $\boldsymbol{x}$ 充分接近 $\boldsymbol{x}_e$ 时, 余项 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$ 为 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e\|$ 的高阶无穷小, 可记作$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}):=o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e)$,

$\dfrac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}$ 为雅可比矩阵 (Jacobian Matrix):

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) := \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

为便于讨论, 这里设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0},t)=\boldsymbol{0}$, 即平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$, 否则可以通过坐标变换将平衡点移到状态空间原点. 在这种假设下, 式 (7.2.4) 变为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{0},t)}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}). \tag{7.2.5}$$

联立式 (7.2.3) 和式 (7.2.5) 可得

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{0},t)}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{7.2.6}$$

如果忽略上式中的高阶项 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$, 就得到一个在平衡点 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 的近似线性化系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 其中近似系统的 **系统矩阵** 为

$$\boldsymbol{A} = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{0},t)}{\partial \boldsymbol{x}} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

对于近似系统 (7.2.6), 李雅普诺夫给出下述结论.

(1) 如果近似系统 (7.2.6) 中系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都具有负实部, 则原非线性系统 (7.2.3) 在平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的, 而且系统的稳定性与 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$ 无关. 注意, 特征值 $\lambda=-\dfrac{1}{t^2+1}$ 不算具有负实部, 因为当 $t\to\infty$ 时, $\lambda\to 0$.

(2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值至少有一个具有正实部, 则原非线性系统的平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

(3) 如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值至少有一个的实部为零, 则系统处于临界情况, 那么原非线性系统的平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 的稳定性将取决于高阶导数项 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$, 而不能由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值符号来确定.

**例 7.2.2** 设系统状态方程为

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1,x_2) = x_1 - 2x_1x_2,$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1,x_2) = -x_2 + 3x_1x_2,$$

试分析系统在平衡状态处的稳定性.

**解** 将 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_e=\begin{pmatrix} x_{1e} \\ x_{2e}\end{pmatrix}$ (常数向量) 代入系统方程得到

$$\dot{x}_{1e} = x_{1e} - 2x_{1e}x_{2e} = 0.$$

$\dot{x}_{2e} = -x_{2e} + 3x_{1e}x_{2e} = 0.$

故系统有两个平衡状态 $\boldsymbol{x}_{e1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{x}_{e2} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{e1}$ 处, 我们有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{e1}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2x_2 & -2x_1 \\ 3x_2 & -1+3x_1 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{e1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$, 有一个正特征值, 可见原非线性系统在 $\boldsymbol{x}_{e1}$ 处是不稳定的.

在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{e2}$ 处, 我们有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1-2x_2 & -2x_1 \\ 3x_2 & -1+3x_1 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{e2}} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{3}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

其特征值为 $\lambda = \pm\sqrt{-1}$, 实部为零, 因而不能由线性化方程得出原系统在 $\boldsymbol{x}_{e2}$ 处稳定性的结论. 这种情况要应用下面将要讨论的李雅普诺夫第二方法进行判定.

**例 7.2.3** 设系统状态方程为

$\dot{x}_1 = f_1(x_1,x_2) = -x_1 - 2x_1x_2,$

$\dot{x}_2 = f_2(x_1,x_2) = -2x_2 + 3x_1x_2,$

试分析系统在平衡状态处的稳定性.

**解** 该系统有两个平衡状态 $\boldsymbol{x}_{e1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{x}_{e2} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/2 \end{pmatrix}$. 在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{e1}$ 处, 我们有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{e1}}$$

$$= \begin{pmatrix} -1-2x_2 & -2x_1 \\ 3x_2 & -2+3x_1 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{e1}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

其两个特征值为 $\lambda_1 = -1$ 和 $\lambda_2 = -2$ 均为负, 故原非线性系统在 $\boldsymbol{x}_{e1}$ 处是稳定的. 在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{e2}$ 处, 我们有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1-2x_2 & -2x_1 \\ 3x_2 & -2+3x_1 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{e2}} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{4}{3} \\ -\dfrac{3}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

其特征值为 $\lambda = \pm\sqrt{2}$, 有一个特征值为正, 故原系统在 $\boldsymbol{x}_{e2}$ 处不稳定.

## 7.3 李雅普诺夫第二方法

经典力学理论告诉我们, 对于一个振动系统, 当系统总能量 (正定函数) 连续减小 (这意味着总能量对时间的导数必然是负定的), 直到平衡状态时为止, 则振动系统是稳定的.

如果系统有一个渐近稳定的平衡状态, 则当其运动到平衡状态的吸引域内时, 系统存储的能量随着时间的增长而衰减, 直到在平稳状态处达到极小值为止. 这就是 **李雅普诺夫第二方法**, 也就是李雅普诺夫主稳定性定理.

### 7.3.1 李雅普诺夫主稳定性定理

对于一些纯数学系统, 根本没有 "能量函数". 为了克服这个困难, 李雅普诺夫引出了一个虚构的能量函数, 称为 **李雅普诺夫函数** (Lyapunov Function). 当然, 这个函数无疑比能量更为一般, 并且其应用也更为广泛. 实际上, 任一纯量函数只要满足李雅普诺夫稳定定理 (见定理 7.3.1 和定理 7.3.2 的假设条件), 都可作为李雅普诺夫函数 (对于简单系统, 可以推测出适当的李雅普诺夫函数; 对于复杂系统, 要想找到李雅普诺夫函数可能十分困难).

李雅普诺夫函数与状态 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和时间 $t$ 有关, 我们用 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ 或者 $V(\boldsymbol{x}, t)$ 来表示李雅普诺夫函数. 如果在李雅普诺夫函数中不含 $t$, 则用 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 或 $V(\boldsymbol{x})$ 表示. 在李雅普诺夫函数第二方法中, $V(\boldsymbol{x}, t)$ 和其对时间的导数 (全导数)

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}, t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V(\boldsymbol{x}, t)}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}$$

的符号特征, 提供了判断平衡状态处的稳定性、渐近稳定性或不稳定性的准则, 而不必直接求出方程的解 (这种方法既适用于线性系统, 也适用于非线性系统).

设 $\boldsymbol{x}$ 为 $n$ 维实向量, 且其纯量函数 $V(\boldsymbol{x})$ 是正定的, 则满足 $V(\boldsymbol{x}) = C$ 的状态 $\boldsymbol{x}$ 处于 $n$ 维状态空间的封闭超曲面上, 且包含状态空间的原点, 式中 $C$ 是正常数. 随着 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$, 上述封闭曲面可扩展为整个状态空间. 如果 $C_1 < C_2$, 则超曲面 $V(\boldsymbol{x}) = C_1$ 完全处于超曲面 $V(\boldsymbol{x}) = C_2$ 的内部.

对于给定的系统, 若可求得正定的纯量函数 $V(\boldsymbol{x})$, 使其沿轨迹对时间的导数总为负值, 则随着时间的增加, $V(\boldsymbol{x})$ 的取值 $C$ 将越来越小. 随着时间的进一步增长, 最终 $V(\boldsymbol{x})$ 变为零, 而 $\boldsymbol{x}$ 也趋于零. 这意味着, 状态空间的原点是渐近稳定的. 李雅普诺夫主稳定性定理就是前述事实的普遍化, 它给出了渐近稳定的充要条件. 该定理总结如下.

**定理 7.3.1 李雅普诺夫主稳定性定理**

假设系统的状态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$, 且对所有 $t$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}, t) = \boldsymbol{0}$. 如果存在一个具有连续一阶偏导数的纯量函数 $V(\boldsymbol{x}, t)$, 且满足以下条件:

① $V(\boldsymbol{x}, t)$ 是正定的,

② $\dot{V}(\boldsymbol{x}, t)$ 是负定的.

则在原点处的平衡状态是一致渐近稳定的.

此外, 如果随着 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$, 有 $V(\boldsymbol{x}, t) \to \infty$, 则在原点处的平衡状态是大范围一致渐近稳定的. 该定理可直接由渐近稳定性定义证明.

**例 7.3.1** 研究下列状态方程的平衡状态及其稳定性,

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2),$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2).$$

**解** 令 $x_1 = x_{1,e}$, $x_2 = x_{2,e}$. 代入状态方程, 可知原点 $(x_{1,e} = 0, x_{2,e} = 0)$ 是唯一的平衡状态. 定义一个正定纯量函数 $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$, 其对时间的导数为

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$

$$= 2x_1[x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)] + 2x_2[-x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)]$$
$$= -2(x_1^2 + x_2^2)^2.$$

它是负定的, 这说明 $V(\boldsymbol{x})$ 沿任一轨迹连续地减小, 因此 $V(\boldsymbol{x})$ 是一个李雅普诺夫函数. 由于 $V(\boldsymbol{x})$ 随 $\boldsymbol{x}$ 偏离平衡状态趋于无穷而变为无穷, 则按照定理 7.3.1, 该系统在原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的.

**注 7.3.1** 若使 $V(\boldsymbol{x})$ 取一系列的常值 $0, C_1, C_2, \cdots$ $(0 < C_1 < C_2 < \cdots)$, 则 $V(\boldsymbol{x}) = 0$ 对应于状态空间的原点, 而 $V(\boldsymbol{x}) = C_1$, $V(\boldsymbol{x}) = C_2$, $\cdots$, 描述了包围状态空间原点的互不相交的一簇球, 如图 7.3.1 所示. 还应注意, 由于 $V(\boldsymbol{x})$ 在径向是无界的, 即随着 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$, $V(\boldsymbol{x}, t) \to \infty$, 所以这一簇球可扩展到整个状态空间.

**注 7.3.2** 由于球 $V(\boldsymbol{x}) = C_k$ 完全处在 $V(\boldsymbol{x}) = C_{k+1}$ 的内部, 所以典型轨迹从外向里通过 $V$ 球的边界. 因此李雅普诺夫函数的几何意义可阐述如下. $V(\boldsymbol{x})$ 表示状态 $\boldsymbol{x}$ 到状态空间原点距离的一种度量. 如果原点与瞬间状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 之间的距离随 $t$ 的增加而连续减小, 因 $\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) < 0$, 就有 $\|\boldsymbol{x}(t)\| \to 0$.

**注 7.3.3** 虽然定理 7.3.1 是李雅普诺夫第二方法的基本定理, 但是它还有些限制条件, 即 $\dot{V}(\boldsymbol{x}, t)$ 必须是负定函数. 如果在 $\dot{V}(\boldsymbol{x}, t)$ 上附加一个限制条件, 即除了原点以外, 沿任一轨迹 $\dot{V}(\boldsymbol{x}, t)$ 均不恒等于零, 则要求 $\dot{V}(\boldsymbol{x}, t)$ 负定的条件可用 $\dot{V}(\boldsymbol{x}, t)$ 取负半定的条件代替.

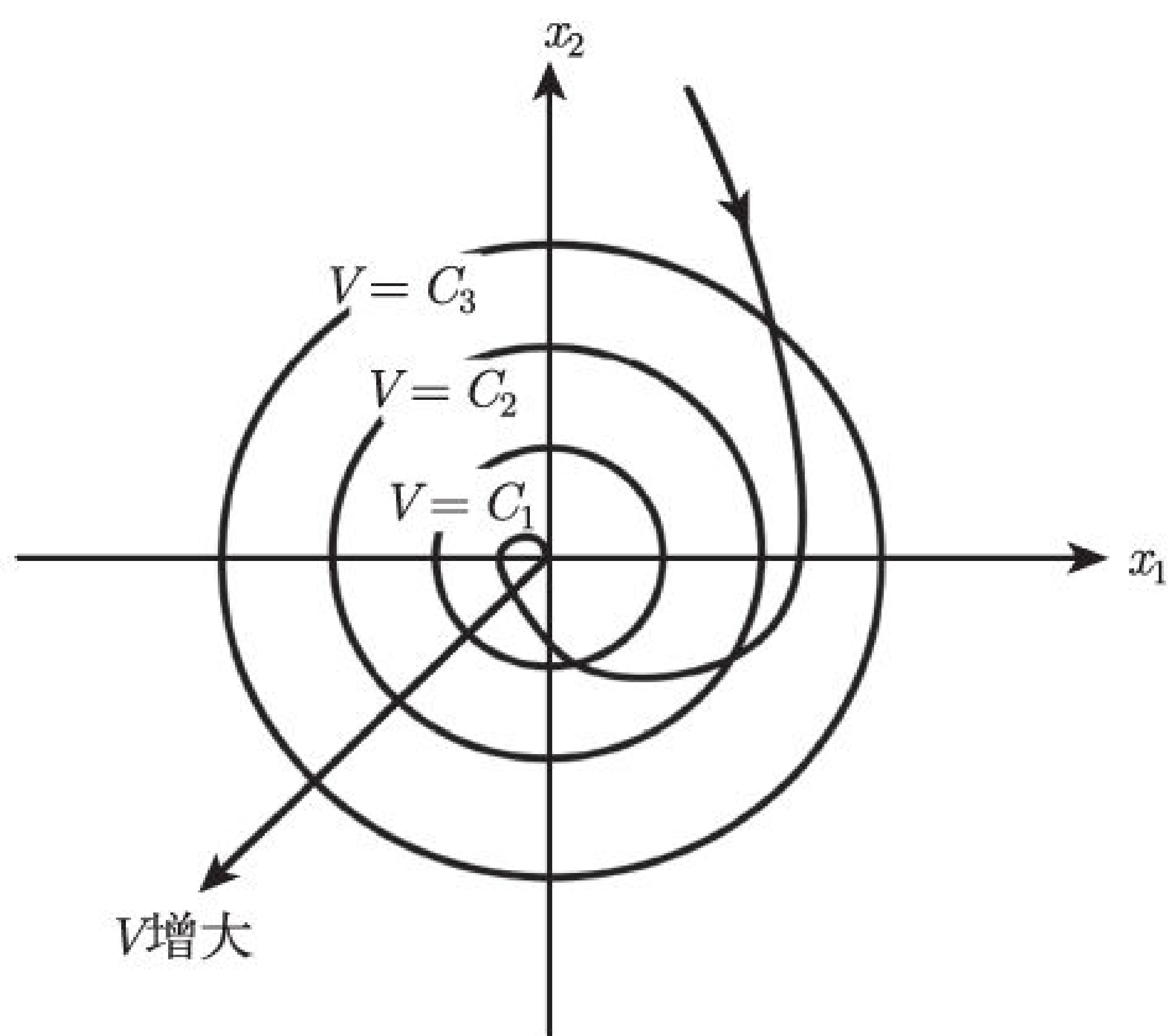



图 7.3.1 等 $V$ 圆和典型轨迹

**定理 7.3.2** 假设系统的状态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$, 且对所有 $t \geqslant t_0$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}, t) = \boldsymbol{0}$. 若存在具有连续一阶偏导数的纯量函数 $V(\boldsymbol{x}, t)$ 满足以下条件:

① $V(\boldsymbol{x}, t)$ 是正定的;

② $\dot{V}(\boldsymbol{x}, t)$ 是负半定的;

③对任一 $t_0$ 和任一 $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$, 在 $t \geqslant t_0$ 时, $\dot{V}[\boldsymbol{\phi}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0), t]$ 不恒等于零, 其中 $\boldsymbol{x}(t) := \boldsymbol{\phi}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ 表示在 $t_0$ 时从 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的轨迹或解. 则在系统原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的.

**注 7.3.4** 注意, 若 $\dot{V}(\boldsymbol{x}, t)$ 不是负定的, 而只是负半定的, 则典型点的轨迹可能与某个特定曲面 $\dot{V}(\boldsymbol{x}, t) = C$ 相切, 然而由于 $\dot{V}[\boldsymbol{\phi}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0), t]$ 对任一 $t_0$ 和任一 $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$, 在 $t \geqslant t_0$ 时不恒等于零, 所以典型点就不可能保持在切点处 (在这点上, $\dot{V}(\boldsymbol{x}, t) = 0$), 因而必然要运动到

原点.

然而, 如果存在一个正定的纯量函数 $\dot{V}(\boldsymbol{x},t)$, 使得 $\dot{V}(\boldsymbol{x},t)$ 始终为零, 则系统可以保持在一个极限环上. 在这种情况下, 原点处的平衡状态称为在李雅普诺夫意义下是稳定的.

如果系统平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的, 则存在纯量函数 $W(\boldsymbol{x},t)$, 可用其确定平衡状态的不稳定性. 下面介绍不稳定性定理.

**定理 7.3.3　李雅普诺夫不稳定性定理**

假设系统的描述方程为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$, 且对所有 $t\geqslant t_0$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0},t)=\boldsymbol{0}$. 若存在一个具有连续一阶偏导数的纯量函数 $W(\boldsymbol{x},t)$ 满足以下条件:

① $W(\boldsymbol{x},t)$ 在原点附近的某一邻域内是正定的;

② $\dot{W}(\boldsymbol{x},t)$ 在同样的邻域内是正定的.

则原点处的平衡状态是不稳定的.

下面比较 **线性系统稳定性** 与 **非线性系统稳定性**. 在线性定常系统中, 若平衡状态是局部渐近稳定的, 则它是大范围渐近稳定的. 然而在非线性系统中, 局部渐近稳定的平衡状态一般不是大范围渐近稳定的. 因此, 线性定常系统平衡状态的渐近稳定性的含义和非线性系统的含义完全不同.

如果要检验非线性系统平衡状态的渐近稳定性, 则非线性系统的线性化模型稳定性分析远远不够, 必须研究没有线性化的非线性系统. 有几种基于李雅普诺夫第二方法的方法可达到这一目的, 包括用于判断非线性系统渐近稳定性充分条件的 **克拉索夫斯基方法**、用于构成非线性系统李雅普诺夫函数的 **舒尔茨—基布生变量—梯度法**、用于某些非线性控制系统稳定性分析的 **卢厄意法**, 以及用于构成吸引域的 **波波夫方法** 等. 下面仅讨论克拉索夫斯基方法.

### 7.3.2　克拉索夫斯基方法

克拉索夫斯基方法给出了非线性系统平衡状态渐近稳定的充分条件.

在非线性系统中, 可能存在多个平衡状态. 可通过适当的坐标变换, 将所要研究的平衡状态变换到状态空间的原点. 所以, 可把要研究的平衡状态取为原点. 现介绍克拉索夫斯基定理.

**定理 7.3.4　克拉索夫斯基定理**

设系统为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, 其中 $\boldsymbol{x}:=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$ 为 $n$ 维状态向量, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}):=[f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_n(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}$ 为 $n$ 维实函数向量, 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的非线性函数, 假设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 对 $x_i$ 可微, $i=1,2,\cdots,n$. 将该系统的 **雅可比矩阵** 定义为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}):=\frac{\partial\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}&\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}&\cdots&\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}&\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}&\cdots&\dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}&\dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}&\cdots&\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

定义函数矩阵

$$-\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),$$

式中 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})$ 是雅可比矩阵 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的转置矩阵, $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ 为实对称矩阵. 如果矩阵 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ 是正定的, 则平衡状态 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的. 该系统的李雅普诺夫函数为

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

此外, 若随着 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$, $\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to \infty$, 则平衡状态是大范围渐近稳定的.

**证明** 由于 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ 是正定的, 所以除 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 外, $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ 的行列式处处不为零. 因而, 在整个状态空间中, 除 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 这一点外, 没有其他平衡状态, 即在 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$. 因为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, 在 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$, 且 $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, 所以 $V(\boldsymbol{x})$ 是正定的. 注意到

$$\dot{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

$V(\boldsymbol{x})$ 对 $t$ 的导数为

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= \dot{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) \\
&= [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\
&= \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\
&= -\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),
\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ 是正定的, 所以 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 是负定的. 因此 $V(\boldsymbol{x})$ 是一个李雅普诺夫函数, 原点是渐近稳定的. 进一步, 如果 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$, $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 趋于无穷, 则根据定理 7.3.1 可知, 平衡状态是大范围渐近稳定的.

**注 7.3.5** 克拉索夫斯基定理与通常的线性化方法不同, 它是大范围渐近稳定的. 这个定理给出了非线性系统大范围渐近稳定性的充分条件, 注意是充分条件, 所以非线性系统的平衡状态即使不满足上述定理所要求的条件, 也可能是稳定的. 因此, 在应用克拉索夫斯基定理时, 必须十分小心, 以防止对非线性系统平衡状态的稳定性作出错误的结论. 克拉索夫斯基定理对线性系统则是充要条件.

**例 7.3.2** 考虑含有两个非线性的二阶系统:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + f_2(x_2),$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + ax_2.$$

假设 $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $f_1(x_1)$ 和 $f_2(x_2)$ 是实函数, 且可微. 又假设随着 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$, $[f_1(x_1) + f_2(x_2)]^2 + [(x_1 + ax_2)]^2 \to \infty$, 试确定使平衡状态 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 渐近稳定的充分条件.

**解** 在该系统中, 我们有

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} f_1'(x_1) & f_2'(x_2) \\ 1 & a \end{pmatrix},$$

于是有

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

$$= -\begin{pmatrix} 2f_1'(x_1) & 1+f_2'(x_2) \\ 1+f_2'(x_2) & 2a \end{pmatrix}.$$

由克拉索夫斯基定理可知, 如果 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ 是正定的, 则所考虑系统的平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是大范围渐近稳定的. 因此, 若对所有 $x_1 \neq 0$, $f_1'(x_1) < 0$; 对所有 $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$, $4af_1'(x_1) - [1+f_2'(x_2)]^2 > 0$. 则平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是大范围渐近稳定的.

这两个条件是渐近稳定的充分条件. 显然, 由于稳定性条件完全与非线性函数 $f_1(x_1)$ 和 $f_2(x_2)$ 的实际形式无关, 所以上述限制条件是不适当的.

现将定理 7.3.4 推广如下.

**定理 7.3.5　扩展克拉索夫斯基定理**

设系统为 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, 其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 假设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^n$ 的 **雅可比矩阵** 为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) := \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

令 $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是一实对称正定阵, 定义函数矩阵

$$-\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).$$

如果实对称矩阵 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ 是正定的, 则平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的. 该系统的李雅普诺夫函数为

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

此外, 若随着 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$, $\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to \infty$, 则平衡状态是大范围渐近稳定的.

## 7.4　线性时不变系统的李雅普诺夫稳定性分析

有许多方法可用于研究线性时不变系统的渐近稳定性. 例如, 对连续时间系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在原点处渐近稳定的充要条件是 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的所有特征值均有负实部, 或者特征多项式

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

为零时的根具有负实部.

李雅普诺夫第二方法也可以判定线性时不变系统的稳定性. 线性定常系统平衡状态的稳定性很容易通过李雅普诺夫第二种方法来研究. 下面用李雅普诺夫方法分析线性时不变系统的稳定性.

### 7.4.1　线性时不变连续时间系统

考虑下列 **线性时不变连续时间系统** (Linear Time-Invariant Continuous-Time System):

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{7.4.1}$$

式中 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为给定的常数矩阵. 这个系统没有输入, 是一个 **自治系统** (Autonomous System).

假设 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵, 则由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ 可以确定系统有唯一的平衡状态 $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$, 它位于状态空间原点处.

为系统 (7.4.1) 选取一个可能的李雅普诺夫函数, 如选择一个正定二次型

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x},$$

式中 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 为对称实正定阵. $V(\boldsymbol{x})$ 沿任一轨迹对时间 $t$ 的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}} \\ &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

式中 $\boldsymbol{Q} = -(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

由于 $V(\boldsymbol{x})$ 是正定的, 对于渐近稳定性, 要求 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 为负定的, 故 $\boldsymbol{Q}$ 必须是正定的. 因此, 对于线性系统 (7.4.1), 其渐近稳定的充分条件是 $\boldsymbol{Q}$ 正定的. 为了判断 $n \times n$ 维矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的正定性, 可采用西尔维斯特准则, 即矩阵为正定的充要条件是矩阵的所有主子行列式均为正值.

在判别 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 负定时, 一种方法是给定一个正定矩阵 $\boldsymbol{P}$, 然后计算 $\boldsymbol{Q} = -(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A})$, 如果 $\boldsymbol{Q}$ 是正定的, 那么系统就稳定. 这种方法看起来容易, 但难以实现, 因为可能给定的正定矩阵 $\boldsymbol{P}$, 但计算出的 $\boldsymbol{Q}$ 是不正定的. 例如, 取 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$ (单位阵), 如果 $\boldsymbol{Q} = -(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A})$ 是正定的, 系统就稳定, 否则 $\boldsymbol{Q}$ 不正定, 就不能判断.

实用的方法, 不是先指定一个正定矩阵 $\boldsymbol{P}$, 然后检查 $\boldsymbol{Q}$ 是否也是正定的, 而是先指定一个正定的矩阵 $\boldsymbol{Q}$ (如 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$), 然后再检查由矩阵方程 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q}$ 确定的 $\boldsymbol{P}$ 是否也是正定的. 以上论述可归纳为下列定理.

**定理 7.4.1　线性系统李雅普诺夫稳定性定理**

设系统方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

式中 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为给定的非奇异常数矩阵, 则平衡状态 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 为大范围渐近稳定的充要条件是: 给定一个实对称正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 存在一个实对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q}$$

成立. 二次型 $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 就是该系统的李雅普诺夫函数. 注意, 在所考虑的线性系统中, 如果平衡状态 (原点) 是渐近稳定的, 则它也是大范围渐近稳定的.

在应用定理 7.4.1 时, 应注意以下问题.

(1) 如果 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ 沿任一条轨迹不恒等于零, 则 $\boldsymbol{Q}$ 可取正半定矩阵.

(2) 如果取任意的正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 或者如果 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 沿任一轨迹不恒等于零, 可取一个任意的正半定矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 并解矩阵方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q}$$

以确定 $\boldsymbol{P}$, 则对平衡状态 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的渐近稳定性, $\boldsymbol{P}$ 的正定是个充要条件.

注意, 如果正半定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 满足下列秩的条件:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}^{1/2} \\ \boldsymbol{Q}^{1/2}\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{Q}^{1/2}\boldsymbol{A}^{n-1} \end{pmatrix} = n,$$

则 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 沿任意轨迹不恒等于零 (参见例 7.4.2).

(3) 只要选择的矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为正定的 (或根据情况选为正半定的), 则最终结果与具体的矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的选择无关.

(4) 为了确定对称矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的各元素, 可使矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $-\boldsymbol{Q}$ 的各元素对应相等, 就得到 $n(n+1)/2$ 个线性方程. 如果用 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 每个特征值的重数与特征方程根的重数是一致的, 并且如果每两个根的和 $\lambda_j+\lambda_k \neq 0$, 则 $\boldsymbol{P}$ 的元素将唯一地被确定. 注意, 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示一个稳定系统, 那么 $\lambda_j+\lambda_k$ 的和总不等于零.

(5) 在确定是否存在一个实对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}$ 时, 取 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$ 是很方便的, 其中 $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵. 于是, $\boldsymbol{P}$ 的各元素可按下式确定:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{I},$$

从而可验证 $\boldsymbol{P}$ 是否正定.

**例 7.4.1** 设二阶系统方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

显然, 平衡状态是在原点. 试确定该状态的稳定性.

**解** 设假定的李雅普诺夫函数为

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}.$$

将 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{pmatrix}$ 代入方程 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{I}$ 得到

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

将矩阵方程展开, 可得联立方程组:

$$\begin{cases} -4p_1-2p_{12}=-1, \\ p_1-2p_{12}-p_2=0, \\ 2p_{12}=-1. \end{cases}$$

从方程组中解出 $p_1, p_{12}, p_2$, 可得

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

为了验证 $\boldsymbol{P}$ 的正定性, 我们来校核各主子行列式:

$$\frac{1}{2}>0, \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} > 0.$$

因此 $\boldsymbol{P}$ 是正定的, 故原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的, 而李雅普诺夫函数为

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2).$$

其对时间的导数为 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -(x_1^2 + x_2^2)$.

**例 7.4.2** 确定如图 7.4.1 所示系统的增益 $K$ 的稳定范围.

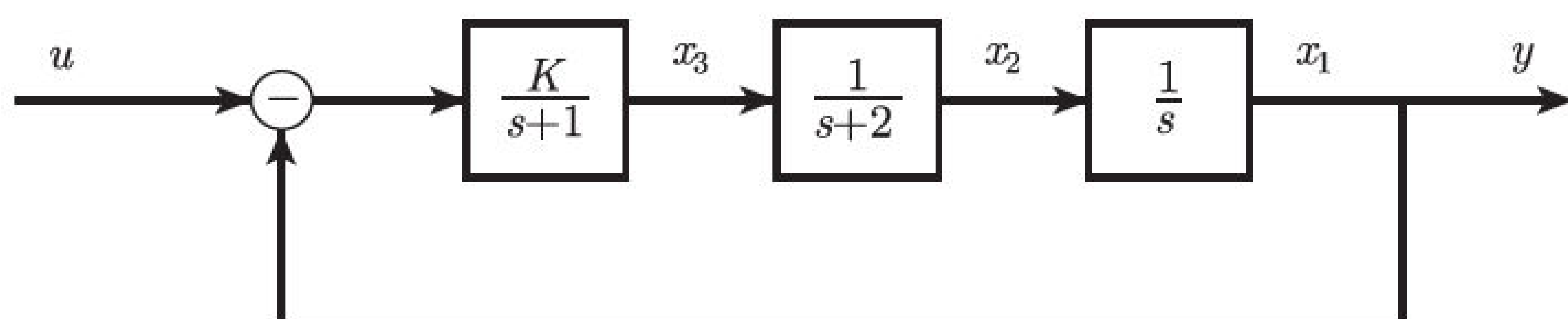



图 7.4.1 一个单位反馈控制系统

系统的状态方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{pmatrix} u.$$

在确定 $K$ 的稳定范围时, 假设输入 $u$ 为零. 于是上式可写为

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{7.4.2}$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + x_3, \tag{7.4.3}$$

$$\dot{x}_3 = -Kx_1 - x_3. \tag{7.4.4}$$

由式 (7.4.2)、式 (7.4.4) 可发现, 原点是平衡状态. 假设取正半定的实对称矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.4.5}$$

由于除原点外 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ 不恒等于零, 因此可选上式的 $\boldsymbol{Q}$. 为了证实这一点, 注意

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = -x_3^2,$$

取 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 恒等于零, 意味着 $x_3$ 也恒等于零. 如果 $x_3$ 恒等于零, $x_1$ 也必恒等于零, 因此由式 (7.4.4) 可得 $0 = -Kx_1 - 0$. 于是 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 只在原点处才恒等于零. 因此, 为了分析稳定性, 可采用由式 (7.4.5) 定义的矩阵 $\boldsymbol{Q}$. 或者, 可检验下列矩阵的秩:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}^{1/2} \\ \boldsymbol{Q}^{1/2}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{Q}^{1/2}\boldsymbol{A}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K & -K & 1 \end{pmatrix},$$

显然, 对于 $K \neq 0$, 其秩为 3. 因此可选择这样的 $\boldsymbol{Q}$ 用于李雅普诺夫方程.

现在求解李雅普诺夫方程:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q},$$

它可重写为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -K \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

以上方程对 $\boldsymbol{P}$ 的各元素求解, 可得

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \dfrac{K^2+12K}{12-2K} & \dfrac{6K}{12-2K} & 0 \\ \dfrac{6K}{12-2K} & \dfrac{3K}{12-2K} & \dfrac{K}{12-2K} \\ 0 & \dfrac{K}{12-2K} & \dfrac{6}{12-2K} \end{pmatrix}.$$

为使 $\boldsymbol{P}$ 成为正定矩阵, 其充要条件为 $12-2K > 0$ 和 $K > 0$, 或者 $0 < K < 6$. 因此, $0 < K < 6$ 时, 系统在通常意义下是稳定的, 也就是说, 原点是大范围渐近稳定的.

### 7.4.2 线性时不变离散时间系统

考虑下列 **线性时不变离散时间系统** (Linear Time-Invariant Discrete-Time System):

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k), \tag{7.4.6}$$

式中 $\boldsymbol{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量; $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为给定的常数矩阵.

假设 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵, 则由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ 可以确定系统有唯一的平衡状态 $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$, 它位于状态空间原点处.

为系统 (7.4.6) 选取一个可能的李雅普诺夫函数, 如选择一个正定二次型

$$V[\boldsymbol{x}(k)] = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(k),$$

式中 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 为对称实正定阵. $V[\boldsymbol{x}(k)]$ 的增量为

$$\Delta V[\boldsymbol{x}(k)] := V[\boldsymbol{x}(k+1)] - V[\boldsymbol{x}(k)] = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k+1)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(k+1) - V[\boldsymbol{x}(k)]$$

$$= [\boldsymbol{Ax}(k)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PAx}(k) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Px}(k) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PAx}(k) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Px}(k)$$
$$= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA} - \boldsymbol{P}]\boldsymbol{x}(k) = -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Qx}(k) \tag{7.4.7}$$

式中 $\boldsymbol{Q} = -(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA} - \boldsymbol{P}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

由于 $V[\boldsymbol{x}(k)]$ 是正定的, 对于渐近稳定性, 要求 $\Delta V[\boldsymbol{x}(k)]$ 为负定的, 故 $\boldsymbol{Q}$ 必须是正定的. 因此, 对于线性离散时间系统 (7.4.6), 其渐近稳定的充分条件是 $\boldsymbol{Q}$ 正定. 为了判断 $n\times n$ 维矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的正定性, 可采用西尔维斯特准则, 即矩阵为正定的充要条件是矩阵的所有主子行列式均为正值.

在判别 $\Delta V[\boldsymbol{x}(k)]$ 负定时, 一种方法是先指定一个正定的矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 然后再检查由矩阵方程 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA} - \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{Q}$ 确定的 $\boldsymbol{P}$ 是否也是正定的. 以上论述可归纳为下列定理.

**定理 7.4.2 线性离散时间系统李雅普诺夫稳定性定理**

设系统方程为 $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{Ax}(k)$, 式中 $\boldsymbol{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为给定的非奇异常数矩阵, 则平衡状态 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 为大范围渐近稳定的充要条件是: 给定一个实对称正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ (最简单取 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$), 存在一个实对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA} - \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{Q}$$

成立. 二次型 $V[\boldsymbol{x}(k)] = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Px}(k)$ 就是该系统的李雅普诺夫函数.

在应用定理 7.4.2 时, 应注意以下问题.

(1) 如果 $V[\boldsymbol{x}(k)] = -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Qx}(k)$ 沿任一条轨迹不恒等于零, 则 $\boldsymbol{Q}$ 可取正半定矩阵.

(2) 如果取任意的正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 或者如果 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 沿任一轨迹不恒等于零, 可取一个任意的正半定矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 并解矩阵方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA} - \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{Q}$$

以确定 $\boldsymbol{P}$, 则对平衡状态 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的渐近稳定性, $\boldsymbol{P}$ 的正定是个充要条件.

**例 7.4.3** 设二阶系统方程为

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 \\ -0.8 & 1.4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}.$$

显然, 平衡状态是在原点. 试确定该状态的稳定性.

**解** 设假定的李雅普诺夫函数为

$$V[\boldsymbol{x}(k)] = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Px}(k).$$

将 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{pmatrix}$ 代入方程 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA} - \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{I}$ 得到

$$\begin{pmatrix} 0 & -0.8 \\ 0.6 & 1.4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0.6 \\ -0.8 & 1.4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -0.8p_{12} & -0.8p_2 \\ 0.6p_1 + 1.4p_{12} & 0.6p_{12} + 1.4p_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0.6 \\ -0.8 & 1.4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0.64p_2 & -0.48p_{12} - 1.12p_2 \\ -0.48p_{12} - 1.12p_2 & 0.36p_1 + 1.68p_{12} + 1.96p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

将矩阵方程展开, 可得联立方程组:

$$\begin{cases} -p_1+0.64p_2=-1, \\ -1.48p_{12}-1.12p_2=0, \\ 0.36p_1+1.68p_{12}+0.96p_2=-1. \end{cases}$$

从方程组中解出 $p_1$, $p_{12}$, $p_2$, 可得

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1375}{117} & -\dfrac{2975}{234} \\ -\dfrac{2975}{234} & \dfrac{15725}{936} \end{pmatrix}.$$

为了验证 $\boldsymbol{P}$ 的正定性, 我们来校验各主子行列式:

$$\frac{1375}{117}>0, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{1375}{117} & -\dfrac{2975}{234} \\ -\dfrac{2975}{234} & \dfrac{15725}{936} \end{vmatrix} = \frac{8270}{231}>0.$$

因此 $\boldsymbol{P}$ 是正定的, 故原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的, 而李雅普诺夫函数为

$$V[\boldsymbol{x}(k)]=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(k)=\frac{1375}{117}x_1^2(k)-\frac{2975}{117}x_1(k)x_2(k)+\frac{15725}{936}x_2^2(k).$$

其增量为

$$\Delta V[\boldsymbol{x}(k)]=-x_1^2(k)-x_2^2(k).$$

## 7.5 思 考 题

1. 试确定下列二次型是否为正定的,

$$V=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+3x_1x_2-5x_2x_3-7x_1x_3.$$

2. 试确定下列二次型是否为负定的,

$$V=-x_1^2-3x_2^2-9x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3-6x_1x_3.$$

3. 确定下列系统原点的稳定性,

$$\begin{cases} \dot{x}_1=-x_1+x_2+x_1(x_1^2+x_2^2), \\ \dot{x}_2=-x_1-x_2+x_2(x_1^2+x_2^2), \end{cases}$$

考虑二次函数 $V=x_1^2+x_2^2$ 是否可以作为一个可能的李雅普诺夫函数.

4. 写出下列系统的几个李雅普诺夫函数,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

并确定该系统原点的稳定性.

5. 试确定下列系统平衡状态的稳定性,

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + 2,\\ \dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 - 1.\end{cases}$$

6. 试确定下列系统平衡状态的稳定性,

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 + 3x_2,\\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 2x_2 - 3x_3,\\ \dot{x}_3 = x_1.\end{cases}$$

7. 试检验下列系统原点的稳定性,

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2,\\ \dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2.\end{cases}$$

8. 考虑系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$, 试证明: 若控制向量选择为 $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$, 式中的 $\boldsymbol{P}$ 为实对称正定矩阵, 且满足条件

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{I},$$

则该系统原点是最大范围渐近稳定的.

9. 对于线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -a \end{pmatrix}\boldsymbol{x},$$

式中 $a > 0$ 为可调节的参数, 假设初始状态为 $\boldsymbol{x}(0) = [c_1, 0, 0]^{\mathrm{T}}$, 试确定参数 $a$ 的值, 使得下列性能指标极小,

$$J = \int_0^\infty \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t.$$

10. 若将非线性时不变 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 改为非线性时变系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$, 克拉索夫斯基定理是否还有效?

11. 对 (非线性) 时不变离散时间系统 $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k))$ 和 (非线性) 时变离散时间系统 $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k), k)$, 试研究克拉索夫斯基定理.

12. 对于定理 7.4.2, 若选择时变实对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}(k)$, 取李雅普诺夫函数

$$V[\boldsymbol{x}(k)] = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{x}(k),$$

研究线性时不变离散时间系统的李雅普诺夫稳定性定理.

13. 将定理 7.4.2 推广到线性时变离散时间系统 $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k)$, 给出线性时变离散时间系统的李雅普诺夫稳定性定理. 进一步, 若选择时变实对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}(k)$, 李雅普诺夫稳定性定理应该如何表达.

14. 试用克拉索夫斯基定理判断下列系统是否为大范围渐近稳定,

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + x_1x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3.$$

15. 试用克拉索夫斯基定理判断下列系统的稳定性,

$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_1x_2^2 + 3x_3^2,$

$\dot{x}_2 = -x_1^2x_2 - 3x_3,$

$\dot{x}_3 = 3x_2 - x_2^2 + 3x_3^3.$

16. 试用克拉索夫斯基定理确定使系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + bx_2^3 \end{cases}$$

的原点为大范围渐近稳定的参数 $a$ 和 $b$ 的取值范围.

第 8 章
CHAPTER 8

# 连续系统离散化与卡尔曼滤波

本章讨论连续系统离散化及其相关问题, 内容包括离散时间系统的差分方程模型、传递算子描述 (离散传递函数)、状态空间模型及其互相转化, 状态方程的解, 连续时间系统与离散时间系统间的变换, 如欧拉变换、双线性变换、广义双线性变换, 以及我们提出的 **脉冲不变 Z–S 变换** [29, 30]、**阶跃不变 Z–S 变换** [31, 32] 等, 最后简单介绍了离散时间系统的参数辨识和卡尔曼滤波 [1–4].

## 8.1 差分方程与传递算子

连续时间系统一般可用微分方程 (Differential Equation) 模型描述, 离散时间系统一般可用差分方程 (Difference Equation) 模型描述. 这里介绍离散系统差分方程模型、传递算子、传递函数.

离散时间系统一般可用差分方程模型描述为

$$\begin{aligned} & y(k)+a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+\cdots+a_ny(k-n) \\ & \qquad =b_1u(k-1)+b_2u(k-2)+\cdots+b_nu(k-n), \end{aligned} \tag{8.1.1}$$

其中 $u(k)$ 和 $y(k)$ 分别为时刻 $k$ 系统的输入和输出. 当系数 $a_i,b_i$ 是与 $u(k)$, $y(k)$ 和 $k$ 无关的常数时, 这样的系统称为线性时不变确定性离散时间系统. 在不致于混淆的情况下, 简称为线性时不变离散时间系统或离散时间系统.

设 $U(z):=\mathscr{Z}[u(k)]$ 是 $u(k)$ 的 Z 变换, $Y(z):=\mathscr{Z}[y(k)]$ 是 $y(k)$ 的 Z 变换. 在零初始条件下, 对式 (8.1.1) 进行 Z 变换, 可得

$$(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n})Y(z)=(b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_nz^{-n})U(z).$$

简写为

$$Y(z)=H(z)U(z), \tag{8.1.2}$$

其中离散系统传递函数为

$$\begin{aligned} H(z) &:= \frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n}} \\ &= \frac{b_1z^{n-1}+b_2z^{n-2}+\cdots+b_n}{z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_n}. \end{aligned} \tag{8.1.3}$$

离散系统的传递函数也称为脉冲传递函数, 它等于零初始条件下系统输出的 Z 变换与输入的 Z 变换之比. 连续系统的传递函数等于系统的冲击响应的拉普拉斯变换. 只有线性时不变系统才有传递函数.

若记 $q^{-1}$ 为 **单位后移算子** (Unit Backward Shift Operator), 即 $q^{-1}y(k)=y(k-1)$, 则式 (8.1.1) 用移位算子可表示成

$$y(k)=H(q)u(k), \tag{8.1.4}$$

其中输入输出传递算子为

$$\begin{aligned}H(q)&:=\frac{b_1q^{-1}+b_2q^{-2}+\cdots+b_nq^{-n}}{1+a_1q^{-1}+a_2q^{-2}+\cdots+a_nq^{-n}}\\&=\frac{b_1q^{n-1}+b_2q^{n-2}+\cdots+b_n}{q^n+a_1q^{n-1}+a_2q^{n-2}+\cdots+a_n}.\end{aligned} \tag{8.1.5}$$

由于式 (8.1.3) 中 $H(z)$ 与式 (8.1.5) 中 $H(q)$ 具有相同形式, 我们把二者统一用 $H(z)$ 表示, 其中 $z$ 视问题需要可认为是 Z 变换算子 ($z=\mathrm{e}^{Ts}$, $T$ 为采样周期) 或移位算子: $z^{-1}y(k)=y(k-1)$, $zy(k)=y(k+1)$. $H(z)$ 称为离散系统的传递算子或传递函数. 脉冲 (离散) 传递函数是差分方程的另一种表达形式.

## 8.2　连续时间系统离散化

(线性) 系统可以用多种模型描述, 如微分方程模型、状态空间模型、传递函数模型等. 尽管连续系统辨识方法有不少研究, 但是由于数字计算机的使用, 使得离散系统辨识方法在理论与应用上都占主流. 本节简单介绍连续时间离散化与连续时间系统离散化的基本定理, 连续时间系统的脉冲不变离散化、阶跃不变离散化等.

### 8.2.1　信号离散化与系统离散化

连续时间信号通常称为 “模拟信号”, 离散时间信号通常称为 “数字信号”. 连续时间信号离散化得到离散时间信号, 即连续时间信号经过采样得到离散采样信号. 采样定理说明采样频率与信号频谱之间的关系, 是连续时间信号离散化的基本依据.

**定理 8.2.1　奈奎斯特 — 香农采样定理与恢复定理**

设连续时间信号 $x(t)$ 频谱的最高频率为 $f_{\max}$ (即频率大于 $f_{\max}$ 时频谱为零), 当采样周期 $T>0$, 即采样频率 $f_s=1/T$ 大于最高频率 $f_{\max}$ 的 2 倍, 即 $f_s>2f_{\max}$ 时, 那么经过采样得到离散时间信号 $x(kT)=x(t)|_{t=kT}$, $k=0,1,2,\cdots$ 能够恢复原始连续时间信号 $x(t)$, 且

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\frac{\sin\dfrac{\pi}{T}(t-kT)}{\dfrac{\pi}{T}(t-kT)}.$$

也就是说在满足采样频率条件时, 离散时间信号可以恢复 (重构) 原连续时间信号. 值得指出的是, 如果对信号加上其他约束时, 即使不满足采样频率条件, 也可能由采样信号完美重构原连续时间信号.

奈奎斯特 — 香农采样定理是连续时间信号离散化与采样信号重构连续时间信号的基本依据. 将信号离散化与重构思想推广到连续时间系统离散化与重构, 我们总结出扩展奈奎斯特 — 香农采样定理.

**定理 8.2.2 扩展奈奎斯特 — 香农采样定理** [5,6]

对于线性时不变连续时间系统, 设系统所有特征值虚部绝对值的上界为 $\omega_{\max}$, 当采样周期 $T>0$, 即采样角频率 $\omega_s := 2\pi f_s = 2\pi/T$ 大于 $\omega_{\max}$, 即 $\omega_s \geqslant \omega_{\max}$ 时, 那么离散时间系统可以唯一恢复 (重构) 原连续时间系统.

该定理说明: 当连续时间系统只有实数极点 (没有复数极点), 那么对于任意采样周期 (采样频率), 任一个离散时间模型都可以唯一重构连续时间系统.

扩展奈奎斯特 — 香农采样定理是连续时间系统离散化与离散时间模型重构连续时间模型的基本依据. 连续时间系统离散化是模型离散化, 不是信号离散化, 它不涉及系统的输入输出信号, 不涉及连续时间信号离散化.

值得指出的是, 如果不满足采样角频率条件, 当对采样周期 (采样间隔) 加上其他约束时, 如多率采样的两个采样间隔之比为无理数, 即使不满足扩展奈奎斯特 — 香农采样定理采样频率条件, 也可能由离散时间模型唯一地重构原连续时间系统, 参见文献 [5, 6].

### 8.2.2 连续时间信号采样

对连续时间信号进行采样就得到离散信号. 这里讨论周期采样. 根据奈奎斯特 — 香农采样定理, 在一定条件下, 可以由离散信号恢复连续时间信号. 奈奎斯特 — 香农采样恢复公式太复杂, 不便在实际中使用, 再则实际中也不需要那么精确的恢复, 采用近似方法将离散信号变为连续时间信号即可.

离散信号只是在离散时间点 $t=kT$ 点上取值 $(k=0,1,2,\cdots)$, $T>0$ 为两个相邻离散点信号间的 "时间距离", 即 **采样周期** (Sampling Period). 离散信号 $\{x(kT)\colon k=0,1,2,\cdots\}$ 就是一个时间序列, 有时为了简化, 记 $x(k):=x(kT)$, 其 Z 变换定义为

$$X(z) := \mathscr{Z}[x(k)] = \mathscr{Z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}. \tag{8.2.1}$$

这是一个无穷级数, 所以在其收敛域上才有意义. 由 $X(z)$ 求原信号 $x(kT)$ 可以用 **逆 Z 变换** (即反 Z 变换), 定义为

$$x(kT) = \mathscr{Z}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_o X(z)z^{k-1}\mathrm{d}z, \tag{8.2.2}$$

其中线积分路径 $o$ 是一条包含 $X(z)$ 所有极点的逆时针方向绕原点一周的封闭曲线.

Z 变换在离散信号分析中有重要作用. 在数字信号处理中, 使用上述离散信号的 Z 变换就足够了. 然而实际中大多是连续时间系统, 而数字计算机的优势是处理离散信号. 在计算机控制系统设计中, 经常用到离散时间动态系统传递函数, 即 $z$ 域传递函数 $H(z)$, 在连续时间系统中使用 $s$ 域传递函数 $G(s)$. 因此, 有必要通过连续时间系统离散化, 来讨论 Z 变换与 Laplace 变换的关系. Laplace 变换需要一个连续时间信号 (信号必须在每个时间点都有定义), 所以必须将离散时间信号拓展为连续时间信号.

定义 Kronecker Delta 函数

$$\delta_{t-j} = \begin{cases} 1, & t=j, \\ 0, & t\neq j, \end{cases} \tag{8.2.3}$$

和单位脉冲函数

$$\delta(t)=\lim_{\epsilon\to\infty}\begin{cases}\dfrac{1}{\epsilon}, & 0\leqslant t\leqslant\epsilon,\\ 0, & t>\epsilon.\end{cases} \tag{8.2.4}$$

它代表宽度为零, 高度为无穷大, 面积为 1 的一个冲击. $1(t)$ 代表单位阶跃函数, 定义为

$$1(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases} \tag{8.2.5}$$

**1. Δ 函数产生连续时间信号**

一种方法是定义连续时间信号 $x(t)$ 在采样点的值等于离散信号的值, 非采样点的值为零, 那么连续时间信号 $x(t)$ 可以表示为

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\delta_{t-kT}=x(0)\delta_t+x(T)\delta_{t-T}+x(2T)\delta_{t-2T}+\cdots \tag{8.2.6}$$

其对应的 Laplace 变换 $\int_0^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=0$, 所以这种方式拓展的连续时间信号, 对找 Z变换与 Laplace 变换的关系是没有任何帮助的.

**2. 脉冲函数产生连续时间信号**

另一种方法是采用单位脉冲函数 $\delta(t)$ 定义与离散信号 $\{x(kT)\colon k=0,1,2,\cdots\}$ 对应的连续时间信号

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\delta(t-kT)=x(0)\delta(t)+x(T)\delta(t-T)+x(2T)\delta(t-2T)+\cdots \tag{8.2.7}$$

它的 Laplace 变换为

$$\begin{aligned}X_\delta^*(s)&:=\int_0^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\delta(t-kT)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\mathrm{e}^{-skT}=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)(\mathrm{e}^{sT})^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k},\end{aligned} \tag{8.2.8}$$

因为右边有指数, 计算困难, 所以引入一个算子

$$z:=\mathrm{e}^{sT}. \tag{8.2.9}$$

它揭示 Z 变换与 Laplace 变换间的关系. 与式 (8.2.1) 比较, 上式右边刚好是离散信号 $x(kT)$ 的 Z 变换, 因此记 $X_\delta(z):=X_\delta^*(s)|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$, 则有

$$X_\delta(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}, \tag{8.2.10}$$

式 (8.2.1) 与式 (8.2.10) 就统一了.

与式 (8.2.6) 相比, 式 (8.2.7) 使用脉冲函数定义连续时间信号, 如果用这种脉冲信号作为连续时间系统的输入来离散连续时间系统, 就称为 **脉冲不变离散化**.

**例 8.2.1** 假设连续时间系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{b}{s+a},$$

其脉冲响应为 $g(t)=b\mathrm{e}^{-at}$, 对应的离散信号为 $g(kT)=b\mathrm{e}^{-akT}$. 用单位脉冲函数 $\delta(t)$ 定义与离散信号 $\{g(kT)\colon k=0,1,2,\cdots\}$ 对应的连续时间信号

$$g(t):=\sum_{k=0}^{\infty}g(kT)\delta(t-kT)=b\delta(t)+b\mathrm{e}^{-aT}\delta(t-T)+b\mathrm{e}^{-2aT}\delta(t-2T)+\cdots \tag{8.2.11}$$

其 Laplace 变换, 即脉冲传递函数为

$$\begin{aligned}H(z)&=b+b\mathrm{e}^{-aT}z^{-1}+b\mathrm{e}^{-2aT}z^{-2}+\cdots\\&=b[1+(\mathrm{e}^{-aT}z^{-1})+(\mathrm{e}^{-aT}z^{-1})^2+\cdots]\\&=\frac{b}{1-\mathrm{e}^{-aT}z^{-1}}=\frac{bz}{z-\mathrm{e}^{-aT}}.\end{aligned}$$

可以证明连续系统 $G(s)$ 在脉冲输入 $\delta(t)$ 下的输出响应 $g(t)=b\mathrm{e}^{-at}$ 在采样点 $t=kT$ 的值 $g(kT)=b\mathrm{e}^{-akT}$ 等于离散系统 $H(z)$ 在输入 $\delta_t$ 下的输出响应 $h(kT)$, 即 $g(kT)=h(kT)$, 其中

$$h(kT)=b\delta_{kT}+b\mathrm{e}^{-aT}\delta_{kT-T}+b\mathrm{e}^{-2aT}\delta_{kT-2T}+\cdots \tag{8.2.12}$$

注: 这里连续系统 $G(s)$ 的输入脉冲函数 $\delta(t)$ 是无界的, 而离散系统 $H(z)$ 的输入 $\delta_t$ 是有界的, 但是它们的输出是一样的, 所以 $G(s)$ 与 $H(z)$ 间的变换称为脉冲不变变换. 换句话说, 如果连续系统的输入是有界的 (如方波或阶梯函数), 那么这里的 $G(s)$ 在采样点的输出与 $H(z)$ 的就不一样了, 这导致基于零阶保持器的阶跃不变离散化的诞生. 读者可以比较 $G(s)$ 和 $H(z)$ 在阶跃输入下的系统输出.

注意到离散系统 $H(z)$ 在脉冲输入 $\delta(t)$ 作用下的输出响应为

$$h(kT)=b\delta(kT)+b\mathrm{e}^{-aT}\delta(kT-T)+b\mathrm{e}^{-2aT}\delta(kT-2T)+\cdots \tag{8.2.13}$$

它与式 (8.2.12) 中 $h(kT)$ 是不相等的. 根据线性系统的叠加原理, 我们有: 连续系统 $G(s)$ 在一系列脉冲输入

$$u(t)=\sum_{k=0}^{\infty}u(kT)\delta(t-kT)=u(0)\delta(t)+u(T)\delta(t-T)+u(2T)\delta(t-2T)+\cdots$$

下的输出响应 $y(t)$ 在采样点 $t=kT$ 的值 $y(kT)$ 等于离散系统 $H(z)$ 在输入

$$u(kT)=\sum_{j=0}^{\infty}u(jT)\delta_{kT-jT}=u(0)\delta_{kT}+u(T)\delta_{kT-T}+u(2T)\delta_{kT-2T}+\cdots$$

作用下的输出响应 $h(kT)$, 即 $y(kT)=h(kT)$. 然而连续时间系统的静态增益 $G(0)=\dfrac{b}{a}$ 与其对应的离散系统静态增益 $H(1)=\dfrac{b}{1-\mathrm{e}^{a}}$ 不相等, 连续系统与离散系统间的脉冲不变变换只能保证脉冲输入时的输出不变, 不能保证系统增益不变, 也不能保证其他输入下系统的输出不变.

### 3. 零阶保持器产生连续时间信号

还有一种方法是采用单位阶跃函数 $1(t)$ 定义与离散信号 $\{x(kT)\colon\ k=0,1,2,\cdots\}$ 对应的连续时间信号, 也就是使用 **零阶保持器** (Zero-Order Hold, ZOH) 将离散信号不增不减保持到下一采样时刻, 即

$$x(t)=x(kT),\quad kT\leqslant t<(k+1)T,\ k=0,1,2,\cdots \tag{8.2.14}$$

这可等价表示为

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)[1(t-kT)-1(t-kT-T)]. \tag{8.2.15}$$

它的 Laplace 变换为

$$\begin{aligned}X_1^*(s)&:=\int_0^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)[1(t-kT)-1(t-kT-T)]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\int_{kT}^{kT+T}[1(t-kT)-1(t-kT-T)]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\int_{kT}^{kT+T}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\mathrm{e}^{-kTs}\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}\\&=X_\delta^*(s)G_0(s),\end{aligned} \tag{8.2.16}$$

它等于脉冲连续时间信号的 Laplace 变换 $X_\delta^*(s)$ 乘以零阶保持器的传递函数 $G_0(s)$, 其中

$$G_0(s):=\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}. \tag{8.2.17}$$

如果用 ZOH 产生的连续时间信号作为连续时间系统的输入, 来离散连续时间系统就称为 **阶跃不变离散化**.

### 4. 一阶保持器产生连续时间信号

一阶保持器 (First-Order Hold, FOH) 是采用斜坡 (Slope) 函数定义与离散信号 $\{x(kT)\colon k=0,1,2,\cdots\}$ 对应的连续时间信号, 它是用最近两个离散点的值 $x(kT)$ 和 $x(kT-T)$ 和斜率 $[x(kT)-x(kT-T)]/T$ 来产生时刻 $t=kT$ 后的连续时间信号, 用数学公式表示为

$$x(t)=x(kT)+\frac{x(kT)-x(kT-T)}{T}(t-kT),\quad kT\leqslant t<(k+1)T,\ k=0,1,2,\cdots \tag{8.2.18}$$

这可等价表示为

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[x(kT)+\frac{x(kT)-x(kT-T)}{T}(t-kT)\right][1(t-kT)-1(t-kT-T)]. \tag{8.2.19}$$

它的 Laplace 变换为

$$
\begin{aligned}
X_1^*(s) &:= \int_0^\infty x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \left[x(kT) + \frac{x(kT)-x(kT-T)}{T}(t-kT)\right][1(t-kT)-1(t-kT-T)]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^\infty \int_{kT}^{kT+T} \left[x(kT) + \frac{x(kT)-x(kT-T)}{T}(t-kT)\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^\infty \int_{kT}^{kT+T} \left[x(kT) + \frac{x(kT)-x(kT-T)}{T}(t-kT)\right]\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-st}}{-s} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \left\{ \left[x(kT) + \frac{x(kT)-x(kT-T)}{T}(t-kT)\right]\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\bigg|_{kT}^{kT+T} \right. \\
&\quad \left. - \int_{kT}^{kT+T} \frac{x(kT)-x(kT-T)}{T} \times \frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\mathrm{d}t \right\} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \left\{ x(kT)\frac{\mathrm{e}^{-skT}}{s} - [2x(kT)-x(kT-T)]\frac{\mathrm{e}^{-s(kT+T)}}{s} \right. \\
&\quad \left. - \frac{x(kT)-x(kT-T)}{T}\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s^2}\bigg|_{kT}^{kT+T} \right\} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \mathrm{e}^{-kTs}\left[\frac{x(kT)-[2x(kT)-x(kT-T)]\mathrm{e}^{-Ts}}{s} + \frac{[x(kT)-x(kT-T)](1-\mathrm{e}^{-Ts})}{Ts^2}\right] \\
&= \sum_{k=0}^\infty \mathrm{e}^{-kTs}\Big\{Tsx(kT) - Ts[2x(kT)-x(kT-T)]\mathrm{e}^{-Ts} \\
&\quad + [x(kT)-x(kT-T)](1-\mathrm{e}^{-Ts})\Big\}\frac{1}{Ts^2} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \mathrm{e}^{-kTs}\Big\{x(kT)[Ts(1-2\mathrm{e}^{-Ts}) + (1-\mathrm{e}^{-Ts})] \\
&\quad + x(kT-T)[Ts\mathrm{e}^{-Ts} - (1-\mathrm{e}^{-Ts})]\Big\}\frac{1}{Ts^2} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \Big\{x(kT)\mathrm{e}^{-kTs}[Ts(1-2\mathrm{e}^{-Ts}) + (1-\mathrm{e}^{-Ts})] \\
&\quad + x(kT-T)\mathrm{e}^{-(k-1)Ts}\mathrm{e}^{-Ts}[Ts\mathrm{e}^{-Ts} - (1-\mathrm{e}^{-Ts})]\Big\}\frac{1}{Ts^2} \\
&= X_\delta^*(s)G_1(s),
\end{aligned}
\tag{8.2.20}
$$

一阶保持器的传递函数为

$$
G_1(s) := \left\{Ts(1-2\mathrm{e}^{-Ts}) + (1-\mathrm{e}^{-Ts}) + \mathrm{e}^{-Ts}[Ts\mathrm{e}^{-Ts} - (1-\mathrm{e}^{-Ts})]\right\}\frac{1}{Ts^2}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{Ts(1-\mathrm{e}^{-Ts}) - Ts\mathrm{e}^{-Ts} + (1-\mathrm{e}^{-Ts}) + Ts\mathrm{e}^{-2Ts} - \mathrm{e}^{-Ts}(1-\mathrm{e}^{-Ts})\right\}\frac{1}{Ts^2}\\
&= \left\{Ts(1-\mathrm{e}^{-Ts}) - Ts\mathrm{e}^{-Ts}(1-\mathrm{e}^{-Ts}) + (1-\mathrm{e}^{-Ts}) - \mathrm{e}^{-Ts}(1-\mathrm{e}^{-Ts})\right\}\frac{1}{Ts^2}\\
&= (Ts - Ts\mathrm{e}^{-Ts} + 1 - \mathrm{e}^{-Ts})\frac{(1-\mathrm{e}^{-Ts})}{Ts^2}\\
&= (Ts+1)(1-\mathrm{e}^{-Ts})\frac{(1-\mathrm{e}^{-Ts})}{Ts^2}\\
&= \frac{Ts+1}{T}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}\right)^2.
\end{aligned} \tag{8.2.21}
$$

读者可以推导 $m$ 阶保持器的传递函数.

如果用 FOH 产生的连续时间信号作为连续时间系统的输入, 来离散连续时间系统就称为 **斜坡不变离散化**. 连续时间系统离散化包括脉冲不变离散化, 阶跃不变离散化, 斜坡不变离散化等.

**5. 三角保持器产生连续时间信号**

三角保持器是采用斜坡 (Slope) 函数定义与离散信号 $\{x(kT)\colon k=0,1,2,\cdots\}$ 对应的连续时间信号, 也就是将两个离散点用一线段连接起来产生连续时间信号, 它是不可实现的, 因为时刻 $t$ 的信号要用未来的信号 $x(kT+T)$ 计算, 它用数学公式表示为

$$
x(t) = x(kT) + \frac{x(kT+T)-x(kT)}{T}(t-kT), \quad kT \leqslant t < (k+1)T,\ k=0,1,2,\cdots \tag{8.2.22}
$$

这可等价表示为

$$
x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[x(kT) + \frac{x(kT+T)-x(kT)}{T}(t-kT)\right][1(t-kT) - 1(t-kT-T)]. \tag{8.2.23}
$$

它的 Laplace 变换为

$$
\begin{aligned}
X_2^*(s) &:= \int_0^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left[x(kT) + \frac{x(kT+T)-x(kT)}{T}(t-kT)\right][1(t-kT) - 1(t-kT-T)]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{kT}^{kT+T}\left[x(kT) + \frac{x(kT+T)-x(kT)}{T}(t-kT)\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{kT}^{kT+T}\left[x(kT) + \frac{x(kT+T)-x(kT)}{T}(t-kT)\right]\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-st}}{-s}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[x(kT) + \frac{x(kT+T)-x(kT)}{T}(t-kT)\right]\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\right|_{kT}^{kT+T}
\end{aligned}
$$

$$
\left. - \int_{kT}^{kT+T} \frac{x(kT+T)-x(kT)}{T} \frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s} \mathrm{d}t \right\}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ x(kT)\frac{\mathrm{e}^{-skT}}{s} - x(kT+T)\frac{\mathrm{e}^{-s(kT+T)}}{s} - \frac{x(kT+T)-x(kT)}{T} \frac{\mathrm{e}^{-st}}{s^2}\bigg|_{kT}^{kT+T} \right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-kTs}\left[ \frac{x(kT)-x(kT+T)\mathrm{e}^{-Ts}}{s} + \frac{[x(kT+T)-x(kT)](1-\mathrm{e}^{-Ts})}{Ts^2} \right] \\
&= X_\delta^*(s)G_2(s),
\end{aligned} \tag{8.2.24}
$$

读者尝试求出三角保持器的传递函数 $G_2(s)$, 并加以推广.

### 8.2.3 脉冲不变离散化

连续时间系统离散化需要一定的假设条件. 在不同假设下, 得到的离散模型是不同的. 如输入采用脉冲, 就是脉冲不变离散化, 得到离散系统的方法称为脉冲响应不变变换. 如果输入采用方波信号或阶梯信号, 即输入端采用零阶保持器, 就是阶跃不变离散化, 得到离散系统的方法称为阶跃响应不变变换. 此外还有斜坡响应不变变换、双线性变换等. 一些离散化方法可借助于 MATLAB 的帮助命令 “help c2d” 等查询其功能. 常用的离散化方法是采用零阶保持器的阶跃响应不变变换, 它保证离散系统的输出等于连续系统在采样点的输出值, 因而在计算机控制系统中广泛使用. 这里介绍脉冲响应不变变换.

假设单输入单输出连续时间系统的 **状态空间模型** (State Space Model) 描述为

$$
\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + du(t), \end{cases} \tag{8.2.25}
$$

其中 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统的 ($n$ 维) **状态向量** (State Vector), $u(t) \in \mathbb{R}$ 和 $y(t) \in \mathbb{R}$ 分别为系统的输入和输出, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$、$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ 和 $d \in \mathbb{R}$ 均为常数 **系统参数矩阵** (System Parameter Matrices). 状态空间模型 (8.2.25) 常记作 $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, d]$. 方程 (8.2.25) 的第 1 式称为 **状态方程** (State Equation), 第 2 式称为 **输出方程** (Output Equation).

参考 4.1.2 节的线性时不变状态空间系统的解, 可知系统 (8.2.25) 的 **状态解** 和输出解为

$$
\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{8.2.26}
$$

$$
y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + du(t), \quad t \geqslant t_0. \tag{8.2.27}
$$

**定理 8.2.3 脉冲不变离散化** (Impulse Invariance Discretization)

设 **采样周期** (Sampling Period) 为 $T$, 输入采用形如式 (8.2.7) 的脉冲信号作为系统输入

$$
u(t) = \sum_{j=0}^{\infty} u(jT)\delta(t-jT), \tag{8.2.28}
$$

记 $\boldsymbol{x}(kT) =: \boldsymbol{x}(k)$, 系统输出端经过采样器 (Sampler) 的输出采样 $y(k) := y(kT) = y(t)|_{t=kT}$. 则 **连续时间状态空间模型** (8.2.25) 对应的 **离散时间状态空间模型** 为

$$
\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{f}u(k), \\ \quad y(k) \quad = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(k) + du(k), \end{cases} \tag{8.2.29}
$$

其中

$$\boldsymbol{G} := \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}, \quad \boldsymbol{f} := \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{b}. \tag{8.2.30}$$

**证明**　将 $t_0 = kT$ 和 $t = (k+1)T$ 代入式 (8.2.26), 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1) := \boldsymbol{x}(kT+T) &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T-} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(kT+T-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{x}(kT) + \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{b}u(kT) \\ &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{x}(k) + \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{b}u(k),\end{aligned}$$

离散输出方程为

$$y(k) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(k) + du(k).$$

由此直接得到关系式 (8.2.30), 证毕.

对应于离散系统 (8.2.29) 的传递函数为

$$\begin{aligned}H(z) &:= \boldsymbol{c}(z\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{f} + d \\ &= \boldsymbol{c}(z\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b} + d \\ &= \boldsymbol{c}(z\boldsymbol{I}_n - \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T})^{-1}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{b} + d.\end{aligned} \tag{8.2.31}$$

**连续时间系统与离散时间系统稳定性**: 线性时不变连续时间系统 (8.2.25) 稳定的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值具有负实部, 因此离散时间系统 (8.2.29) 稳定的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的所有特征值在单位圆内.

从式 (8.2.25) 到式 (8.2.29) 的变换称为脉冲响应不变变换 (Impulse Response Invariance Transform), 简称为 **脉冲不变变换**. 当然, 还有 **阶跃响应不变变换** (Step Response Invariance Transform)、**斜坡响应不变变换** (Slope Response Invariance Transform) 等.

**例 8.2.2**　设连续系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{b}{s+a},$$

采样周期为 $T$, 采用脉冲不变离散化该系统.

**解**　传递函数 $G(s)$ 对应的连续时间状态空间模型为

$$\dot{x} = -ax + bu, \quad y = x,$$

对应的离散状态空间模型为

$$x(k+1) = \mathrm{e}^{-aT}x(k) + \mathrm{e}^{-aT}bu(k), \quad y(k) = x(k),$$

对应的离散传递函数为

$$H(z) = \frac{b\mathrm{e}^{-aT}}{z - \mathrm{e}^{-aT}}.$$

当 $a = 1, b = 1$ 时, 有

$$H(z) = \frac{\mathrm{e}^{-T}}{z - \mathrm{e}^{-T}}.$$

这个结果与例 8.2.1 和例 8.4.2 的结论不一致, 请读者分析原因.

**例 8.2.3** 采样周期为 $T$, 采用脉冲不变离散化, 将下列连续时间状态空间系统离散化.

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [2,\ 1]\boldsymbol{x}(t). \end{cases}$$

**解** 先求 **转移矩阵** $\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$,

$$(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}.$$

进行 **Laplace 逆变换** 得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} &= \mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A})^{-1}] \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是有

$$\boldsymbol{G} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-T} & 0 \\ \mathrm{e}^{-T} - \mathrm{e}^{-2T} & \mathrm{e}^{-2T} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-T} & 0 \\ \mathrm{e}^{-T} - \mathrm{e}^{-2T} & \mathrm{e}^{-2T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-T} \\ \mathrm{e}^{-T} + \mathrm{e}^{-2T} \end{pmatrix}.$$

对应的离散系统状态空间模型为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-T} & 0 \\ \mathrm{e}^{-T} - \mathrm{e}^{-2T} & \mathrm{e}^{-2T} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(k) + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-T} \\ \mathrm{e}^{-T} + \mathrm{e}^{-2T} \end{pmatrix} u(k), \\ \quad y(k) \quad = [2,\ 1]\boldsymbol{x}(k). \end{cases}$$

### 8.2.4 阶跃不变离散化

下面介绍常用的离散化方法 —— 阶跃响应不变变换, 它保证离散系统的输出等于连续系统在采样点的输出值, 因而在计算机控制系统中广泛使用.

**定理 8.2.4** **阶跃不变变换** (Step Invariance Transform) [33]

设 **采样周期** (Sampling Period) 为 $T$, 采用 **零阶保持器** (Zero-Order Hold) 将离散信号 $u(kT)$ 变为连续时间信号作为系统的输入

$$u(t) = u(kT), \quad kT \leqslant t < (k+1)T.$$

记 $\boldsymbol{x}(kT) =: \boldsymbol{x}(k)$, $u(kT) =: u(k)$, $y(kT) =: y(k)$. 则 **连续时间状态空间模型** (8.2.25) 对应的 **离散时间状态空间模型** 为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{f}u(k), \\ \quad y(k) \quad = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(k) + du(k), \end{cases} \tag{8.2.32}$$

其中

$$\boldsymbol{G} := \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}, \quad \boldsymbol{f} := \int_0^T \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}^{-1}[\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T} - \boldsymbol{I}_n]\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I}_n]\boldsymbol{b}, \tag{8.2.33}$$

其中 $\boldsymbol{I}_n$ 为 $n$ 维单位阵, 最后一个等式假设 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

**证明** 将 $t_0 = kT$ 和 $t = (k+1)T$ 代入式 (8.2.26), 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1) &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{x}(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(kT+T-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{x}(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(kT+T-\tau)}\mathrm{d}\tau\boldsymbol{b}u(kT).\end{aligned}$$

进行变量置换: $t = kT + T - \tau$, 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1) &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{x}(k) - \int_{T}^{0} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t\boldsymbol{b}u(k) \\ &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{x}(k) + \int_{0}^{T} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t\boldsymbol{b}u(k) \\ &= \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{f}u(k),\end{aligned}$$

由式 (8.2.27) 可得离散输出方程为

$$y(k) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(k) + du(k).$$

由此直接得到关系式 (8.2.33), 证毕.

从式 (8.2.25) 到式 (8.2.32) 的变换称为阶跃响应不变变换 (Step Response Invariance Transform), 简称为 **阶跃不变变换**. 前面讨论了 **脉冲响应不变变换** (Impulse Response Invariance Transform), 读者可以研究 **斜坡响应不变变换** (Slope Response Invariance Transform) 等.

**例 8.2.4** 设采样周期为 $T$, 采用阶跃不变离散化, 将下列状态空间模型 **离散化** (Discretization):

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}u(t), \\ y(t) = [2,\ 1]\boldsymbol{x}(t).\end{cases}$$

**解** 先求 **转移矩阵** $\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$,

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+2} \end{pmatrix}.$$

进行 **Laplace 逆变换** 得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} &= \mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}] \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

于是有

$$\boldsymbol{G} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-T} & 0 \\ \mathrm{e}^{-T} - \mathrm{e}^{-2T} & \mathrm{e}^{-2T} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f} = \int_0^T \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t} & 0 \\ -\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} & -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}_{t=0}^{t=T} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1-\mathrm{e}^{-T} & 0 \\ \frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-T}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2T} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2T} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\mathrm{e}^{-T} \\ \frac{3}{2}-\mathrm{e}^{-T}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2T} \end{pmatrix}.$$

对应的离散系统状态空间模型为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-T} & 0 \\ \mathrm{e}^{-T}-\mathrm{e}^{-2T} & \mathrm{e}^{-2T} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix} 1-\mathrm{e}^{-T} \\ \frac{3}{2}-\mathrm{e}^{-T}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2T} \end{pmatrix}u(k), \\ y(k) \quad =[2,\ 1]\boldsymbol{x}(k). \end{cases}$$

**例 8.2.5** 设连续系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{b}{s+a},$$

设采样周期为 $T$, 采用阶跃不变离散化, 求离散系统的传递函数 $H(z)$.

**解** 其对应的连续时间状态空间模型为

$$\dot{x}=-ax+bu, \quad y=x,$$

采用阶跃不变变换离散化得到的离散状态空间模型为

$$x(k+1)=\mathrm{e}^{-aT}x(k)+a^{-1}(1-\mathrm{e}^{-aT})bu(k), \quad y(k)=x(k),$$

对应的阶跃不变离散传递函数为

$$H(z)=\frac{(1-\mathrm{e}^{-aT})b}{a(z-\mathrm{e}^{-aT})}.$$

当 $a=1, b=1$ 时, 有

$$H(z)=\frac{1-\mathrm{e}^{-T}}{z-\mathrm{e}^{-T}}.$$

这个例子给出一般性结论: 阶跃不变变换离散时间系统的增益 $H(1)=\dfrac{b}{a}$ 等于连续时间系统的增益 $G(0)=\dfrac{b}{a}$.

**例 8.2.6** 设 $T$ 为采样周期, 采用阶跃不变离散化, 离散化下列连续时间系统,

$$G(s)=\frac{d}{(s+a)(s+b)}=\frac{d}{b-a}\left[\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right], \quad a\neq b.$$

**解** 传递函数 $G(s)$ 对应的状态空间模型为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}u(t),$$

$$y(t)=\left[\frac{d}{b-a},\ -\frac{d}{b-a}\right]\boldsymbol{x}(t).$$

系统的状态转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t):=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\mathrm{diag}[\mathrm{e}^{-at},\ \mathrm{e}^{-bt}].$$

根据式 (8.2.33) 计算

$$G = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T} = \mathrm{diag}[\mathrm{e}^{-aT},\ \mathrm{e}^{-bT}],$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f} &= \boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I}_n]\boldsymbol{b}\\ &= \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-aT}-1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-bT}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1}(1-\mathrm{e}^{-aT}) \\ b^{-1}(1-\mathrm{e}^{-bT}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

阶跃不变变换离散化得到的离散状态空间模型为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1) &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-aT} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-bT} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(k) + \begin{pmatrix} a^{-1}(1-\mathrm{e}^{-aT}) \\ b^{-1}(1-\mathrm{e}^{-bT}) \end{pmatrix} u(k),\\ y(k) &= \left[\frac{d}{b-a},\ -\frac{d}{b-a}\right]\boldsymbol{x}(k).\end{aligned}$$

对应的阶跃不变离散传递函数为

$$\begin{aligned}H(z) &= \left[\frac{d}{b-a},\ -\frac{d}{b-a}\right] \begin{pmatrix} z-\mathrm{e}^{-aT} & 0 \\ 0 & z-\mathrm{e}^{-bT} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a^{-1}(1-\mathrm{e}^{-aT}) \\ b^{-1}(1-\mathrm{e}^{-bT}) \end{pmatrix}\\ &= \frac{d}{b-a}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-aT}}{a(z-\mathrm{e}^{-aT})} - \frac{1-\mathrm{e}^{-bT}}{b(z-\mathrm{e}^{-bT})}\right]\\ &= \frac{d}{b-a}\frac{b(1-\mathrm{e}^{-aT})(z-\mathrm{e}^{-bT}) - a(1-\mathrm{e}^{-bT})(z-\mathrm{e}^{-aT})}{ab(z-\mathrm{e}^{-aT})(z-\mathrm{e}^{-bT})}\\ &= \frac{d}{b-a}\frac{[b(1-\mathrm{e}^{-aT}) - a(1-\mathrm{e}^{-bT})]z - [b(1-\mathrm{e}^{-aT})\mathrm{e}^{-bT} - a(1-\mathrm{e}^{-bT})\mathrm{e}^{-aT}]}{ab(z-\mathrm{e}^{-aT})(z-\mathrm{e}^{-bT})}\\ &= \frac{d}{b-a}\frac{(b-a-b\mathrm{e}^{-aT}+a\mathrm{e}^{-bT})z + [-b\mathrm{e}^{-bT}+a\mathrm{e}^{-aT}+(b-a)\mathrm{e}^{-aT}\mathrm{e}^{-bT}]}{ab(z-\mathrm{e}^{-aT})(z-\mathrm{e}^{-bT})}.\end{aligned}$$

## 8.3　离散时间系统模型及其转化

本节研究离散时间状态空间系统的解, 线性时不变离散时间系统的传递函数、差分方程、状态空间模型间的互相转化, 以及离散时间状态空间模型的连续化问题.

### 8.3.1　离散时间状态空间模型及其解

单输入单输出时不变离散时间系统状态空间模型如下,

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{f}u(k), \\ \quad y(k) \quad = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(k) + du(k), \end{cases} \tag{8.3.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态向量, $u(k)$ 和 $y(k)$ 分别为系统的输入和输出, $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{n\times n}$、$\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n$、$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ 和 $d \in \mathbb{R}$ 均为常数矩阵. 状态空间模型 (8.3.1) 常记作 $[\boldsymbol{G}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{c}, d]$.

把式 (8.3.1) 化成算子形式 $z\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{f}u(k)$. 求解得到 $\boldsymbol{x}(k) = (z\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{f}u(k)$. 于是有

$$y(k) = \boldsymbol{c}(z\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{f}u(k) + du(k) = [\boldsymbol{c}(z\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{f} + d]u(k).$$

由此可得从输入 $u(k)$ 到输出 $y(k)$ 的传递函数

$$H(z) := \boldsymbol{c}(z\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{f} + d = \frac{\boldsymbol{c}\,\mathrm{adj}[z\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{G}]\boldsymbol{f} + d\det[z\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{G}]}{\det[z\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{G}]}. \tag{8.3.2}$$

它揭示了离散系统传递函数 $H(z)$ 与状态空间模型 $[\boldsymbol{G}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{c}, d]$ 之间的关系.

由于状态方程 (8.3.1) 中有 $(n^2+2n+1) = (n+1)^2$ 个参数, 而式 (8.3.2) 中传递函数 $H(z)$ 有理分式中有 $2n+1$ 个独立参数. 而规范状态空间模型中也只有 $2n+1$ 个参数, 因此一般把状态空间模型化成差分方程或直接采用规范状态空间模型进行辨识 [34–38]. 与连续系统一样, 离散时间系统状态空间模型也有 4 种规范型, 规范型的结构和得到规范型所使用的变换方法完全相同, 这里不一一讨论.

不断迭代, 可以得到状态空间系统 (8.3.1) 的状态解和输出分别为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(k) &= \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k-1) + \boldsymbol{f}u(k-1)\\
&= \boldsymbol{G}[\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k-2) + \boldsymbol{f}u(k-2)] + \boldsymbol{f}u(k-1)\\
&= \boldsymbol{G}^2\boldsymbol{x}(k-2) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{f}u(k-2) + \boldsymbol{f}u(k-1)\\
&= \boldsymbol{G}^2[\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k-3) + \boldsymbol{f}u(k-3)] + \boldsymbol{G}\boldsymbol{f}u(k-2) + \boldsymbol{f}u(k-1)\\
&= \boldsymbol{G}^3\boldsymbol{x}(k-3) + \boldsymbol{G}^2\boldsymbol{f}u(k-3) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{f}u(k-2) + \boldsymbol{f}u(k-1)\\
&= \cdots\\
&= \boldsymbol{G}^k\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{G}^{k-1}\boldsymbol{f}u(0) + \boldsymbol{G}^{k-2}\boldsymbol{f}u(1) + \cdots + \boldsymbol{G}\boldsymbol{f}u(k-2) + \boldsymbol{f}u(k-1)\\
&= \boldsymbol{G}^k\boldsymbol{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{G}^{k-i-1}\boldsymbol{f}u(i),
\end{aligned} \tag{8.3.3}$$

$$y(k) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{G}^k\boldsymbol{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{c}\boldsymbol{G}^{k-i-1}\boldsymbol{f}u(i) + du(k), \quad k \geqslant 0. \tag{8.3.4}$$

式中 $\boldsymbol{G}^k$ 为状态转移矩阵, $\boldsymbol{x}(0)$ 为状态初始值.

### 8.3.2 差分方程化为状态空间模型

差分方程模型可以化为状态空间模型, 也可以化为 4 种规范型, 这里仅给出差分方程 (8.1.1) 化为控制器规范型的方法. 差分方程 (8.1.1) 的算子形式为

$$y(k) = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \cdots + b_nz^{-n}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \cdots + a_nz^{-n}}u(k). \tag{8.3.5}$$

令

$$(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \cdots + a_nz^{-n})\xi(k) = u(k).$$

利用移位算子的性质, 可得

$$\xi(k) = -a_1\xi(k-1) - a_2\xi(k-2) - \cdots - a_n\xi(k-n) + u(k).$$

于是有

$$y(k) = (b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \cdots + b_nz^{-n})\xi(k)$$

$$=b_1\xi(k-1)+b_2\xi(k-2)+\cdots+b_n\xi(k-n).$$

再令

$$\begin{cases}x_1(k)=\xi(k-1),\\ x_2(k)=\xi(k-2),\\ \quad\vdots\\ x_n(k)=\xi(k-n).\end{cases}$$

则有

$$\begin{cases}x_1(k+1)=\xi(k)=-a_1x_1(k)-a_2x_2(k)-\cdots-a_nx_n(k)+u(k),\\ x_2(k+1)=x_1(k),\\ x_3(k+1)=x_2(k),\\ \quad\vdots\\ x_n(k+1)=x_{n-1}(k),\\ y(k)=b_1x_1(k)+b_2x_2(k)+\cdots+b_nx_n(k).\end{cases}$$

把以上各式写成矩阵形式, 就得到差分方程 (8.1.1) 的控制器规范型实现为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}-a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}u(k),\\ y(k)=[b_1,b_2,\cdots,b_n]\boldsymbol{x}(k).\end{cases}\tag{8.3.6}$$

这里可以看出, 差分方程模型对应的**离散系统控制器规范型与连续系统控制器规范型结构完全一样**, **其他几种规范型也完全一样**, 故不一一讨论.

### 8.3.3 离散状态空间模型化为差分方程

由控制器规范型和观测器规范型可以直接写出系统的传递函数和差分方程. 但是所给出的状态空间模型不一定是规范型, 下面讨论化一般状态空间模型为差分方程的方法. 式 (8.3.1) 用移位算子表示为

$$\begin{cases}z\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{f}u(k),\\ \ y(k)\ =\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(k)+du(k).\end{cases}$$

解得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k)&=(z\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{f}u(k),\\ y(k)&=\boldsymbol{c}(z\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{f}u(k)+du(k)\\ &=\frac{\boldsymbol{c}\,\mathrm{adj}[z\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{G}]\boldsymbol{f}}{\alpha(z)}u(k)+du(k),\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{adj}[z\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{G}]=(z\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{G})$ 的 **伴随矩阵**, $\alpha(z)$ 为矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的 **特征多项式**, 定义为

$$\alpha(z):=\det[z\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{G}]=z^n+\alpha_1z^{n-1}+\alpha_2z^{n-2}+\cdots+\alpha_n.$$

它们之间有关系

$$(z\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{G})^{-1}=\frac{\operatorname{adj}[z\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{G}]}{\alpha(z)}.$$

故有

$$\begin{aligned}
&\alpha(z)y(k)=\{\boldsymbol{c}\operatorname{adj}[z\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{G}]\boldsymbol{f}+d\alpha(z)\}u(k),\\
&z^{-n}\alpha(z)y(k)=z^{-n}\{\boldsymbol{c}\operatorname{adj}[z\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{G}]\boldsymbol{f}+d\alpha(z)\}u(k),\\
&(1+\alpha_1z^{-1}+\alpha_2z^{-2}+\cdots+\alpha_nz^{-n})y(k)=z^{-n}\{\boldsymbol{c}\operatorname{adj}[z\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{G}]\boldsymbol{f}+d\alpha(z)\}u(k).
\end{aligned}$$

将上式展开即为状态空间模型的差分方程形式.

**例 8.3.1** 将状态空间模型

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}u(k),\\ \quad y(k)\quad=[2,\ 1]\boldsymbol{x}(k)\end{cases}$$

化为差分方程模型.

**解** 对于本例, 有

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=[2,\ 1],\quad d=0.$$

所以

$$\begin{aligned}
y(k)&=\boldsymbol{c}(z\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{f}u(k)+du(k)\\
&=\boldsymbol{c}\begin{pmatrix}z+1 & -1\\ -1 & z+2\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{f}u(k)+du(k)\\
&=[2,\ 1]\frac{\begin{pmatrix}z+2 & 1\\ 1 & z+1\end{pmatrix}}{z^2+3z+1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}u(k)\\
&=\frac{[2z+5, z+3]}{z^2+3z+1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}u(k)\\
&=\frac{4z+11}{z^2+3z+1}u(k).
\end{aligned}$$

或

$$(z^2+3z+1)y(k)=(4z+11)u(k).$$

两边同乘以 $z^{-2}$, 可得差分方程:

$$y(k)+3y(k-1)+y(k-2)=4u(k-1)+11u(k-2).$$

### 8.3.4 离散时间状态空间模型连续化

从式 (8.2.33) 可以看出: 对于给定的采样周期 $T$, 任何连续系统 (8.2.25) 对应的离散系统 (8.2.32) 总是唯一的, 即 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 由 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 唯一确定. 那么, 将离散模型 (8.2.32) 化为连续

模型 (8.2.25) 的反变换中, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是否能由 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 唯一确定? 也就是说, 能否由式 (8.2.33) 求得唯一的 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$? 在一般情况下答案是否定的, 因为对于任意整数 $i$, 下式成立:

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T+\mathrm{j}2i\pi\boldsymbol{I}_n}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}=\boldsymbol{G},\quad \mathrm{j}=\sqrt{-1}.$$

所以从式 (8.2.33) 可求得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\frac{1}{T}\mathrm{Ln}\boldsymbol{G}\\&=\frac{1}{T}\ln\boldsymbol{G}+\mathrm{j}\frac{2i\pi}{T}\boldsymbol{I}_n,\quad i=0,\pm1,\pm2,\cdots,\end{aligned}\tag{8.3.7}$$

$$\boldsymbol{b}=\left[\int_0^T\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t\right]^{-1}\boldsymbol{f}.\tag{8.3.8}$$

这里 $\ln\boldsymbol{G}$ 表示 $\boldsymbol{G}$ 的主值或主对数 (Principal Logarithm). 上式说明: 对于给定的 $\boldsymbol{G}$, 我们不能确定唯一的 $\boldsymbol{A}$. 那么采样周期满足什么条件时, 由离散系统参数矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 可求得唯一的连续系统参数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 最近的研究表明: 如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是实数, 那么我们可以确定唯一的 $\boldsymbol{A}$, 此时 $i=0$; 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有复特征值, 假设我们知道特征值 $\lambda_i[\boldsymbol{A}]$ 的虚部上界 $\omega_{\max}$, 即

$$\mathrm{Im}(\lambda_i[\boldsymbol{A}])\leqslant\omega_{\max},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

那么只要采样足够快 (采样频率 $\omega_s$ 大于 $\omega_{\max}$), 即采样周期足够小 ($T\leqslant2\pi/\omega_{\max}$), 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以唯一确定 $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{T}\ln\boldsymbol{G}$, 可参见第 9 章和文献 [5,6]. 我们将连续系统离散化采样周期条件, 即采样频率条件称为 **扩展奈奎斯特 — 香农采样定理**. 因为奈奎斯特 — 香农采样定理是关于连续时间信号的采样与唯一恢复问题, 而这里的连续时间系统离散化以及连续时间系统恢复问题不涉及信号采样, 涉及的是连续模型从离散模型的恢复问题.

考察级数:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots,\quad |x|<1.$$

两边对 $x$ 从 $x=0$ 到 $x$ 求定积分得到

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots.$$

类似地, 在 $\boldsymbol{A}$ 可以唯一确定条件下, 从式 (8.3.7) 可知: 确定 $\boldsymbol{A}$ 的关键是计算 $\ln\boldsymbol{G}$. 可用下列方法确定 $\ln\boldsymbol{G}$. 用级数展开 $\ln\boldsymbol{G}$ 得到

$$\begin{aligned}\ln\boldsymbol{G}&=\ln[\boldsymbol{I}_n+(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I}_n)]\\&=(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I}_n)-\frac{(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I}_n)^2}{2}+\frac{(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I}_n)^3}{3}-\frac{(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I}_n)^4}{4}+\cdots.\end{aligned}$$

根据凯莱 – 哈密尔顿引理 (3.5.7), 上式可以写为

$$\ln\boldsymbol{G}=\ln[\boldsymbol{I}_n+(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I}_n)]$$

$$= \alpha_0 \boldsymbol{I}_n + \alpha_1(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I}_n) + \alpha_2(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I}_n)^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I}_n)^{n-1}. \tag{8.3.9}$$

用 $(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I}_n)$ 的特征值 $s_i$ 代替式 (8.3.9) 的 $(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I}_n)$ 得

$$\ln(1 + s_i) = \alpha_0 + \alpha_1 s_i + \alpha_2 s_i^2 + \cdots + \alpha_{n-1} s_i^{n-1}.$$

若 $(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I}_n)$ 的第 $i$ 个特征值为 $m$ 重时, 则上式对 $s_i$ 求 $(m-1)$ 次导数, 共得 $n$ 个方程, 可解出 $\alpha_i$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$, 从而求得 $\ln \boldsymbol{G}$.

当 $s_i$ 互不相同时, 有

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_1^2 & \cdots & s_1^{n-1} \\ 1 & s_2 & s_2^2 & \cdots & s_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & s_n & s_n^2 & \cdots & s_n^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ln(1+s_1) \\ \ln(1+s_2) \\ \vdots \\ \ln(1+s_n) \end{pmatrix}.$$

**例 8.3.2** 将例 8.2.3 离散化后的模型连续化, 即已知

$$\boldsymbol{G} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-T} & 0 \\ \mathrm{e}^{-T} - \mathrm{e}^{-2T} & \mathrm{e}^{-2T} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 - \mathrm{e}^{-T} \\ \dfrac{3}{2} - \mathrm{e}^{-T} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2T} \end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$.

**证明** 矩阵 $(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I}_2)$ 的特征值为 $s_1 = \mathrm{e}^{-T} - 1$, $s_2 = \mathrm{e}^{-2T} - 1$. 由于 $s_1 \neq s_2$, 故

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 1 & s_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ln(1+s_1) \\ \ln(1+s_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-T} - 1 \\ 1 & \mathrm{e}^{-2T} - 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ln \mathrm{e}^{-T} \\ \ln \mathrm{e}^{-2T} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{-2T} - \mathrm{e}^{-T}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2T} - 1 & 1 - \mathrm{e}^{-T} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -T \\ -2T \end{pmatrix} \\
&= \frac{T}{\mathrm{e}^{-T} - \mathrm{e}^{-2T}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2T} - 2\mathrm{e}^{-T} + 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \frac{1}{T} \ln \boldsymbol{G} = \frac{1}{T}[\alpha_0 \boldsymbol{I} + \alpha_1(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I})] \\
&= \frac{1}{T} \frac{T}{\mathrm{e}^{-T} - \mathrm{e}^{-2T}} \left( (\mathrm{e}^{-2T} - 2\mathrm{e}^{-T} + 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-T} - 1 & 0 \\ \mathrm{e}^{-T} - \mathrm{e}^{-2T} & \mathrm{e}^{-2T} - 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{-T} - \mathrm{e}^{-2T}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2T} - \mathrm{e}^{-T} & 0 \\ \mathrm{e}^{-T} - \mathrm{e}^{-2T} & 2\mathrm{e}^{-2T} - 2\mathrm{e}^{-T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 见例 8.2.4, 由式 (8.2.33) 知

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I}_2)^{-1} \boldsymbol{f}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-T}-1 & 0 \\ \mathrm{e}^{-T}-\mathrm{e}^{-2T} & \mathrm{e}^{-2T}-1 \end{pmatrix}^{-1} \boldsymbol{f} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathrm{e}^{-T}-1)^{-1} & 0 \\ \mathrm{e}^{-T}(\mathrm{e}^{-2T}-1)^{-1} & (\mathrm{e}^{-2T}-1)^{-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{f} \\
&= \begin{pmatrix} -(\mathrm{e}^{-T}-1)^{-1} & 0 \\ (\mathrm{e}^{-T}-1)^{-1}-2\mathrm{e}^{-T}(\mathrm{e}^{-2T}-1)^{-1} & -2(\mathrm{e}^{-2T}-1)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\mathrm{e}^{-T} \\ \dfrac{3}{2}-\mathrm{e}^{-T}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2T} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

本节离散系统重构对应的连续系统方法即将公布到国内有关刊物上 [39].

## 8.4 连续系统与离散系统间的变换

本节讨论线性时不变连续时间系统传递函数 $G(s)$ 与线性时不变离散时间系统离散传递函数 $H(z)$ 之间的变换, 包括欧拉 (Euler) 变换、双线性变换、笔者提出的广义双线性变换, 基于脉冲不变离散化的 $G(s)$ 与 $H(z)$ 间的 **脉冲不变 Z–S 变换** [29, 30], 以及最新研究结果 "基于零阶保持器阶跃不变离散化的 **阶跃不变 Z–S 变换**", 这些成果将陆续公布到国内外学术刊物上 [31, 32].

### 8.4.1 欧拉变换和双线性变换

**1. 欧拉变换**

从 8.2.2 节可知, Z 变换算子$z$与 **拉普拉斯变换** (Laplace Transform) 算子$s$间有如下关系,

$$z = \mathrm{e}^{Ts},$$

其中 $T$ 为采样周期. 用泰勒 (Taylor) 级数展开, 作如下一次近似,

$$z = \mathrm{e}^{Ts} \approx 1 + Ts, \tag{8.4.1}$$

或

$$s = \frac{z-1}{T}. \tag{8.4.2}$$

式 (8.4.1) 和式 (8.4.2) 即为 **欧拉变换** (Euler Transform). 因此, 连续系统传递函数 $G(s)$ 与离散系统传递函数 $H(z)$ 之间的近似变换关系为

$$
\begin{cases}
H(z) := G(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{T}}, \\
G(s) := H(z)\Big|_{z=1+Ts}.
\end{cases} \tag{8.4.3}
$$

**2. 双线性变换**

用泰勒 (Taylor) 级数展开, 对 $z = \mathrm{e}^{Ts}$ 作下列一次近似,

$$z = \mathrm{e}^{Ts} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{T}{2}s}}{\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s}} \approx \frac{1+\dfrac{T}{2}s}{1-\dfrac{T}{2}s} = \frac{2+Ts}{2-Ts}, \tag{8.4.4}$$

或

$$s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}. \tag{8.4.5}$$

式 (8.4.4) 和式 (8.4.5) 即为 **双线性变换** (Bilinear Transform), 也称 Tustin 变换. 因此, 连续系统传递函数 $G(s)$ 与离散系统传递函数 $H(z)$ 之间的近似变换关系为

$$\begin{cases} H(z):=G(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}, \\ G(s)\ =H(z)\Big|_{z=\frac{2+Ts}{2-Ts}}. \end{cases} \tag{8.4.6}$$

**例 8.4.1** 假设连续系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{b}{s+a},$$

利用 Euler 变换 (8.4.2) 有

$$H(z)=G(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{T}}=\frac{b}{s+a}\Big|_{s=\frac{z-1}{T}}=\frac{bT}{z+aT-1},$$

$$G(s)=H(z)\Big|_{z=1+Ts}=\frac{bT}{z+aT-1}\Big|_{z=1+Ts}=\frac{b}{s+a}.$$

Euler 变换下离散系统的增益与连续系统的相等, 即 $H(1)=G(0)=\frac{b}{a}$. 利用双线性变换 (8.4.5) 有

$$H(z)=G(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}=\frac{b}{s+a}\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}=\frac{bT(z+1)}{(aT+2)z+(aT-2)},$$

$$G(s)=H(z)\Big|_{z=\frac{2+Ts}{2-Ts}}=\frac{bT(z+1)}{(aT+2)z+(aT-2)}\Big|_{z=\frac{2+Ts}{2-Ts}}=\frac{b}{s+a}.$$

由此可见: 双线性变换下离散系统的增益 $H(1)=\frac{b}{a}$ 与连续系统的增益 $G(0)=\frac{b}{a}$ 也相等. 然而 Euler 变换和双线性变换是一种近似变换, 它们不保证离散系统的输出等于连续系统输出在采样点的值.

**3. 广义双线性变换**

下面讨论一种具有更普遍意义的近似变换. 用泰勒级数展开取其一次项近似, 可得

$$z=\mathrm{e}^{Ts}=\frac{\mathrm{e}^{asT}}{\mathrm{e}^{-(1-a)Ts}}\approx\frac{1+aTs}{1-(1-a)Ts},\quad 0\leqslant a\leqslant 1, \tag{8.4.7}$$

或

$$s=\frac{1}{T}\frac{z-1}{a+(1-a)z}=\frac{1}{(1-a)T}\frac{z-1}{z+\frac{a}{1-a}}. \tag{8.4.8}$$

式 (8.4.7) 和式 (8.4.8) 是本书作者提出的 **广义双线性变换** (Generalized Bilinear Transform)[29]:

$$\begin{cases} H(z)=G(s)\Big|_{s=\frac{1}{(1-a)T}\frac{z-1}{z+a/(1-a)}}, \\ G(s)=H(z)\Big|_{z=\frac{1+aTs}{1-(1-a)Ts}}. \end{cases} \tag{8.4.9}$$

这个变换中包含一个参数 $a$, 当 $a$ 取不同值时就得到不同双线性变换. 因此, 针对不同的系统, 如惯性系统、典型系统, 根据采样周期与系统最小时间常数的比值 (或与稳定系统极点最小负实部的比值) 的大小, 研究 $a$ 的最佳取值, 使得离散系统与连续系统的输出最接近 [6]. 当 $a=0.5$ 时, 广义双线性变换退化为双线性变换. 当 $a=0$, $a=\frac{1}{3}$, $a=\frac{1}{2}$, $a=\frac{2}{3}$, $a=1$ 和 $a\in(0,1)$ 时, 广义双线性变换如表 8.4.1 所示.

**表 8.4.1 广义双线性变换表**

| 序号 | $a$ 值 | 变换式 | | 名称 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $z=\frac{1}{1-Ts}$, | $s=\frac{1}{T}\frac{z-1}{z}$ | |
| 2 | $\frac{1}{3}$ | $z=\frac{3+Ts}{3-2Ts}$, | $s=\frac{3}{2T}\frac{z-1}{z+\frac{1}{2}}$ | |
| 3 | $\frac{1}{2}$ | $z=\frac{2+Ts}{2-Ts}$, | $s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$ | 双线性变换 |
| 4 | $\frac{2}{3}$ | $z=\frac{3+2Ts}{3-Ts}$, | $s=\frac{3}{T}\frac{z-1}{z+2}$ | |
| 5 | 1 | $z=1+Ts$, | $s=\frac{1}{T}(z-1)$ | Euler 变换 |
| 6 | $(0,1)$ | $z=\frac{1+aTs}{1-(1-a)Ts}$, | $s=\frac{1}{(1-a)T}\frac{z-1}{z+a/(1-a)}$ | |

### 8.4.2 脉冲不变 Z–S 变换

欧拉变换、双线性变换、广义双线性变换都是近似变换, 方法简单, 但是它们不保证离散系统的输出等于连续系统输出在采样点的值. 本书作者在总结和发展学术前辈研究成果的基础上, 在其博士学位论文中, 根据 **奈奎斯特 – 香农采样定理** (Nyquist–Shannon Sampling Theorem, **Nyquist–Shannon 采样定理**) 和 **恢复定理** 推导了脉冲不变 Z–S 变换, 它可以保证连续时间模型与离散时间模型转换的精度. 一些相关工作可参见文献 [29, 30, 40, 41].

设 $G(s)$ 为连续系统传递函数, $H(z)$ 为离散系统传递函数. 一般从 $G(s)$ 获得 $H(z)$ 的步骤如下,

$$G(s)\xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}}g(t)\xrightarrow{t=kT}g(kT)\xrightarrow{Z}H(z), \tag{8.4.10}$$

其中 $\mathscr{L}^{-1}$ 为拉普拉斯反变换, $T$ 为采样周期, $Z$ 为 Z 变换. 实现过程: 先把 $G(s)$ 进行拉普拉斯反变换得到脉冲响应 $g(t)$, 对 $g(t)$ 进行采样, 得到采样序列 $g(kT)=g(t)|_{t=kT}$ $(k=0,1,2,\cdots)$, 再对 $g(kT)$ 进行 Z 变换得到 $H(z)$.

从 $H(z)$ 获得 $G(s)$ 的步骤如下,

$$H(z)\xrightarrow{Z^{-1}}g(kT)\xrightarrow{f(*)}g(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}G(s), \tag{8.4.11}$$

其中 $Z^{-1}$ 为反 Z 变换, 即 **逆 Z 变换** (Inverse Z Transform) 符号, $f(*)$ 为 **插值函数** (Interpolation Function), $\mathscr{L}$ 为拉普拉斯变换. 实现过程: 先把 $H(z)$ 进行逆 Z 变换得到离散信号 $g(kT)$, 对 $g(kT)$ 进行插值得到连续时间信号 $g(t)$, 再对 $g(t)$ 进行拉普拉斯变换得到 $G(s)$.

在一般情况下, 若给定 $G(s)$ 和采样周期 $T$, 由 $G(s)$ 得到的 $H(z)$ 是唯一的; 由 $H(z)$ 得到的 $G(s)$ 不是唯一的, 因为由 $H(z)$ 得到的离散序列 $g(kT)$ 对应的连续时间信号 $g(t)$ 是不唯一的. 为了从离散模型 $H(z)$ 唯一恢复连续模型 $G(s)$, 必须对采样周期加以限制. 具体地说, 我们将信号采样恢复的采样周期满足奈奎斯特 — 香农采样定理扩展到传递函数, 如果 $G(s)$ 有复数极点, 假设知道复数极点的虚部上界 $\omega_{\max}$, 那么只要采样周期满足 $T \leqslant 2\pi/\omega_{\max}$ 即可; 如果 $G(s)$ 的极点都是实数 (即 $\omega_{\max}=0$), 那么对于任意采样周期, $G(s)$ 都是可以从 $H(z)$ 唯一确定的.

因为拉普拉斯变换需要一个连续时间信号, 所以必须对离散信号 $\{g(kT)\colon k=0,1,2,\cdots\}$ 进行插值, 得到连续时间信号 $g(t)=f(*)g(kT)$ (参见 8.2 节). 选择不同的插值函数 $f(*)$ 就得到不同的 Z–S 变换. 根据香农恢复定理进行插值, 使得在脉冲函数输入下连续时间系统输出在采样点的值等于离散系统的输出, 就得到 **脉冲不变 Z–S 变换**; 采用零阶保持器, 使得在阶跃函数 (阶梯函数) 输入下连续时间系统输出在采样点的值等于离散系统的输出, 就得到 **阶跃不变 Z–S 变换**.

计算过程 (8.4.10)~(8.4.11) 特别烦琐, 我们期望找到一个简单的通用方法, 就是 **Z–S 变换**, 包括脉冲不变 Z–S 变换、阶跃不变 Z–S 变换、斜坡不变 Z–S 变换等, 它可以由 $G(s)$ 直接求 $H(z)$, 也可以由 $H(z)$ 直接求 $G(s)$.

**定理 8.4.1 脉冲不变 Z–S 变换** (Z–S Transform) [25, 29, 30]

假设采样周期 $T$ 满足扩展奈奎斯特 — 香农采样定理, 有理传递函数 $G(s)$ 与离散传递函数 $H(z)$ 构成下列 **脉冲不变 Z–S 变换** 对:

$$H(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{o} G(s)\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}\mathrm{d}s, \tag{8.4.12}$$

$$G(s)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{o} \frac{H(z)}{z\left(s-\dfrac{1}{T}\ln z\right)}\mathrm{d}z, \tag{8.4.13}$$

其中线积分路径 $o$ 是一条包含 $G(s)$ 或 $H(z)$ 所有 **极点** (Pole) 的逆时针方向绕原点一周的封闭曲线. 用 **留数** (Residue) 形式给出的脉冲不变 Z–S 变换对为

$$\begin{aligned}H(z)&=\sum\left[G(s)\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}\text{在}G(s)\text{极点处的留数}\right]\\&=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(n_i-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n_i-1}}{\mathrm{d}s^{n_i-1}}\left[(s-s_i)^{n_i}G(s)\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}\right]_{s=s_i},\end{aligned} \tag{8.4.14}$$

$$\begin{aligned}G(s)&=\sum\left[\frac{H(z)}{z\left(s-\dfrac{1}{T}\ln z\right)}\text{在}H(z)\text{极点处的留数}\right]\\&=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(n_i-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n_i-1}}{\mathrm{d}z^{n_i-1}}\left[(z-z_i)^{n_i}\frac{H(z)}{z\left(s-\dfrac{1}{T}\ln z\right)}\right]_{z=z_i},\end{aligned} \tag{8.4.15}$$

其中 $s_i$ 是 $G(s)$ 的极点, $z_i$ 是 $H(z)$ 的极点, $n_i$ 是极点的阶数.

以上是脉冲响应不变变换的 Z–S 变换对 (简称脉冲不变 Z–S 变换), 还有阶跃响应不变变换的 Z–S 变换对 (简称阶跃不变 Z–S 变换). 只有当连续系统在采样时刻输入为脉冲信号时, 脉冲不变 Z–S 变换离散系统的输出等于连续系统输出在采样点的值.

**证明** 拉普拉斯变换和拉普拉斯逆变换公式分别为

$$G(s)=\int_0^{\infty} g(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t, \tag{8.4.16}$$

$$\begin{aligned} g(t)&=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{c'-\mathrm{j}\infty}^{c'+\mathrm{j}\infty} G(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s \\ &=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_o G(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{8.4.17}$$

这里 $c'$ 是使 $G(s)$ 所有极点在直线 $s=c'$ 右边的一个常数. 脉冲响应采样序列 (Impulse Response Sequence) $g(kT)=g(t)|_{t=kT}$ 的 Z 变换为

$$H(z)=\sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k}. \tag{8.4.18}$$

将式 (8.4.17) 代入式 (8.4.18) 可得

$$\begin{aligned} H(z)&=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_o G(s)\mathrm{e}^{kTs}\mathrm{d}s\right]z^{-k}=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_o G(s)\sum_{k=0}^{\infty}(z^{-1}\mathrm{e}^{Ts})^k\mathrm{d}s \\ &=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_o G(s)\frac{1}{1-z^{-1}\mathrm{e}^{Ts}}\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_o G(s)\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{8.4.19}$$

利用 **奈奎斯特 — 香农采样定理与恢复定理** 8.2.1, 有

$$g(t)=f(*)g(kT)=\sum_{k=0}^{\infty} g(kT)\frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-kT)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}.$$

当 $g(t)=z^{t/T}$ 时, 我们有

$$z^{t/T}=\sum_{k=0}^{\infty} z^k\frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-kT)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}.$$

因此, $g(t)$ 的拉普拉斯变换可表示为

$$\begin{aligned} G(s)&=\int_0^{\infty} g(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\ &=\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} g(kT)\frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-kT)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{8.4.20}$$

将 **逆 Z 变换** (Inverse Z Transform) 公式

$$g(kT)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_o H(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

代入式 (8.4.20) 可得

$$\begin{aligned}
G(s)&=\int_0^\infty\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_o H(z)z^{k-1}\mathrm{d}z\frac{\sin\dfrac{\pi}{T}(t-kT)}{\dfrac{\pi}{T}(t-kT)}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_o\frac{H(z)}{z}\left[\int_0^\infty\sum_{k=0}^\infty z^k\frac{\sin\dfrac{\pi}{T}(t-kT)}{\dfrac{\pi}{T}(t-kT)}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}z\\
&=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_o\frac{H(z)}{z}\left[\int_0^\infty z^{\frac{t}{T}}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}z\\
&=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_o\frac{H(z)}{z}\frac{1}{s-\dfrac{1}{T}\ln z}\mathrm{d}z\\
&=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_o\frac{H(z)}{z\left(s-\dfrac{1}{T}\ln z\right)}\mathrm{d}z. \qquad (8.4.21)
\end{aligned}$$

式 (8.4.19) 和式 (8.4.21) 构成了脉冲不变 Z–S 变换对.

相关内容可参见笔者指导的研究生杨丹的硕士学位论文 “控制系统模型变换及其输出误差分析” [42] 和文献 [31,32,43].

**例 8.4.2** 设系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s+1},$$

这个系统的增益为 $K=G(s)|_{s=0}=G(0)=1$. 利用脉冲不变 Z–S 变换对 (8.4.12)~(8.4.13), 有

$$\begin{aligned}
H(z)&=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_o\frac{1}{s+1}\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}\mathrm{d}s\\
&=(s+1)\frac{1}{s+1}\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}\bigg|_{s=-1}=\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-T}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(s)&=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_o\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-T}}\frac{1}{z\left(s-\dfrac{1}{T}\ln z\right)}\mathrm{d}z\\
&=(z-\mathrm{e}^{-T})\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-T}}\frac{1}{z\left(s-\dfrac{1}{T}\ln z\right)}\Bigg|_{z=\mathrm{e}^{-T}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{s - \dfrac{1}{T}\ln \mathrm{e}^{-T}} = \frac{1}{s+1}.$$

这里用脉冲不变 Z–S 变换得到的 $H(z)$ 与例 8.2.1 的结果是一致的, 离散模型的增益为 $H(1) = 1/(1-\mathrm{e}^{-T})$, 不等于连续系统增益 $G(0)=1$, 脉冲离散化系统增益变化了. 只有当连续系统的输入为脉冲信号时, 脉冲离散系统的输出等于连续系统输出在采样点的值. 由于实际系统的输入不可能是无界的脉冲函数, 而且系统的静态增益也发生变化, 所以在计算机控制系统中经常使用阶跃不变离散化, 参照 8.2.4 节的基于零阶保持器的阶跃不变离散化和 8.4.3 节的阶跃不变 Z–S 变换, 增益保持不变.

利用 Euler 变换 (8.4.3) 有

$$\begin{aligned}
G(s) = H(z)|_{z=Ts+1} &= \left.\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-T}}\right|_{z=Ts+1} \\
&= \frac{Ts+1}{Ts+(1-\mathrm{e}^{-T})} = \frac{s+1/T}{s+(1-\mathrm{e}^{-T})/T} \\
&= \begin{cases} \dfrac{s+10}{s+0.9516}, & \text{当} T=0.1\text{时}. \\ \dfrac{s+2}{s+0.7869}, & \text{当} T=0.5\text{时}. \end{cases}
\end{aligned}$$

利用双线性变换 (8.4.6) 有

$$\begin{aligned}
G(s) = H(z)\Big|_{z=\frac{2+Ts}{2-Ts}} &= \left.\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-T}}\right|_{z=\frac{2+Ts}{2-Ts}} \\
&= \frac{Ts+2}{(1+\mathrm{e}^{-T})Ts+2(1-\mathrm{e}^{-T})} \\
&= \frac{s/(1+\mathrm{e}^{-T})+2/[(1+\mathrm{e}^{-T})T]}{s+2(1-\mathrm{e}^{-T})/[(1+\mathrm{e}^{-T})T]} \\
&= \begin{cases} \dfrac{0.5250s+10.500}{s+0.9992}, & \text{当} T=0.1\text{时}. \\ \dfrac{0.6225s+2.4898}{s+0.9797}, & \text{当} T=0.5\text{时}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Euler 变换和双线性变换得到的传递函数 $G(s)$ 与原系统的 $G(s)$ 不一样. 当 $T=0.1$ 时, Euler 变换和双线性变换得到的传递函数 $G(s)$ 的增益为 $K=10.508$, 当 $T=0.5$ 时, 增益为 $K=2.5414$.

**例 8.4.3** 设系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{cs+d}{(s+a)(s+b)},$$

采样周期为 $T$, 试求 $H(z)$.

**解** 根据脉冲不变 Z–S 变换, 有

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_o G(s) \frac{z}{z - \mathrm{e}^{Ts}} \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_o \frac{cs + d}{(s+a)(s+b)} \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{Ts} z^{-1}} \mathrm{d}s \\
&= \frac{-ac + d}{b - a} \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-aT} z^{-1}} + \frac{-bc + d}{a - b} \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-bT} z^{-1}} \\
&= \frac{1}{b - a} \frac{(b-a)c + [(ac - d)\mathrm{e}^{-bT} + (d - bc)\mathrm{e}^{-aT}] z^{-1}}{1 - (\mathrm{e}^{-aT} + \mathrm{e}^{-bT}) z^{-1} + \mathrm{e}^{-(a+b)T} z^{-2}}.
\end{aligned}
$$

当 $c = 0$ 时, 有变换对:

$$
G(s) = \frac{d}{(s+a)(s+b)},
$$

$$
H(z) = \frac{1}{b - a} \frac{d(\mathrm{e}^{-aT} - \mathrm{e}^{-bT}) z^{-1}}{1 - (\mathrm{e}^{-aT} + \mathrm{e}^{-bT}) z^{-1} + \mathrm{e}^{-(a+b)T} z^{-2}}.
$$

**例 8.4.4** 设系统的传递函数为

$$
G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2},
$$

采样周期为 $T$, 试求 $H(z)$.

**解** 根据脉冲不变 Z–S 变换, 有

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_o \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{Ts} z^{-1}} \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{(s+2)^2} \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{Ts} z^{-1}} \bigg|_{s=-1} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left[ \frac{1}{(s+1)(1 - \mathrm{e}^{Ts} z^{-1})} \right]_{s=-2} \\
&= \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-T} z^{-1}} + \left[ \frac{-1}{(s+1)^2 (1 - \mathrm{e}^{Ts} z^{-1})} + \frac{T \mathrm{e}^{Ts} z^{-1}}{(s+1)(1 - \mathrm{e}^{Ts} z^{-1})^2} \right]_{s=-2} \\
&= \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-T} z^{-1}} + \frac{-1 + (1 - T)\mathrm{e}^{-2T} z^{-1}}{(1 - \mathrm{e}^{-2T} z^{-1})^2}.
\end{aligned}
$$

**例 8.4.5** 设系统的传递函数为

$$
H(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{(z + T - 1)z}{(z-1)^2},
$$

采样周期为 $T$, 试求 $G(s)$.

**解** 根据脉冲不变 Z–S 变换, 有

$$
G(s) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_o \frac{(z + T - 1)z}{(z-1)^2} \frac{1}{z\left(s - \dfrac{1}{T} \ln z\right)} \mathrm{d}z
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z+T-1}{\left(s-\dfrac{1}{T}\ln z\right)}\right]_{z=1} \\
&= \left[\frac{1}{s-\dfrac{1}{T}\ln z} - \frac{z+T-1}{\left(s-\dfrac{1}{T}\ln z\right)^2}\left(-\frac{1}{Tz}\right)\right]_{z=1} \\
&= \frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}.
\end{aligned}
$$

### 8.4.3　阶跃不变 Z–S 变换

有关 Z–S 变换参见后记中 Z–S 变换的小插曲. 脉冲不变 Z–S 变换是采用脉冲函数将离散输入信号 $u(k) := u(kT)$ 拓展为连续时间信号 $u(t)$, 参见式 (8.2.7) 或式 (8.2.28). 阶跃不变 Z–S 变换是采用零阶保持器将离散输入信号 $u(k) := u(kT)$ 拓展为连续时间信号 $u(t)$, 即 $u(t) = u(kT)$, $kT \leqslant t < (k+1)T$, $T$ 为采样周期, 这相当于采用 **零阶保持器** (Zero-Order Hold) 作为恢复函数 (插值函数), 可以等价表示为

$$
u(t) = f(*)g(kT) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)[1(t-kT) - 1(t-(k+1)T)],
$$

其中 $1(t)$ 为单位阶跃函数. 零阶保持器的传递函数为

$$
G_0(s) = \frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}.
$$

假设从零阶保持器的输出 $u(t)$ 到系统输出 $y(t)$ 的传递函数为 $G(s)$, 那么从 $u(kT)$ 到系统输出 $y(t)$ 的传递函数 $G_d(s)$ 等于 $G_0(s)$ 与 $G(s)$ 串联, 即

$$
G_d(s) = G_0(s)G(s) = G(s)\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}. \tag{8.4.22}
$$

根据脉冲不变 Z–S 变换对 (8.4.12)∼(8.4.13), 使用式 (8.4.12), 可得与 $G_d(s)$ 对应的离散传递函数

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_o G(s)\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_o \frac{G(s)}{s}\frac{z(1-\mathrm{e}^{-Ts})}{z-\mathrm{e}^{Ts}}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1-z^{-1}}{2\pi\mathrm{j}}\oint_o \frac{G(s)}{s}\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{8.4.23}
$$

使用式 (8.4.13), 可得与 $H(z)$ 对应的连续时间传递函数

$$
G_d(s) = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_o \frac{H(z)}{z\left(s-\dfrac{1}{T}\ln z\right)}\mathrm{d}z.
$$

由于 $G_d(s)=G_0(s)G(s)$, 因此有

$$G(s)=\frac{G_d(s)}{G_0(s)}=\frac{s}{1-\mathrm{e}^{-Ts}}\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_o\frac{H(z)}{z\left(s-\dfrac{1}{T}\ln z\right)}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{s}{2\pi\mathrm{j}}\oint_o\frac{H(z)}{(z-1)\left(s-\dfrac{1}{T}\ln z\right)}\mathrm{d}z. \tag{8.4.24}$$

以上基于零阶保持器的连续时间系统传递函数 $G(s)$ 与离散时间传递函数 $H(z)$ 之间的变换可以总结为如下定理.

**定理 8.4.2 阶跃不变 Z–S 变换** (Step Invariance Z–S Transform)

假设采样周期 $T$ 满足扩展奈奎斯特 — 香农采样定理, 有理传递函数 $G(s)$ 与离散传递函数 $H(z)$ 构成下列 **阶跃不变 Z–S 变换** 对:

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{2\pi\mathrm{j}}\oint_o\frac{G(s)}{s}\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}\mathrm{d}s, \tag{8.4.25}$$

$$G(s)=\frac{s}{2\pi\mathrm{j}}\oint_o\frac{H(z)}{(z-1)\left(s-\dfrac{1}{T}\ln z\right)}\mathrm{d}z, \tag{8.4.26}$$

其中线积分路径 $o$ 是一条包含 $G(s)/s$ 或 $H(z)/(z-1)$ 所有 **极点** (Pole) 的逆时针方向绕原点一周的封闭曲线. 用 **留数** (Residue) 形式给出的阶跃不变 Z–S 变换对为

$$H(z)=(1-z^{-1})\sum\left[\frac{G(s)}{s}\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}\text{在}\frac{G(s)}{s}\text{极点处的留数}\right]$$

$$=(1-z^{-1})\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(n_i-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n_i-1}}{\mathrm{d}s^{n_i-1}}\left[(s-s_i)^{n_i}\frac{G(s)}{s}\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}\right]_{s=s_i}, \tag{8.4.27}$$

$$G(s)=s\sum\left[\frac{H(z)}{(z-1)\left(s-\dfrac{1}{T}\ln z\right)}\text{在}\frac{H(z)}{z-1}\text{极点处的留数}\right]$$

$$=s\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(n_i-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n_i-1}}{\mathrm{d}z^{n_i-1}}\left[(z-z_i)^{n_i}\frac{H(z)}{(z-1)\left(s-\dfrac{1}{T}\ln z\right)}\right]_{z=z_i}, \tag{8.4.28}$$

其中 $s_i$ 是 $G(s)/s$ 的极点, $z_i$ 是 $H(z)/(z-1)$ 的极点, $n_i$ 是极点的阶数.

只有当连续系统在采样间输入为常数信号时, 阶跃不变 Z–S 变换离散系统的输出等于连续系统输出在采样点的值.

**例 8.4.6** 设采样周期为 $T$, 求下列一阶连续系统传递函数的阶跃 Z–S 变换.

$$G(s)=\frac{1}{s+1}.$$

**解** 根据阶跃 Z–S 变换 (8.4.25)~(8.4.26), 将传递函数 $G(s)$ 代入式 (8.4.25) 可得

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1-z^{-1}}{2\pi \mathrm{j}} \oint_o \frac{G(s)}{s} \frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}} \mathrm{d}s \\
&= \frac{1-z^{-1}}{2\pi \mathrm{j}} \oint_o \frac{1}{s(s+1)} \frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}} \mathrm{d}s \\
&= (1-z^{-1}) \left[ \frac{1}{s(s+1)} \frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}} s \bigg|_{s=0} + \frac{1}{s(s+1)} \frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}} (s+1) \bigg|_{s=-1} \right] \\
&= (1-z^{-1}) \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\mathrm{e}^{-T}} \right] \\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{-T}}{z-\mathrm{e}^{-T}}.
\end{aligned}
$$

这与例 8.2.5 的阶跃不变离散化结果是一致的. 下面用式 (8.4.26) 再由 $H(z)$ 反求 $G(s)$:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{s}{2\pi \mathrm{j}} \oint_o \frac{H(z)}{(z-1)\left(s - \dfrac{1}{T}\ln z\right)} \mathrm{d}z \\
&= \frac{s}{2\pi \mathrm{j}} \oint_o \frac{1-\mathrm{e}^{-T}}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-T})} \frac{\mathrm{d}z}{\left(s - \dfrac{1}{T}\ln z\right)} \\
&= s \left[ \frac{1-\mathrm{e}^{-T}}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-T})} \frac{1}{\left(s - \dfrac{1}{T}\ln z\right)} (z-1) \bigg|_{z=1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1-\mathrm{e}^{-T}}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-T})} \frac{1}{\left(s - \dfrac{1}{T}\ln z\right)} (z-\mathrm{e}^{-T}) \bigg|_{z=\mathrm{e}^{-T}} \right] \\
&= 1 + \frac{s(1-\mathrm{e}^{-T})}{(\mathrm{e}^{-T}-1)(s+1)} \\
&= 1 - \frac{s}{s+1} = \frac{1}{s+1}.
\end{aligned}
$$

**例 8.4.7** 设采样周期为 $T$, 求下列二阶连续系统传递函数的阶跃 Z–S 变换,

$$
G(s) = \frac{d}{(s+a)(s+b)}.
$$

**解** 根据阶跃 Z–S 变换 (8.4.25)~(8.4.26), 将传递函数 $G(s)$ 代入式 (8.4.25) 可得

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1-z^{-1}}{2\pi \mathrm{j}} \oint_o \frac{G(s)}{s} \frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}} \mathrm{d}s \\
&= \frac{1-z^{-1}}{2\pi \mathrm{j}} \oint_o \frac{d}{s(s+a)(s+b)} \frac{z}{(z-\mathrm{e}^{Ts})} \mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-z^{-1})\left[\frac{d}{s(s+a)(s+b)}\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}s\bigg|_{s=0} + \frac{d}{s(s+a)(s+b)}\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}(s+a)\bigg|_{s=-a}\right.\\
&\quad\left. + \frac{d}{s(s+a)(s+b)}\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}(s+b)\bigg|_{s=-b}\right]\\
&= (1-z^{-1})\left[\frac{d}{(s+a)(s+b)}\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}\bigg|_{s=0} + \frac{d}{s(s+b)}\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}\bigg|_{s=-a}\right.\\
&\quad\left. + \frac{d}{s(s+a)}\frac{z}{z-\mathrm{e}^{Ts}}\bigg|_{s=-b}\right]\\
&= \frac{d}{ab} + \frac{d}{a(a-b)}\frac{z-1}{z-\mathrm{e}^{-aT}} - \frac{d}{b(a-b)}\frac{z-1}{z-\mathrm{e}^{-bT}}\\
&= \frac{d}{ab} + \frac{d}{a(a-b)}\frac{z-\mathrm{e}^{-aT}+\mathrm{e}^{-aT}-1}{z-\mathrm{e}^{-aT}} - \frac{d}{b(a-b)}\frac{z-\mathrm{e}^{-bT}+\mathrm{e}^{-bT}-1}{z-\mathrm{e}^{-bT}}\\
&= \frac{d}{ab} + \frac{d}{a(a-b)} - \frac{d}{b(a-b)} + \frac{d}{a(a-b)}\frac{\mathrm{e}^{-aT}-1}{z-\mathrm{e}^{-aT}} - \frac{d}{b(a-b)}\frac{\mathrm{e}^{-bT}-1}{z-\mathrm{e}^{-bT}}\\
&= \frac{d}{a(a-b)}\frac{\mathrm{e}^{-aT}-1}{z-\mathrm{e}^{-aT}} - \frac{d}{b(a-b)}\frac{\mathrm{e}^{-bT}-1}{z-\mathrm{e}^{-bT}}\\
&= \frac{d(a-b)(z-\mathrm{e}^{-aT})(z-\mathrm{e}^{-bT}) + [bd(z-\mathrm{e}^{-bT}) - ad(z-\mathrm{e}^{-aT})](z-1)}{ab(a-b)(z-\mathrm{e}^{-aT})(z-\mathrm{e}^{-bT})}.
\end{aligned}
$$

这与例 8.2.6 的阶跃不变离散传递函数 $H(z)$ 是相同的. 再将 $H(z)$ 代入式 (8.4.26) 计算

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{s}{2\pi\mathrm{j}}\oint_o \frac{H(z)}{(z-1)\left(s-\dfrac{1}{T}\ln z\right)}\mathrm{d}z\\
&= \frac{s}{2\pi\mathrm{j}}\oint_o \left[\frac{d}{a(a-b)}\frac{\mathrm{e}^{-aT}-1}{z-\mathrm{e}^{-aT}} - \frac{d}{b(a-b)}\frac{\mathrm{e}^{-bT}-1}{z-\mathrm{e}^{-bT}}\right]\frac{\mathrm{d}z}{(z-1)\left(s-\dfrac{1}{T}\ln z\right)}\\
&= s\left(\frac{d}{a(a-b)}\frac{\mathrm{e}^{-aT}-1}{z-\mathrm{e}^{-aT}} - \frac{d}{b(a-b)}\frac{\mathrm{e}^{-bT}-1}{z-\mathrm{e}^{-bT}}\right)\frac{1}{\left(s-\dfrac{1}{T}\ln z\right)}\Bigg|_{z=1}\\
&\quad + s\left(\frac{d}{a(a-b)}\frac{\mathrm{e}^{-aT}-1}{(z-1)\left(s-\dfrac{1}{T}\ln z\right)}\Bigg|_{z=\mathrm{e}^{-aT}} - \frac{d}{b(a-b)}\frac{\mathrm{e}^{-bT}-1}{(z-1)\left(s-\dfrac{1}{T}\ln z\right)}\Bigg|_{z=\mathrm{e}^{-bT}}\right)\\
&= \frac{-d}{a(a-b)} + \frac{d}{b(a-b)} + s\left(\frac{d}{a(a-b)}\frac{1}{(s+a)} - \frac{d}{b(a-b)}\frac{1}{(s+b)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{ab} + \frac{ds}{a-b}\left[\frac{1}{a(s+a)} - \frac{1}{b(s+b)}\right] \\
&= \frac{d}{ab} + \frac{ds}{a-b}\frac{b(s+b)-a(s+a)}{ab(s+a)(s+b)} \\
&= \frac{d}{ab} + \frac{ds}{a-b}\frac{(b-a)s+(b^2-a^2)}{ab(s+a)(s+b)} \\
&= \frac{d}{ab} - \frac{d[s^2+(b+a)s]}{ab(s+a)(s+b)} \\
&= \frac{d}{ab} - \frac{d[(s+a)(s+b)-ab]}{ab(s+a)(s+b)} \\
&= \frac{d}{ab} - \frac{d}{ab} + \frac{d}{(s+a)(s+b)} \\
&= \frac{d}{(s+a)(s+b)}.
\end{aligned}
$$

## 8.5 线性离散系统的最小二乘参数辨识

数学模型是控制科学的基础, 系统辨识是研究建立动态系统数学模型的理论与方法. 实际系统一般采用计算机控制, 所以基于离散数据的离散时间系统的辨识方法得到了很大发展. 近年来, 本书作者在新的辨识思想、辨识理论、辨识原理、辨识概念、辨识理念等方面提出了一些原创性辨识方法、如辅助模型辨识思想与方法、多新息辨识理论与方法、递阶辨识原理与方法、耦合辨识概念与方法、滤波辨识理念与方法等. 正在出版《系统辨识学术专著丛书》8 部, 每部 60 万字以上, 已出版第 1 分册《系统辨识新论》(2013 年) [1]、第 3 分册《系统辨识 —— 辨识方法性能分析》(2014 年) [2]、第 4 分册《系统辨识 —— 辅助模型辨识思想与方法》(2017 年) [3]、第 6 分册《系统辨识 —— 多新息辨识理论与方法》(2016 年) [4], 随后将陆续出版其余 4 分册.

这些原创性辨识方法都发表在国内外著名期刊上, 如《自动化学报》[44,45]、《中国科学》[46,47]、*Automatica* [48–54]、*IEEE Transactions on Automatic Control* [55–58]、*IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*[59]、*IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*[60] 等上. 国际著名期刊*Applied Mathematical Modelling*上论文 "非线性系统的递阶多新息随机梯度辨识方法" 入选 "2013 年中国百篇最具影响国际学术论文" [61]. 本节简单介绍线性系统的最小二乘参数估计、最小二乘参数辨识算法、递推最小二乘参数辨识算法等. 本节主要内容参考《系统辨识 —— 多新息辨识理论与方法》一书写成 [4].

### 8.5.1 线性系统辨识模型

我们已经说明一个连续时间状态空间系统通过离散化, 可以化为一个离散时间状态空间模型 (参见 8.2.3 节和 8.2.4 节), 一个离散时间状态空间模型可以转化为下列形式的差分方

程模型 (参见 8.3.3 节):

$$\begin{aligned}&y(k)+a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+\cdots+a_ny(k-n)\\&\quad=b_1u(k-1)+b_2u(k-2)+\cdots+b_nu(k-n),\end{aligned}\tag{8.5.1}$$

其中 $u(k):=u(kT)$ 和 $y(k):=y(kT)$ 分别为时刻 $k$ 系统的输入和输出, $T$ 为采样周期, 差分方程的系数 $a_i$ 和 $b_i$ 称为系统模型参数, 这里假设它与 $u(k)$, $y(k)$ 和 $k$ 无关, 且是常数, 因而式 (8.5.1) 是一个线性时不变离散时间系统.

引入单位后移算子 $z^{-1}$ ($z^{-1}y(k)=y(k-1)$ 或 $zy(k)=y(k+1)$), 式 (8.5.1) 可以写为

$$(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n})y(k)=(b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_nz^{-n})u(k).\tag{8.5.2}$$

定义移位算子的多项式:

$$A(z):=1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n},$$

$$B(z):=b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_nz^{-n},$$

于是式 (8.5.2) 可以写为 $A(z)y(k)=B(z)u(k)$. 实践中观测数据不可避免地包含误差 (简称干扰噪声), 引入干扰噪声项, 系统模型可以写为

$$A(z)y(k)=B(z)u(k)+v(k),$$

其中 $v(k)$ 是零均值不可测白噪声. 这个模型称为 **受控自回归模型** (Controlled AutoRegressive Model, **CAR 模型**), 或 **方程误差模型** (Equation-Error Model, **EE 模型**), 或带外加输入的自回归模型 (即 **ARX 模型**). 根据移位算子的性质, 它可等价写为

$$\begin{aligned}&y(k)+a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+\cdots+a_ny(k-n)\\&\quad=b_1u(k-1)+b_2u(k-2)+\cdots+b_nu(k-n)+v(k).\end{aligned}\tag{8.5.3}$$

设阶次 $n$ 已知, 且 $k\leqslant 0$ 时, $y(k)=0$, $u(k)=0$, $v(k)=0$.

系统辨识是利用系统的观测数据辨识系统的参数, 为方便起见, 经常将系统的参数收集起来构成一个参数向量, 将系统的输入输出数据收集起来构成一个信息向量. 定义 **参数向量** (Parameter Vector)

$$\boldsymbol{\theta}:=[a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^{2n},$$

和 **信息向量** (Information Vector)

$$\boldsymbol{\varphi}(k):=[-y(k-1),-y(k-2),\cdots,-y(k-n),u(k-1),u(k-2),\cdots,u(k-n)]^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^{2n}.$$

将式 (8.5.3) 移项, 并写成向量形式可得

$$\begin{aligned}y(k)&=-a_1y(k-1)-a_2y(k-2)-\cdots-a_ny(k-n)\\&\quad+b_1u(k-1)+b_2u(k-2)+\cdots+b_nu(k-n)+v(k)\\&=[-y(k-1),-y(k-2),\cdots,-y(k-n),u(k-1),u(k-2),\cdots,u(k-n)]\boldsymbol{\theta}+v(k)\\&=\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm T}(k)\boldsymbol{\theta}+v(k).\end{aligned}\tag{8.5.4}$$

这是一个线性回归模型, 也是 CAR 系统 (8.5.3) 的 **辨识模型** (Identification Model) 或 **辨识表达式** (Identification Representation).

辨识目标是, 基于系统的观测数据 $\{y(j),\boldsymbol{\varphi}(j),\ 0\leqslant j\leqslant k\}$, 利用最小二乘原理, 研究和提出最小二乘辨识方法, 对系统的未知参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 进行实时估计.

### 8.5.2 最小二乘估计

当 $k=1,2,\cdots,k$ 时 $(k\gg n)$, 从式 (8.5.4) 可以得到 $k$ 个方程式, 将它们写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} y(1)\\ y(2)\\ \vdots\\ y(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(1)\\ \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(2)\\ \vdots\\ \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\end{pmatrix}\boldsymbol{\theta}+\begin{pmatrix} v(1)\\ v(2)\\ \vdots\\ v(k)\end{pmatrix}.$$

上式也可简单写作

$$\boldsymbol{Y}_k=\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{V}_k, \tag{8.5.5}$$

式中

$$\boldsymbol{Y}_k:=\begin{pmatrix} y(1)\\ y(2)\\ \vdots\\ y(k)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^k,\quad \boldsymbol{H}_k:=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(1)\\ \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(2)\\ \vdots\\ \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{k\times(2n)},\quad \boldsymbol{V}_k:=\begin{pmatrix} v(1)\\ v(2)\\ \vdots\\ v(k)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^k.$$

根据 **最小二乘辨识原理** (Least Squares Identification Principle), 利用系统的观测数据 $\{y(k),\boldsymbol{\varphi}(k)\}$, 定义 **二次准则函数** (Quadratic Criterion Function)

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\theta}) &:= \sum_{j=1}^{k} v^2(j)=\sum_{j=1}^{k}[y(j)-\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(j)\boldsymbol{\theta}]^2\\ &= \boldsymbol{V}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_k=(\boldsymbol{Y}_k-\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}_k-\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{\theta})\\ &= \|\boldsymbol{Y}_k-\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{\theta}\|^2. \end{aligned}$$

设 $\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{LS}}$ 时, $\min J(\boldsymbol{\theta})=J(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{LS}})$. 令 $J(\boldsymbol{\theta})$ 对 $\boldsymbol{\theta}$ 的偏导数为零, 得到

$$\left.\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{LS}}}=-2\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}_k-\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{\theta})\Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{LS}}}=\mathbf{0},$$

或

$$(\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_k)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{LS}}=\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_k.$$

这个方程称为 **规范方程** (Normal Equation) 或 **正则方程**. 假设在持续激励条件下, 数据长度 $k$ 足够大, $(\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_k)$ 为正定矩阵时, 由上式可以求得

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{LS}}=(\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_k)^{-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_k. \tag{8.5.6}$$

上式给出的估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{LS}}$ 称为参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的 **最小二乘估计** (Least Squares Estimate, LSE), 简称 **LS 估计**. 由于它与数据长度 $k$ 有关, 故可等价写作 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{LS}}(k)$, 在递推算法中记作 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$. 将 $\boldsymbol{H}_k$ 和 $\boldsymbol{Y}_k$ 的定义式代入上式, 展开可得

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}(k)=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{LS}}(k) &= (\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_k)^{-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_k && (8.5.7)\\ &= \left[\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}(j)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(j)\right]^{-1}\left[\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}(j)y(j)\right]. && (8.5.8) \end{aligned}$$

上式就是 **一次完成辨识算法** (One-Shot Identification Algorithm) 或 **直接辨识算法** (Direct Identification Algorithm), 以区别后面的递推最小二乘辨识算法.

### 8.5.3 最小二乘辨识算法

当采集到一批数据时, 可用式 (8.5.6) 或式 (8.5.8) 计算参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的最小二乘估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$. 这是一种计算 LS 估计的 **离线辨识** (Offline Identification) 方法, 其不足之处是, 对于每一个 $k$, 都需要求矩阵的逆, 导致算法计算量大, 特别当 $\boldsymbol{\theta}$ 的维数很大时, 计算量更大, 且不适用于在线辨识. 下面讨论式 (8.5.7) 的递推计算式, 它可以 **在线辨识** (Online Identification) 系统的参数. 在此之前先介绍一个很有用的矩阵求逆引理.

**引理 8.5.1 矩阵求逆引理** (Matrix Inversion Lemma)

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{r\times n}$, 假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$ 可逆, 则下列等式成立,

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

**证明** 要证明 $\boldsymbol{X}^{-1}=\boldsymbol{Y}$, 只需证明 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{I}$. 沿着这一思路, 我们有

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})[\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}]\\
&=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\\
&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\\
&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\\
&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{I}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}.
\end{aligned}$$

同理, 可证

$$[\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}](\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})=\boldsymbol{I}.$$

下面用递推方式来实现 (计算) 式 (8.5.7) 的最小二乘估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$. 值得指出的是, 与下面的递推最小二乘算法不同的是, 这里的递推不是参数估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ 算式的递推, 而是一些中间变量 $\boldsymbol{P}(k)$ 和向量 $\boldsymbol{\xi}(k)$ 的递推计算.

定义协方差阵 $\boldsymbol{P}(k)$ 和向量 $\boldsymbol{\xi}(k)$ 如下:

$$\boldsymbol{P}^{-1}(k):=\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}(j)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(j)=\boldsymbol{P}^{-1}(k-1)+\boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k), \tag{8.5.9}$$

$$\boldsymbol{\xi}(k):=\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}(j)y(j)=\boldsymbol{\xi}(k-1)+\boldsymbol{\varphi}(k)y(k),\quad \boldsymbol{\xi}(0)=\mathbf{0}. \tag{8.5.10}$$

式 (8.5.7) 的最小二乘估计可以表示为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)=\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{\xi}(k). \tag{8.5.11}$$

将矩阵求逆引理 8.5.1 应用到式 (8.5.9), 可得

$$\boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{P}(k-1)-\frac{\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)}{1+\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)}. \tag{8.5.12}$$

式 (8.5.10)~ 式 (8.5.12) 构成了 **最小二乘算法** (Least Squares Algorithm, **LS 算法**) [1, 62]:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)=\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{\xi}(k), \tag{8.5.13}$$

$$\boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{P}(k-1)-\frac{\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)}{1+\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)},\quad \boldsymbol{P}(0)=p_0\boldsymbol{I}_{2n}, \tag{8.5.14}$$

$$\boldsymbol{\xi}(k)=\boldsymbol{\xi}(k-1)+\boldsymbol{\varphi}(k)y(k),\quad \boldsymbol{\xi}(0)=\mathbf{0}. \tag{8.5.15}$$

根据式 (8.5.9) 中 $\boldsymbol{P}^{-1}(k)$ 和式 (8.5.10) 中 $\boldsymbol{\xi}(k)$ 的定义及其递推关系, 我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{-1}(k)&=\boldsymbol{P}^{-1}(k-2)+\boldsymbol{\varphi}(k-1)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k-1)+\boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\\&=\boldsymbol{P}^{-1}(0)+\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}(j)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(j),\end{aligned} \tag{8.5.16}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}(k)&=\boldsymbol{\xi}(k-2)+\boldsymbol{\varphi}(k-1)y(k-1)+\boldsymbol{\varphi}(k)y(k)\\&=\boldsymbol{\xi}(0)+\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}(j)y(j).\end{aligned} \tag{8.5.17}$$

比较式 (8.5.10) 与式 (8.5.17) 可知, $\boldsymbol{\xi}(k)$ 的初值应取为 $\boldsymbol{\xi}(0)=\mathbf{0}$; 比较式 (8.5.9) 与式 (8.5.16) 可知, $\boldsymbol{P}^{-1}(k)$ 的初值应取为 $\boldsymbol{P}^{-1}(0)=\mathbf{0}$, 但是这导致 $\boldsymbol{P}^{-1}(0)$ 不可逆, 因此实际中通常取为一个很小的正定阵, 如 $\boldsymbol{P}^{-1}(0)=\boldsymbol{I}_{2n}/p_0$, $p_0$ 是一个很大的常数, 如 $p_0=10^6$, $\boldsymbol{P}^{-1}(0)=10^{-6}\boldsymbol{I}_{2n}$ 很接近零矩阵, 这是我们取 $\boldsymbol{P}(0)=p_0\boldsymbol{I}_{2n}$ 的理由.

评价辨识算法计算量大小的一个实用方法是: 用算法的乘法次数 (除法作为乘法对待) 和加法次数 (减法作为加法对待) 来衡量. 一次加法运算称为一个 flop, 即一次浮点运算 (Floating Point Operation), 一次乘法运算也称为一个 flop [62–65]. 乘法运算次数和加法运算次数之和的总 flop 数就是算法的计算量. 尽管数字大小的浮点运算不一样, 但是用 flop 来刻画算法的计算量也不失为一种好方法. 如果同为递推算法 (迭代算法), 可以比较每一步递推计算 (迭代计算) 的 flop 数, 来衡量算法的计算量.

值得注意的是, 即使对于同一个算法, 由于计算方式的不同, 其计算量可能相差很大. 例如, 多项式

$$f(x)=x^3+2x^2+3x+4=x\cdot x\cdot x+2\times x\cdot x+3\times x+4$$

需要 5 次乘法运算和 3 次加法运算; 如果将表达式修改为

$$f(x)=x(x(x+2)+3)+4,$$

就只需要 2 次乘法运算和 3 次加法运算. 再如, 对于标量 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 表达式 $\alpha\boldsymbol{x}\beta=(\alpha\boldsymbol{x})\beta=\alpha(\boldsymbol{x}\beta)$ 有 $2n$ 次乘法运算, 而 $\alpha\boldsymbol{x}\beta=(\alpha\beta)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\alpha\beta)$ 只有 $n+1$ 次乘法运算; 表达式 $\alpha\boldsymbol{A}\beta=(\alpha\boldsymbol{A})\beta=\alpha(\boldsymbol{A}\beta)$ 有 $2mn$ 次乘法运算, 而 $\alpha\boldsymbol{A}\beta=(\alpha\beta)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\alpha\beta)$ 只有 $mn+1$ 次乘法运算. 由此可以看出, 对于数学上等价的表达式, 其先后计算方式不同, 将导致计算量的差异很大. 特别对于向量、矩阵之间的运算, 需要考虑它们之间的计算次序, 以便使计算量最小. 因此, 估算辨识方法的计算量, 评价辨识方法的计算效率, 需要找到能实现辨识算法的最经济的计算方式, 即实现辨识算法的最小 flop 数的计算方式, 从而提高辨识算法的计算效率.

关于 "辨识方法的计算效率", 我们在《南京信息工程大学学报》上刊登了 3 篇连载论文 [62–64], 讨论了向量与向量、向量与矩阵、矩阵与矩阵的加减法、乘法的运算量, 行列式、矩阵求逆的计算量, 以及线性回归系统、多元线性回归系统、多变量系统的递推辨识算法、迭代辨识算法、耦合辨识算法的最小计算量, 即实现算法的最少 flop 数.

令 $\boldsymbol{\zeta}(k):=\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)\in\mathbb{R}^{2n}$. 注意到 $\boldsymbol{P}(k)$ 是 **对称阵** (Symmetric Matrix), 式 (8.5.14) 可以表示为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(k) &= \boldsymbol{P}(k-1) - \frac{\boldsymbol{\zeta}(k)\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(k)}{1+\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\zeta}(k)} \\
&= \boldsymbol{P}(k-1) - \left\{\frac{\boldsymbol{\zeta}(k)}{1+\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\zeta}(k)}\right\}\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(k).
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{\zeta}(k) := \boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k) \in \mathbb{R}^{2n}$ 有 $(2n)^2$ 次乘法运算和 $(2n)^2 - 2n$ 次加法运算, 其计算量为 $2(2n)^2 - 2n$ flops. 最小二乘估计算法 (8.5.13)~(8.5.15) 的最小计算量为 $(24n^2 + 6n)$ flops, 如表 8.5.1 所示.

**表 8.5.1 最小二乘辨识算法每步的计算量**

| 变量 | 表达式 | 乘法次数 | 加法次数 |
|---|---|---|---|
| $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ | $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{\xi}(k) \in \mathbb{R}^{2n}$ | $(2n)^2$ | $(2n)^2 - 2n$ |
| $\boldsymbol{P}(k)$ | $\boldsymbol{P}(k) = \boldsymbol{P}(k-1) - \boldsymbol{L}(k)\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(k) \in \mathbb{R}^{(2n)\times(2n)}$ | $(2n)^2$ | $(2n)^2$ |
| | $\boldsymbol{L}(k) := \boldsymbol{\zeta}(k)/[1+\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\zeta}(k)] \in \mathbb{R}^{2n}$ | $4n$ | $2n$ |
| | $\boldsymbol{\zeta}(k) := \boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k) \in \mathbb{R}^{2n}$ | $(2n)^2$ | $(2n)^2 - 2n$ |
| $\boldsymbol{\xi}(k)$ | $\boldsymbol{\xi}(k) = \boldsymbol{\xi}(k-1) + \boldsymbol{\varphi}(k)y(k) \in \mathbb{R}^{2n}$ | $2n$ | $2n$ |
| 总　数 | | $3(2n)^2 + 6n$ | $3(2n)^2$ |
| 总 flop 数 | | $N_1 := 24n^2 + 6n$ | |

### 8.5.4 递推最小二乘辨识算法

定义 **协方差阵** (Covariance Matrix) $\boldsymbol{P}(k)$ 的逆

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}^{-1}(k) := \boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_k &= \sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}(j)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(j) \qquad (8.5.18)\\
&= \sum_{j=1}^{k-1}\boldsymbol{\varphi}(j)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(j) + \boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k).
\end{aligned}
$$

于是可得递推算式 (Recursive Computation Formula):

$$
\boldsymbol{P}^{-1}(k) = \boldsymbol{P}^{-1}(k-1) + \boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k), \quad \boldsymbol{P}(0) = p_0\boldsymbol{I}_{2n} > 0. \qquad (8.5.19)
$$

根据 $\boldsymbol{Y}_k$ 和 $\boldsymbol{H}_k$ 的定义可知,

$$
\boldsymbol{Y}_k := \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k-1) \\ \hline y(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_{k-1} \\ y(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k}, \quad \boldsymbol{H}_k := \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(1) \\ \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k-1) \\ \hline \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_{k-1} \\ \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times(2n)}.
$$

利用式 (8.5.19), 由式 (8.5.7) 可得

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) &= (\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_k)^{-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_k \\
&= \boldsymbol{P}(k)\begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_{k-1} \\ \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_{k-1} \\ y(k) \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{P}(k)[\boldsymbol{H}_{k-1}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varphi}(k)]\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_{k-1} \\ y(k) \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{P}(k)[\boldsymbol{H}_{k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{k-1} + \boldsymbol{\varphi}(k)y(k)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{P}(k)[\boldsymbol{P}^{-1}(k-1)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{H}_{k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{k-1} + \boldsymbol{\varphi}(k)y(k)] \\
&= \boldsymbol{P}(k)[\boldsymbol{P}^{-1}(k-1)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \boldsymbol{\varphi}(k)y(k)] \\
&= \boldsymbol{P}(k)[\boldsymbol{P}^{-1}(k) - \boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)]\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{\varphi}(k)y(k) \\
&= \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{\varphi}(k)[y(k) - \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)]. \qquad (8.5.20)
\end{aligned}
$$

将 **矩阵求逆引理** 8.5.1 应用到式 (8.5.19), 可得

$$
\boldsymbol{P}(k) = \boldsymbol{P}(k-1) - \frac{\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)}. \qquad (8.5.21)
$$

定义 **增益向量** (Gain Vector) $\boldsymbol{L}(k) := \boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{\varphi}(k) \in \mathbb{R}^{2n}$. 上式两边右乘向量 $\boldsymbol{\varphi}(k)$ 可得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L}(k) &= \boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{\varphi}(k) \\
&= \boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k) - \frac{\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)} \\
&= \boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)\left[1 - \frac{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)}\right] \\
&= \frac{\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)}. \qquad (8.5.22)
\end{aligned}
$$

由式 (8.5.19) 和式 (8.5.20) 可得估计线性回归系统 (8.5.4) 参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的 **递推最小二乘算法** (Recursive Least Squares Algorithm, **RLS 算法**):

$$
\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{\varphi}(k)[y(k) - \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)], \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = \mathbf{1}_{2n}/p_0, \qquad (8.5.23)
$$

$$
\boldsymbol{P}^{-1}(k) = \boldsymbol{P}^{-1}(k-1) + \boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k), \quad \boldsymbol{P}(0) = p_0\boldsymbol{I}_{2n}. \qquad (8.5.24)
$$

为避免参数估计误差 **协方差阵** $\boldsymbol{P}(k)$ 的求逆运算, 由式 (8.5.20) 和式 (8.5.21) 给出不用求逆的**递推最小二乘辨识算法**:

$$
\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{\varphi}(k)[y(k) - \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)], \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = \mathbf{1}_{2n}/p_0, \qquad (8.5.25)
$$

$$
\boldsymbol{P}(k) = \boldsymbol{P}(k-1) - \frac{\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)}, \quad \boldsymbol{P}(0) = p_0\boldsymbol{I}_{2n}. \qquad (8.5.26)
$$

借助于增益向量, **递推最小二乘算法**可表达为

$$
\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \boldsymbol{L}(k)[y(k) - \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)], \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = \mathbf{1}_{2n}/p_0, \qquad (8.5.27)
$$

$$
\boldsymbol{L}(k) = \boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)[1 + \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)]^{-1}, \qquad (8.5.28)
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(k) &= \boldsymbol{P}(k-1) - \boldsymbol{L}(k)[1 + \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)]\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(k) \\
&= [\boldsymbol{I}_{2n} - \boldsymbol{L}(k)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)]\boldsymbol{P}(k-1) \qquad (8.5.29) \\
&= \boldsymbol{P}(k-1)[\boldsymbol{I}_{2n} - \boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(k)] \qquad (8.5.30) \\
&= \boldsymbol{P}(k-1) - \boldsymbol{L}(k)[\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{P}(0) = p_0\boldsymbol{I}_{2n}. \qquad (8.5.31)
\end{aligned}
$$

记一次乘法和一次加法运算为一个 flop, 即一次浮点运算 (Floating Point Operation) 简称. 式 (8.5.29) 或式 (8.5.30) 的计算量为 $2(2n)^3+2n$ flops, 其中乘法运算次数为 $(2n)^3+(2n)^2$, 加法运算次数为 $(2n)^3-(2n)^2+2n$. 计算量是 $n$ 的立方, 即 $O(n^3)$, 这种计算方法计算量太大, 不可取. 计算量最小的**RLS 算法**表达如下:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)+\boldsymbol{L}(k)[y(k)-\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)],\quad \hat{\boldsymbol{\theta}}(0)=\mathbf{1}_{2n}/p_0,\tag{8.5.32}$$

$$\boldsymbol{L}(k)=\frac{[\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)]}{1+\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)[\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)]},\tag{8.5.33}$$

$$\boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{P}(k-1)-\boldsymbol{L}(k)[\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{P}(0)=p_0\boldsymbol{I}_{2n}.\tag{8.5.34}$$

RLS 算法 (8.5.32)~(8.5.34) 的计算量为 $4(2n)^2+12n$ flops, 如表 8.5.2 所示. RLS 算法的计算量比表 8.5.1 中最小二乘算法的计算量小 $[24n^2+6n]-[16n^2+12n]=8n^2-6n$ 次, 所以递推最小二乘算法的计算量比最小二乘算法计算量小.

**表 8.5.2　递推最小二乘辨识算法每步的计算量**

| 变量 | 表达式 | 乘法次数 | 加法次数 |
|---|---|---|---|
| $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ | $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)+\boldsymbol{L}(k)e(k)\in\mathbb{R}^{2n}$ | $2n$ | $2n$ |
| | $e(k):=y(k)-\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)\in\mathbb{R}$ | $2n$ | $2n$ |
| $\boldsymbol{L}(k)$ | $\boldsymbol{L}(k)=\boldsymbol{\zeta}(k)/[1+\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\zeta}(k)]\in\mathbb{R}^{2n}$ | $4n$ | $2n$ |
| | $\boldsymbol{\zeta}(k):=\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)\in\mathbb{R}^{2n}$ | $(2n)^2$ | $(2n-1)2n$ |
| $\boldsymbol{P}(k)$ | $\boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{P}(k-1)-\boldsymbol{L}(k)\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(k)\in\mathbb{R}^{(2n)\times(2n)}$ | $(2n)^2$ | $(2n)^2$ |
| 总　数 | | $2(2n)^2+8n$ | $2(2n)^2+4n$ |
| 总 flop 数 | | $N_2:=16n^2+12n$ | |

# 8.6　线性离散时间状态空间系统的卡尔曼滤波

6.3 节讨论了线性时不变连续时间系统的观测器设计方法 (当然可以推广到非线性、时变、离散时间系统). 状态观测器或状态估计器 (State Estimator) 用于状态不可测的确定性系统的状态估计. 当系统受到随机干扰 (如零均值白噪声) 的状态估计称为状态滤波, 最典型的是卡尔曼 (Kalman) 滤波, 用于估计线性状态空间系统的状态. 对于非线性状态空间系统, 可以采用线性化, 导出估计系统状态的增广卡尔曼滤波算法.

在 6.5 节, 我们研究了线性离散时间状态空间系统的时变增益最优观测器设计方法, 它是卡尔曼滤波在确定性系统中的一个应用 [27]. 本节讨论线性时不变离散时间状态空间系统、线性时变离散时间状态空间系统的卡尔曼滤波问题.

## 8.6.1　线性时不变离散时间状态空间系统

考虑下列线性时不变多变量离散时间系统的 **状态估计** (State Estimation) 问题,

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)+\boldsymbol{w}(k),\tag{8.6.1}$$

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)+\boldsymbol{v}(k),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\tag{8.6.2}$$

其中 $\boldsymbol{x}(k)\in\mathbb{R}^n$ 为状态向量, $\boldsymbol{u}(k)\in\mathbb{R}^r$ 为输入向量, $\boldsymbol{y}(k)\in\mathbb{R}^m$ 为输出向量, $\boldsymbol{w}(k)\in\mathbb{R}^n$ 为零均值过程噪声向量 (Process Noise Vector), $\boldsymbol{v}(k)\in\mathbb{R}^m$ 为零均值观测噪声向量 (Observation Noise Vector), $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$、$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times r}$、$\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{D}\in\mathbb{R}^{m\times r}$ 为系统参数矩阵.

假设不相关噪声 $\boldsymbol{w}(k)$ 和 $\boldsymbol{v}(k)$ 具有下列协方差阵,

$$\mathrm{E}\left\{\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}(k)\\ \boldsymbol{v}(k)\end{pmatrix}[\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(i),\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(i)]\right\}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_w & \boldsymbol{R}_{wv}\\ \boldsymbol{R}_{vw} & \boldsymbol{R}_v\end{pmatrix}\delta_{ti},\quad \delta_{ti}=\begin{cases}1, & t=i,\\ 0, & t\neq i,\end{cases}$$

且 $\boldsymbol{R}_w=\boldsymbol{R}_w^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{R}_{wv}=\boldsymbol{R}_{vw}^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $\boldsymbol{R}_v=\boldsymbol{R}_v^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{m\times m}$.

Kalman 滤波是在系统参数矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$ 已知的条件下, 利用系统的输入输出数据 $\{\boldsymbol{u}(k),\boldsymbol{y}(k)\}$ 估计系统的状态. 设 $\hat{\boldsymbol{x}}(k)$ 是状态 $\boldsymbol{x}(k)$ 的估计. 借助于确定性系统观测器设计思想, 设随机系统状态估计器有如下形式,

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1)=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)+\boldsymbol{L}(k)[\boldsymbol{y}(k)-\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(k)-\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)], \tag{8.6.3}$$

目标是确定一个最优的 **增益向量** $\boldsymbol{L}(k)\in\mathbb{R}^n$ 使估计误差 $\tilde{\boldsymbol{x}}(k):=\boldsymbol{x}(k)-\hat{\boldsymbol{x}}(k)$ 最小.

式 (8.6.1) 减去式 (8.6.3), 获得状态重构误差或 **状态估计误差** (State Estimation Error):

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{x}}(k+1)&=\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}(k)+\boldsymbol{w}(k)-\boldsymbol{L}(k)[\boldsymbol{y}(k)-\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(k)-\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)]\\&=[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}(k)\boldsymbol{C}]\tilde{\boldsymbol{x}}(k)+\boldsymbol{w}(k)-\boldsymbol{L}(k)\boldsymbol{v}(k).\end{aligned} \tag{8.6.4}$$

定义状态估计误差向量 **协方差阵** (Covariance Matrix)

$$\boldsymbol{P}(k):=\mathrm{E}\{(\tilde{\boldsymbol{x}}(k)-\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}(k)])(\tilde{\boldsymbol{x}}(k)-\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}(k)])^{\mathrm{T}}\}.$$

式 (8.6.4) 两边取期望, 得到 $\tilde{\boldsymbol{x}}(k+1)$ 的均值:

$$\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}(k+1)]=[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}(k)\boldsymbol{C}]\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}(k)].$$

由假设 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$, 如果取 $\hat{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{x}_0$, 由上式可知状态估计误差的均值也为零, 且与 $\boldsymbol{L}(k)$ 独立. 假设 $\boldsymbol{R}_{wv}=\mathbf{0}$ (读者可以研究非零的情形), 于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(k+1)&=\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}(k+1)\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(k+1)]\\&=[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}(k)\boldsymbol{C}]\boldsymbol{P}(k)[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}(k)\boldsymbol{C}]^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_w+\boldsymbol{L}(k)\boldsymbol{R}_v\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(k).\end{aligned} \tag{8.6.5}$$

因为 $\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$, $\boldsymbol{w}(k)$, $\boldsymbol{v}(k)$ 是独立的. 进一步设 $\boldsymbol{P}(0)=p_0\boldsymbol{I}_n$. 从式 (8.6.5) 可知: 如果 $\boldsymbol{P}(k)$ 是 **非负定矩阵** (Non-Negative Definite Matrix), 那么 $\boldsymbol{P}(k+1)$ 也是非负定矩阵, 将 $\boldsymbol{P}(k+1)$ 配成下列形式,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(k+1)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_w-\boldsymbol{L}(k)\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(k)\\&\quad+\boldsymbol{L}(k)[\boldsymbol{R}_v+\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(k)\\&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_w-\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{R}_v+\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}]^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\&\quad+\{\boldsymbol{L}(k)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{R}_v+\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}]^{-1}\}[\boldsymbol{R}_v+\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}]\\&\quad\times\{\boldsymbol{L}(k)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{R}_v+\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}]^{-1}\}^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{8.6.6}$$

通过极小化估计误差协方差阵 $\boldsymbol{P}(k+1)$, 从式 (8.6.6) 可以得到最优增益向量 $\boldsymbol{L}(k)$. 上式协方差阵 $\boldsymbol{P}(k+1)$ 包含 4 项之和: 右边前 3 项与 $\boldsymbol{L}(k)$ 无关, 因为矩阵 $\boldsymbol{R}_v+\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 是非负定的. 如果选择增益 $\boldsymbol{L}(k)$ 使式 (8.6.6) 右边最后一项为零, 那么有

$$\boldsymbol{L}(k)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{R}_v+\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}]^{-1}, \tag{8.6.7}$$

$$\boldsymbol{P}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_w-\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}_v+\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}. \tag{8.6.8}$$

式 (8.6.3), (8.6.7) 和 (8.6.8) 称为 **卡尔曼滤波器** (Kalman Filter, **KF**), 也称为 **一步超前卡尔曼状态估计算法** (One-Step Ahead Kalman State Estimation Algorithm), 重写如下,

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1)=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)+\boldsymbol{L}(k)[\boldsymbol{y}(k)-\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(k)-\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)],\quad \hat{\boldsymbol{x}}(1)=\mathbf{1}_n/p_0, \tag{8.6.9}$$

$$\boldsymbol{L}(k)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{R}_v+\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}]^{-1}, \tag{8.6.10}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_w - \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{R}_v + \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}]^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\
&= \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_w - \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(k) \\
&= \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k)[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(k)] + \boldsymbol{R}_w \\
&= \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_w - \boldsymbol{L}(k)\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\
&= [\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}(k)\boldsymbol{C}]\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_w, \quad \boldsymbol{P}(1) = \boldsymbol{I}_n.
\end{aligned} \tag{8.6.11}
$$

这是我们发现推导卡尔曼状态估计算法的一种最简便方法, 是 K. J. Åström 在他的书中给出的. 从上述推导过程看: 这种状态估计误差具有最小方差性质. 但理论上要证明这个结论还十分困难, 还没有取得很好的结果, 这也是有待研究的困难课题.

Kalman 状态估计算法 (8.6.9)~(8.6.11) 中包含了噪声向量协方差阵 $\boldsymbol{R}_v$ 和 $\boldsymbol{R}_w$, 在未知情形下, 在算法中可分别用其估计 $\hat{\boldsymbol{R}}_v(k)$ 和 $\hat{\boldsymbol{R}}_w(k)$ 代替:

$$
\hat{\boldsymbol{R}}_w(k+1) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}[\hat{\boldsymbol{x}}(i+1) - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(i) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(i)][\hat{\boldsymbol{x}}(i+1) - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(i) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(i)]^{\mathrm{T}}, \tag{8.6.12}
$$

$$
\hat{\boldsymbol{R}}_v(k+1) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}[\boldsymbol{y}(i) - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(i) - \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(i)][\boldsymbol{y}(i) - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(i) - \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(i)]^{\mathrm{T}}. \tag{8.6.13}
$$

对于未知参数矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$, 我们提出了状态与参数联合估计的递阶辨识方法, 研究论文 “多变量系统状态空间模型的递阶辨识” 发表在《控制与决策》2005 年第 8 期上 [66].

卡尔曼滤波算法是解决系统参数矩阵和噪声协方差阵已知时的状态估计问题, 对于未知系统参数矩阵和噪声协方差阵情形, 可用本书作者提出的递阶辨识原理 [1], 研究系统状态和参数同时估计问题. 在这方面, 我们提出了观测器规范型 [34, 36, 67] 和能观测性规范型 [37, 68] 的状态与参数联合估计方法、双率采样数据系统的联合参数与状态估计的递阶辨识方法 [69, 70]、非均匀采样数据系统的状态与参数递阶辨识方法 [6, 71]. 这些工作大多基于状态空间规范模型结构, 最近笔者研究了一般状态空间系统的 “稀少数据量测系统状态与参数联合估计方法”, 见 *Signal Processing* 杂志 2014 年 104 卷 369—380 页 [35].

### 8.6.2 线性时变离散时间状态空间系统

考虑下列线性时变多变量离散时间系统,

$$
\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{w}(k), \tag{8.6.14}
$$

$$
\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}(k)\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{v}(k), \quad \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(0)] = \boldsymbol{x}_0, \tag{8.6.15}
$$

其中 $\boldsymbol{A}(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B}(k) \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{C}(k) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{D}(k) \in \mathbb{R}^{m\times r}$ 为系统 **时变参数矩阵** (Time-Varying Parameter Matrix), 其余变量定义同前.

采用类比方法, 我们能够得到时变系统 (8.6.14)~(8.6.15) 的 **卡尔曼滤波算法**:

$$
\hat{\boldsymbol{x}}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\hat{\boldsymbol{x}}(k) + \boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{L}(k)[\boldsymbol{y}(k) - \boldsymbol{C}(k)\hat{\boldsymbol{x}}(k) - \boldsymbol{D}(k)\boldsymbol{u}(k)], \tag{8.6.16}
$$

$$
\boldsymbol{L}(k) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(k)[\boldsymbol{R}_v + \boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(k)]^{-1}, \tag{8.6.17}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(k+1) &= \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k) + \boldsymbol{R}_w \\
&\quad - \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(k)[\boldsymbol{R}_v + \boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(k)]^{-1}\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k) \\
&= [\boldsymbol{A}(k) - \boldsymbol{L}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(k)]\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k) + \boldsymbol{R}_w.
\end{aligned} \tag{8.6.18}
$$

算法中的未知噪声协方差阵 $\boldsymbol{R}_v$ 和 $\boldsymbol{R}_w$ 可用其估计 $\hat{\boldsymbol{R}}_v(k)$ 和 $\hat{\boldsymbol{R}}_w(k)$ 代替, 计算表达式如下:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{R}}_w(k+1)=&\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}[\hat{\boldsymbol{x}}(i+1)-\boldsymbol{A}(k)\hat{\boldsymbol{x}}(i)-\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(i)]\\&\times[\hat{\boldsymbol{x}}(i+1)-\boldsymbol{A}(k)\hat{\boldsymbol{x}}(i)-\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(i)]^{\mathrm{T}},\end{aligned}\tag{8.6.19}$$

$$\hat{\boldsymbol{R}}_v(k+1)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}[\boldsymbol{y}(i)-\boldsymbol{C}(k)\hat{\boldsymbol{x}}(i)-\boldsymbol{D}(k)\boldsymbol{u}(i)][\boldsymbol{y}(i)-\boldsymbol{C}(k)\hat{\boldsymbol{x}}(i)-\boldsymbol{D}(k)\boldsymbol{u}(i)]^{\mathrm{T}}.\tag{8.6.20}$$

对于未知噪声向量协方差阵 $\boldsymbol{R}_v$ 和 $\boldsymbol{R}_w$, 也可在 Kalman 滤波算法中简单取 $\boldsymbol{R}_v=\boldsymbol{I}_m$ 和 $\boldsymbol{R}_w=\varepsilon\boldsymbol{I}_n$, $\varepsilon$ 是一个小正数. 相关 Kalman 滤波参数估计算法在非均匀采样离散系统的应用参见 9.6 节.

虽然卡尔曼滤波算法是从最优的角度推导出来的 (极小化参数估计误差协方差阵得到的), 即使假设 $\boldsymbol{R}_v$ 和 $\boldsymbol{R}_w$ 是已知的, 它的最优性和收敛性证明也是十分困难的, 要推导其参数估计误差显式收敛上界就更困难了, 更不用说 $\boldsymbol{R}_v$ 和 $\boldsymbol{R}_w$ 未知的情形. 尽管卡尔曼滤波算法的提出已有半个多世纪的历史, 相关的研究论文也发表了不少, 但还没有得到简洁的、显式的参数估计误差上界. 可见, 在这个算法最优性、收敛性的研究上还有许多路要走.

## 8.7　卡尔曼滤波用于系统参数辨识

卡尔曼滤波可以用于估计状态空间系统的状态, 如果把系统的辨识模型看作一个状态空间系统, 那么卡尔曼滤波也可以用于参数估计, 这说明了滤波与参数估计的关系.

**卡尔曼滤波算法** (Kalman Filtering Algorithm, **KF 算法**) 是基于状态空间模型滤波原理, 将辨识模型看作一个 “状态空间模型”, 应用 Kalman 滤波原理而得到的辨识算法, 因为是用于参数估计的, 所以也称为 **卡尔曼参数估计算法**.

### 8.7.1　加权递推最小二乘辨识算法

对于我们熟悉的辨识模型, 即线性回归辨识模型:

$$y(k)=\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\theta}+v(k),\tag{8.7.1}$$

其中 $y(k)$ 为系统输出, $\boldsymbol{\varphi}(k)\in\mathbb{R}^n$ 是由系统输入输出数据构成的回归信息向量, $v(k)$ 是零均值、方差为 $\sigma_v^2$ 的不相关随机噪声, $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^n$ 是待辨识的参数向量.

系统辨识就是利用系统的输入输出数据计算系统的参数估计. 对于线性回归模型 (8.7.1), $v(k)$ 是不可测的, 辨识目标就是利用观测信息 $\{y(k),\boldsymbol{\varphi}(k)\}$ 估计系统的参数向量 $\boldsymbol{\theta}$.

如果将系统参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 看作系统状态向量 $\boldsymbol{\theta}(k)=\boldsymbol{\theta}$, 就得到一个特殊的状态空间模型:

$$\boldsymbol{\theta}(k+1)=\boldsymbol{\theta}(k),\tag{8.7.2}$$

$$y(k)=\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\theta}+v(k).\tag{8.7.3}$$

那么可用卡尔曼滤波算法来估计参数向量 $\boldsymbol{\theta}$. 将式 (8.7.2)~ 式 (8.7.3) 与式 (8.6.1)~ 式 (8.6.2) 比较, 将 $\boldsymbol{\theta}(k)$ 看作状态 $\boldsymbol{x}(k)$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{w}(k)\equiv\boldsymbol{0}$ (即 $\boldsymbol{R}_w=\boldsymbol{0}$), $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)$, $\boldsymbol{D}=0$, $\boldsymbol{R}_v=\sigma_v^2=\mathrm{E}[v^2(k)]$, 代入式 (8.6.9)~ 式 (8.6.11) 可得 **卡尔曼参数估计算法**:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)+\boldsymbol{L}(k)[y(k)-\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)],\tag{8.7.4}$$

$$\boldsymbol{L}(k)=\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{\varphi}(k)[\sigma_v^2+\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{\varphi}(k)]^{-1},\tag{8.7.5}$$

$$\boldsymbol{P}(k+1)=\boldsymbol{P}(k)-\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{\varphi}(k)[\sigma_v^2+\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{\varphi}(k)]^{-1}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k). \tag{8.7.6}$$

实际上, 卡尔曼滤波算法用于时不变参数估计, 得到的卡尔曼参数估计算法 (8.7.4)~(8.7.6) 就是一个 **加权递推最小二乘算法**, 可等价表示为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)+\boldsymbol{L}(k)[y(k)-\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)], \tag{8.7.7}$$

$$\boldsymbol{L}(k)=\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)[\sigma_v^2+\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)]^{-1}, \tag{8.7.8}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(k)&=\boldsymbol{P}(k-1)-\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)[\sigma_v^2+\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)]^{-1}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)\\&=[\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{L}(k)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)]\boldsymbol{P}(k-1),\quad \boldsymbol{P}(0)=p_0\boldsymbol{I}_n.\end{aligned} \tag{8.7.9}$$

分析表明算法对 $\sigma_v^2$ 不敏感, $\sigma_v^2$ 取为常数即可, 最简单就是取 $\sigma_v^2=1$, 这时算法就是标准的递推最小二乘辨识算法. 本书作者指导研究生刘艳君完成了论文 “通过极小化参数估计误差协方差阵的递推最小二乘算法” [72], 指导硕士生庄林凡完成了论文 “基于单输入单输出系统规范状态空间模型的参数和状态估计算法” [73], 指导博士生顾亚完成了 “d 步状态迟延多变量状态空间系统的联合参数与状态估计” [74]、“多状态迟延状态空间模型最小二乘参数辨识算法” [75] 和 “单位迟延状态空间模型的参数与状态估计算法” [76].

### 8.7.2 协方差阵修正最小二乘辨识算法

最小二乘辨识算法的协方差阵 $\boldsymbol{P}(k)$ 随着时间 $k$ 推移趋于零, 故不能跟踪时变参数. 为了跟踪时变参数, 可采用协方差阵修正最小二乘辨识算法. 协方差阵修正最小二乘辨识算法也称协方差修正卡尔曼滤波估计算法. 考虑时变参数线性回归模型:

$$y(k)=\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\theta}(k)+v(k), \tag{8.7.10}$$

其中 $y(k)$ 为系统输出, $\boldsymbol{\varphi}(k)\in\mathbb{R}^n$ 是由系统输入输出数据构成的回归信息向量, $v(k)$ 是零均值、方差为 $\sigma_v^2$ 的不相关随机噪声, $\boldsymbol{\theta}(k)\in\mathbb{R}^n$ 是待辨识的时变参数向量. 辨识目标就是利用观测信息 $\{y(k),\boldsymbol{\varphi}(k)\}$ 估计系统的时变参数向量 $\boldsymbol{\theta}(k)$.

$\boldsymbol{\theta}(k)$ 是一个时变参数向量, 定义参数变化率 $\boldsymbol{w}(k):=\boldsymbol{\theta}(k)-\boldsymbol{\theta}(k-1)$. 如果把 $\boldsymbol{w}(k)$ 看作一个零均值不相关噪声向量, 联立式 (8.7.10) 就得到一个 “状态空间系统”:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\theta}(k)=\boldsymbol{\theta}(k-1)+\boldsymbol{w}(k),\\ y(k)=\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\theta}(k-1)+v(k).\end{cases} \tag{8.7.11}$$

应用 Kalman 滤波器 (8.6.9)~(8.6.11), 就得到估计 “状态向量” (即时变参数向量) $\boldsymbol{\theta}(k)$ 的 **卡尔曼滤波参数估计算法**, 即 **协方差阵修正最小二乘算法 (CVM-RLS 算法)**:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)+\boldsymbol{L}(k)[y(k)-\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)],\quad \hat{\boldsymbol{\theta}}(0)=\mathbf{1}_n/p_0, \tag{8.7.12}$$

$$\boldsymbol{L}(k)=\frac{\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)}{\sigma_v^2+\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)}, \tag{8.7.13}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(k)&=\boldsymbol{P}(k-1)-\frac{\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)}{\sigma_v^2+\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)}+\boldsymbol{Q}\\&=[\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{L}(k)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)]\boldsymbol{P}(k-1)+\boldsymbol{Q},\quad \boldsymbol{P}(0)=p_0\boldsymbol{I}_n,\end{aligned} \tag{8.7.14}$$

$$\boldsymbol{Q}=\mathrm{E}[\boldsymbol{w}(k)\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(k)], \tag{8.7.15}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 是参数变化率 $\boldsymbol{w}(k) := \boldsymbol{\theta}(k) - \boldsymbol{\theta}(k-1)$ 的协方差阵, 它作为参数估计误差向量协方差阵 $\boldsymbol{P}(k)$ 的修正项. 因为参数估计向量是未知的, 因此参数变化率 $\boldsymbol{w}(k)$ 不可得到, 所以在算法中, $\boldsymbol{Q}$ 可以简单取为一个小矩阵, $\boldsymbol{Q} = \varepsilon \boldsymbol{I}_n$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, 取 $\sigma_v^2 = 1$. 当 $\boldsymbol{Q}$ 不为零时, $\boldsymbol{P}(k)$ 就不会趋于零, 从而保留算法的活性, 能跟踪时变参数.

## 8.8 思 考 题

1. 设采样周期为 $T = 0.1$ s 和 $T = 1$ s 时, 采用脉冲不变离散化和采用阶跃不变离散化, 将下列连续时间状态空间系统离散化,

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [2,\ 1]\boldsymbol{x}(t). \end{cases}$$

2. 设采样周期为 $T = 0.1$ s, $T = 1$ s 和 $T = 2$ s 时, 采用脉冲不变离散化和采用阶跃不变离散化, 将下列连续时间状态空间系统离散化,

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [2,\ 1]\boldsymbol{x}(t). \end{cases}$$

3. 设采样周期为 $T = 0.5$ s, $T = 1$ s, $T = 2$ s, $T = 3$ s 时, 采用脉冲不变离散化, 将下列连续时间状态空间系统离散化,

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & \pi \\ -\pi & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [2,\ 1]\boldsymbol{x}(t). \end{cases}$$

4. 设采样周期为 $T = 0.5$ s, $T = 1$ s, $T = 2$ s, $T = 3$ s 时, 采用阶跃不变离散化, 将下列连续时间状态空间系统离散化, 并将离散化状态空间系统连续化,

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & \pi \\ -\pi & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [2,\ 1]\boldsymbol{x}(t). \end{cases}$$

5. 对于连续时间状态空间系统,

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & \pi \\ -\pi & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [2,\ 1]\boldsymbol{x}(t). \end{cases}$$

   其传递函数 $G(s)$, 设采样周期分别为 $T = 0.5$ s, $T = 1$ s, $T = 2$ s, $T = 3$ s 时, 用脉冲不变 Z–S 变换将其离散化求 $H(z)$, 再求 $G(s)$.

6. 对于连续时间状态空间系统,

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & \pi \\ -\pi & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [2,\ 1]\boldsymbol{x}(t). \end{cases}$$

其传递函数 $G(s)$, 设采样周期分别为 $T=0.5$ s, $T=1$ s, $T=2$ s, $T=3$ s 时, 用阶跃不变 Z–S 变换将其离散化求 $H(z)$, 再求 $G(s)$.

7. 设连续时间系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}u(t), \\ y(t)=[0,\ 1]\boldsymbol{x}(t), \end{cases}$$

(1) 求系统的单位脉冲响应 $g(t)$ 和单位阶跃响应 $y(t)$; (2) 设采样周期分别为 $T=0.1$ s 和 $T=1$ s, 用 8.2.3 节的脉冲不变离散化方法和 8.2.4 节的阶跃不变离散化方法离散化这个系统, 求系统的离散时间状态空间模型, 分别求离散模型的单位脉冲响应 $h(kT)$ 和单位阶跃响应 $w(kT)$, 并分别与 $g(t)$ 和 $y(t)$ 比较, 绘制曲线进行比较.

8. 设连续时间系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)},$$

(1) 求系统的单位脉冲响应 $g(t)$ 和单位阶跃响应 $y(t)$; (2) 设采样周期分别为 $T=0.1$ s 和 $T=1$ s, 分别用 8.4 节的欧拉变换、双线性变换、脉冲不变 Z–S 变换、阶跃不变 Z–S 变换离散化这个系统, 求对应的离散时间传递函数 $H(z)$, 分别求离散传递函数的单位脉冲响应 $h(kT)$ 和单位阶跃响应 $w(kT)$, 并分别与 $g(t)$ 和 $y(t)$ 比较, 绘制曲线进行比较.

9. 设连续时间系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)},$$

(1) 求系统的单位脉冲响应 $g(t)$, 求系统的单位阶跃响应 $y(t)$; (2) 设采样周期分别为 $T=0.1$ s 和 $T=1$ s, 分别用 8.4 节的欧拉变换、双线性变换、脉冲不变 Z–S 变换、阶跃不变 Z–S 变换离散化这个系统, 求对应的离散时间传递函数 $H(z)$, 分别求离散传递函数的单位脉冲响应 $h(kT)$ 和单位阶跃响应 $w(kT)$, 并分别与 $g(t)$ 和 $y(t)$ 比较, 绘制曲线, 比较连续系统与离散模型的静态增益.

10. 设采样周期分别为 $T=0.1$ s 和 $T=1$ s, 利用欧拉变换、双线性变换、脉冲不变 Z–S 变换、阶跃不变 Z–S 变换, 计算下列连续时间传递函数 $G(s)$ 对应离散传递函数 $H(z)$:

(1) $$G(s)=\frac{1}{s(s+1)^2},$$

(2) $$G(s)=\frac{1}{s^2(s+1)},$$

(3) $$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s-1)}.$$

11. 设采样周期分别为 $T=0.1$ s, $T=1$ s, $T=2$ s, $T=3$ s, $T=4$ s, 利用欧拉变换、双线性变换、脉冲不变 Z–S 变换、阶跃不变 Z–S 变换, 计算下列连续时间传递函数 $G(s)$ 对应离散传递函数 $H(z)$:

(1) $$G(s) = \frac{\pi}{(s+0.05)^2+\pi^2},$$

(2) $$G(s) = \frac{s+0.05}{(s+0.05)^2+\pi^2},$$

(3) $$G(s) = \frac{\pi}{(s+1)^2+\pi^2},$$

(4) $$G(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+\pi^2},$$

并由 $H(z)$ 求 $G(s)$, 比较离散模型和连续模型的脉冲响应或阶跃响应, 并对变换中的问题进行讨论.

第 9 章
CHAPTER 9

# 连续时间系统从其离散化模型的重构

本章内容选自本书作者 2009 年发表在国际权威期刊 *Automatica* 45 卷第 2 期上的 Regular Paper 论文 “Reconstruction of continuous-time systems from their non-uniformly sampled discrete-time systems” [6], 讨论了连续时间系统的离散化问题、连续系统从其离散时间模型重构问题, 推导了非均匀周期采样数据系统的状态空间模型, 讨论了对应离散模型的能控性与能观性条件、非均匀采样系统的单率模型的计算、连续系统的重构、非均匀周期采样离散状态空间模型的递阶参数辨识算法, 最后是非均匀离散系统参数辨识仿真例子.

## 9.1 连续时间系统离散化与反问题

本节讨论连续时间系统的离散化问题, 以及连续时间系统从其对应的离散时间模型重构问题.

### 9.1.1 连续时间系统离散化

考虑下列线性连续时间状态空间模型,

$$P:\quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t),\end{cases} \tag{9.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$、$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbb{R}^r$ 和 $\boldsymbol{y}(t)\in\mathbb{R}^m$ 分别为系统的状态向量、输入向量和输出向量, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$、$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times r}$、$\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{D}\in\mathbb{R}^{m\times r}$ 为常数矩阵.

**定理 9.1.1** 假设采样间隔 (Sampling Interval) 为 $\tau$. 使用阶跃不变变换 (Step-Invariant Transformation) 或零阶保持器 (Zero-Order Hold, ZOH) 离散化, 即取 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{u}(k\tau)$, $k\tau\leqslant t<(k+1)\tau$, 离散化系统 (9.1.1) 得到离散时间模型 (参看 8.2.4 节):

$$P_\tau:\quad \begin{cases} \boldsymbol{x}(k\tau+\tau)=\boldsymbol{G}_\tau\boldsymbol{x}(k\tau)+\boldsymbol{F}_\tau\boldsymbol{u}(k\tau),\\ \quad\boldsymbol{y}(k\tau)\quad=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k\tau)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k\tau),\quad k=0,1,2,\cdots\end{cases} \tag{9.1.2}$$

其中 $\boldsymbol{x}(k\tau)=\boldsymbol{x}(t)\,|_{t=k\tau}$, $\boldsymbol{y}(k\tau)=\boldsymbol{y}(t)\,|_{t=k\tau}$,

$$\boldsymbol{G}_\tau:=\exp(\boldsymbol{A}\tau)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\tau}, \tag{9.1.3}$$

$$\boldsymbol{F}_\tau:=\int_0^\tau\exp(\boldsymbol{A}t)\mathrm{d}t\boldsymbol{B}=\int_0^\tau\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t\boldsymbol{B}. \tag{9.1.4}$$

离散化过程如图 9.1.1 所示, 其中 $H$ 和 $S$ 分别为周期为 $\tau$ 的 ZOH 和采样器 (Sampler). 我们称 $P_\tau=SPH$ 为单率离散时间模型 (Single-Rate Discrete-Time Model) 或单率采样数据系统 (Single-Rate Sampled-Data System), 因为系统中只存在一个采样频率 (One Sampling Rate) $1/\tau$. 传统的采样数据系统就是一个单率系统. 离散系统的模型参数依赖于采样周期, 即使连续时间系统的参数是常数, 不同的采样周期的离散模型的参数也是不同的.

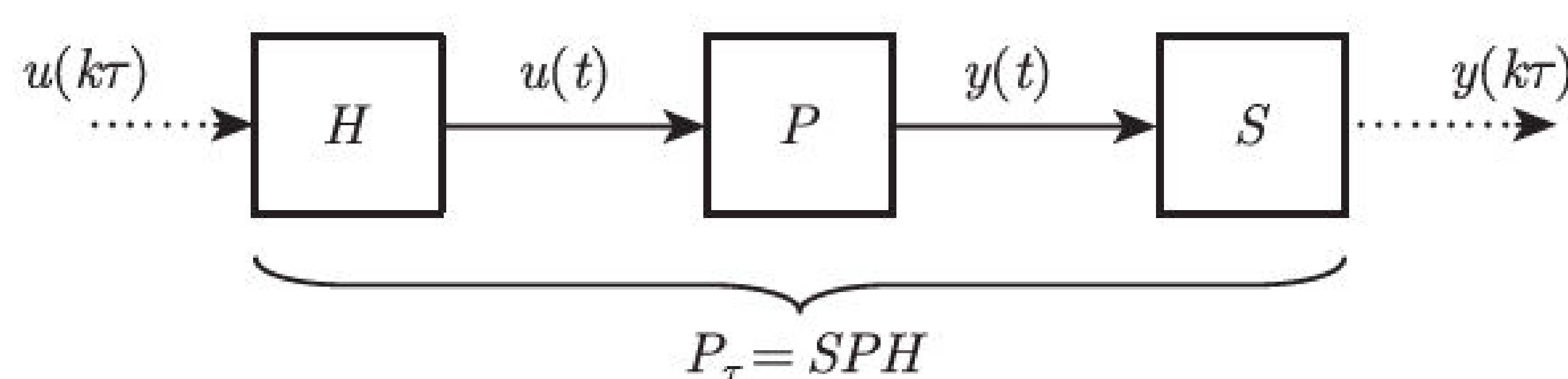



图 9.1.1　周期采样离散时间系统

### 9.1.2　连续时间系统离散化问题

设采样间隔为 $\tau$, 离散化下列单输入单输出 (SISO) 连续时间状态空间系统:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\sigma & \omega \\ -\omega & -\sigma \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} \sigma^2+\omega^2 \\ \sigma^2+\omega^2 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [7,\ 8]\boldsymbol{x}(t). \end{cases}$$

先求 **转移矩阵** $\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$,

$$(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} s+\sigma & -\omega \\ \omega & s+\sigma \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+\sigma)^2+\omega^2} \begin{pmatrix} s+\sigma & \omega \\ -\omega & s+\sigma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega^2} & \dfrac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2} \\ \dfrac{-\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2} & \dfrac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega^2} \end{pmatrix}.$$

进行 **Laplace 逆变换** 得到转移矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A})^{-1}]$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\sigma t}\cos(\omega t) & \mathrm{e}^{-\sigma t}\sin(\omega t) \\ -\mathrm{e}^{-\sigma t}\sin(\omega t) & \mathrm{e}^{-\sigma t}\cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

利用积分公式

$$\int \mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma^2+\omega^2}\mathrm{e}^{\sigma t}[\sigma\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)] + C,$$

$$\int \mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma^2+\omega^2}\mathrm{e}^{\sigma t}[\omega\sin(\omega t) + \sigma\cos(\omega t)] + C,$$

我们有

$$\boldsymbol{G}_\tau = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\tau} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\sigma\tau}\cos(\omega\tau) & \mathrm{e}^{-\sigma\tau}\sin(\omega\tau) \\ -\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\sin(\omega\tau) & \mathrm{e}^{-\sigma\tau}\cos(\omega\tau) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}_\tau = \int_0^\tau \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t\boldsymbol{B} = \int_0^\tau \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\sigma t}\cos(\omega t) & \mathrm{e}^{-\sigma t}\sin(\omega t) \\ -\mathrm{e}^{-\sigma t}\sin(\omega t) & \mathrm{e}^{-\sigma t}\cos(\omega t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t\boldsymbol{B}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sigma^2+\omega^2}\mathrm{e}^{-\sigma t}[\omega\sin(\omega t) - \sigma\cos(\omega t)] & \dfrac{1}{\sigma^2+\omega^2}\mathrm{e}^{-\sigma t}[-\sigma\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)] \\ -\dfrac{1}{\sigma^2+\omega^2}\mathrm{e}^{-\sigma t}[-\sigma\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)] & \dfrac{1}{\sigma^2+\omega^2}\mathrm{e}^{-\sigma t}[\omega\sin(\omega t) - \sigma\cos(\omega t)] \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0}^{t=\tau} \boldsymbol{B}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{e^{-\sigma\tau}[\omega\sin(\omega\tau)-\sigma\cos(\omega\tau)]+\sigma}{\sigma^2+\omega^2} & \dfrac{e^{-\sigma\tau}[-\sigma\sin(\omega\tau)-\omega\cos(\omega\tau)]+\omega}{\sigma^2+\omega^2} \\ \dfrac{-e^{-\sigma\tau}[-\sigma\sin(\omega\tau)-\omega\cos(\omega\tau)]-\omega}{\sigma^2+\omega^2} & \dfrac{e^{-\sigma\tau}[\omega\sin(\omega\tau)-\sigma\cos(\omega\tau)]+\sigma}{\sigma^2+\omega^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma^2+\omega^2 \\ \sigma^2+\omega^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} e^{-\sigma\tau}[(-\sigma+\omega)\sin(\omega\tau)-(\sigma+\omega)\cos(\omega\tau)]+(\sigma+\omega) \\ e^{-\sigma\tau}[(\sigma+\omega)\sin(\omega\tau)-(\sigma-\omega)\cos(\omega\tau)]+(\sigma-\omega) \end{pmatrix}.$$

因此离散系统的状态空间模型为

$$\boldsymbol{x}(k\tau+\tau)=\begin{pmatrix} e^{-\sigma\tau}\cos(\omega\tau) & e^{-\sigma\tau}\sin(\omega\tau) \\ -e^{-\sigma\tau}\sin(\omega\tau) & e^{-\sigma\tau}\cos(\omega\tau) \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k\tau)$$

$$+\begin{pmatrix} e^{-\sigma\tau}[(-\sigma+\omega)\sin(\omega\tau)+(\sigma-\omega)\cos(\omega\tau)]+(\sigma+\omega) \\ e^{-\sigma\tau}[(\sigma+\omega)\sin(\omega\tau)+(\sigma+\omega)\cos(\omega\tau)]+(\sigma-\omega) \end{pmatrix}u(k\tau),$$

$$y(k\tau)=[7,\ 8]\boldsymbol{x}(k\tau),\quad k=0,1,2,\cdots$$

下面讨论这个离散系统的特征值随采样间隔 $\tau$ 的变化情况. 令 $|\lambda\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A}|=0$, 得到

$$\begin{vmatrix} \lambda+\sigma & -\omega \\ \omega & \lambda+\sigma \end{vmatrix}=0,$$

即 $(\lambda+\sigma)^2+\omega^2=0$, 所以连续时间系统有两个共轭特征值 $\lambda_1=-\sigma+\mathrm{j}\omega$ 和 $\lambda_2=-\sigma-\mathrm{j}\omega$. 令 $|z\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{G}_\tau|=0$, 得到

$$\begin{vmatrix} z-e^{-\sigma\tau}\cos(\omega\tau) & -e^{-\sigma\tau}\sin(\omega\tau) \\ e^{-\sigma\tau}\sin(\omega\tau) & z-e^{-\sigma\tau}\cos(\omega\tau) \end{vmatrix}=0,$$

即 $[z-e^{-\sigma\tau}\cos(\omega\tau)]^2+e^{-2\sigma\tau}\sin^2(\omega\tau)=0$, 所以离散时间系统的两个特征值为

$$z_1=e^{-\sigma\tau}\cos(\omega\tau)+\mathrm{j}e^{-\sigma\tau}\sin(\omega\tau),$$

$$z_2=e^{-\sigma\tau}\cos(\omega\tau)-\mathrm{j}e^{-\sigma\tau}\sin(\omega\tau).$$

它们与采样周期 $\tau$ 有关. 根据谱映射定理 2.3.5, 以及 $\boldsymbol{G}_\tau$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的关系可知 $z_1=e^{\lambda_1\tau}$, $z_2=e^{\lambda_2\tau}$.

这里可以看出, $\sigma\neq0$、$\omega\neq0$ 时, 连续系统有两个不同的特征值 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$, 当 $\sin(\omega\tau)\neq0$ 时, 离散系统也有两个不同的特征值 (在不同的点); 当 $\sin(\omega\tau)=0$, 即 $\omega\tau=l\pi$, 或采样周期为 $\tau=l\pi/\omega$ $(l=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时, 离散系统的两个特征值相等 (在同一个点上), 这可能导致信息损失问题. 也就是说, 采样间隔 (采样周期) $\tau$ 的不合理选择, 可能使得离散系统不能保证能控性和 (或) 能观测性.

定义采样频率 (Sampling Frequency) $\omega_s:=\dfrac{2\pi}{\tau}$ (rad/s). 如果连续系统的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个特征值 $\lambda_i$ 和 $\lambda_j$ 满足 $\lambda_i-\lambda_j=\pm\dfrac{2l\pi\sqrt{-1}}{\tau}$ $(l=1,2,\cdots)$, 那么就称采样周期 $\tau$ (采样频率 $\omega_s$) 是病态的 (Pathological), 否则称采样周期 $\tau$ 是非病态的 (Non-Pathological).

**定理 9.1.2** 假设连续时间系统 $P$ 是能控的和能观测的, 那么离散时间系统 $P_\tau$ 保持能控性和能观测性的条件是采样周期 $\tau$ 是非病态的, 即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不存在两个特征值 $\lambda_i$ 和 $\lambda_j$ 满

足

$$\lambda_i - \lambda_j = \pm\frac{2l\pi\sqrt{-1}}{\tau}, \quad l = 1, 2, \cdots$$

**证明** 证明参见相关文献 [33], 这里从略. 这个结论可以推广到非均匀采样数据系统.

### 9.1.3 连续时间系统的重构问题

对于给定的采样周期 $\tau$, 从连续时间模型 $P$ 可以得到唯一的离散时间模型 $P_\tau$, 即从连续系统 (9.1.1) 得到的离散系统 (9.1.2) 是唯一的, 因为从式 (9.1.3)~ 式 (9.1.4) 可知, 从连续时间系统的参数 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可以计算出唯一的离散系统参数 $\boldsymbol{G}_\tau$ 和 $\boldsymbol{F}_\tau$, 离散系统的参数 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 与连续系统的相同.

从离散时间模型 $P_\tau$ 恢复连续时间模型 $P$ 的过程称为连续时间系统重构 (Reconstruction). 连续时间系统重构就是从离散模型 $P_\tau(\boldsymbol{G}_\tau, \boldsymbol{F}_\tau, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ 恢复连续时间模型 $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$. 因为连续系统的参数 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 与离散系统的相同, 所以连续时间系统重构任务就是从矩阵 $\boldsymbol{G}_\tau$ 和 $\boldsymbol{F}_\tau$ 确定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$.

从式 (9.1.3) 和式 (9.1.4) 可知, 连续系统重构的关键就是确定矩阵 $\boldsymbol{A}$, 一旦确定了 $\boldsymbol{A}$, 那么 $\boldsymbol{B}$ 可以通过下式计算:

$$\boldsymbol{B} = \left[\int_0^\tau \exp(\boldsymbol{A}t)\mathrm{d}t\right]^{-1}\boldsymbol{F}_\tau, \tag{9.1.5}$$

因为矩阵指数的积分总是可逆的.

确定 $\boldsymbol{A}$ 的关键就是找矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 即连续系统 $P$ 传递矩阵 $\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$ 的极点 [5]. 根据谱映射定理 2.3.5, $f(s) = \mathrm{e}^s$ 是整个复平面上的解析函数 (Analytic Function), $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值等于函数 $f(s)$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的特征值点的值. 根据式 (9.1.3), 可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i[\boldsymbol{A}]$ 与 $\boldsymbol{G}_\tau$ 的特征值 $\lambda_i[\boldsymbol{G}_\tau]$ 有如下关系:

$$\lambda_i[\boldsymbol{G}_\tau] = \mathrm{e}^{\lambda_i[\boldsymbol{A}\tau]}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

因为 $\mathrm{e}^s$ 是以 $\mathrm{j}2\pi$ 为周期的周期函数, 即 $\mathrm{e}^{s+\mathrm{j}2\pi} = \mathrm{e}^s$, $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的可能特征值为

$$\lambda_i[\boldsymbol{A}] = \frac{1}{\tau}\mathrm{Ln}\{\lambda_i[\boldsymbol{G}_\tau]\} = \frac{1}{\tau}\ln\{\lambda_i[\boldsymbol{G}_\tau]\} + \frac{\mathrm{j}2k\pi}{\tau}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

其中 $\mathbb{Z}$ 为整数集, $\ln\{\lambda_i[\boldsymbol{G}_\tau]\}$ 为 $\mathrm{Ln}\{\lambda_i[\boldsymbol{G}_\tau]\}$ 的主对数 (Principal Logarithm), 幅角满足 $-\pi < \arg\{\lambda_i[\boldsymbol{G}_\tau]\} \leqslant \pi$.

定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值集合:

$$\mathrm{Eig}_\tau = \left\{\frac{1}{\tau}\ln\{\lambda_i[\boldsymbol{G}_\tau]\} + \frac{\mathrm{j}2k\pi}{\tau} :\ i = 1, 2, \cdots, n,\ k \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{9.1.6}$$

利用 **扩展奈奎斯特 — 香农采样定理与恢复定理** 8.2.2 可知, 根据式 (9.1.4), 如果知道 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是实数, 那么 $\boldsymbol{G}_\tau$ 的特征值也都是实数. 这可以帮助我们从集合 $\mathrm{Eig}_\tau$ 中消除实特征值元 $\frac{1}{\tau}\ln\{\lambda_i[\boldsymbol{G}_\tau]\}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 外的所有元. 在这种实特征值情况下, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值可以唯一地从其对应的单个离散时间模型 $P_\tau$ 或 $\boldsymbol{G}_\tau$ 确定.

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有复特征值时, 假设知道特征值 $\lambda_i[\boldsymbol{A}]$ 的虚部上界 $\omega_{\max}$, 即

$$\operatorname{Im}(\lambda_i[\boldsymbol{A}]) \leqslant \omega_{\max}, \quad i=1,2,\cdots,n,$$

那么只要采样足够快 (采样频率 $\omega_s$ 大于 $\omega_{\max}$), 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以从其对应的单个离散时间模型 $P_\tau$ 确定.

事实上, 如果采样周期 $\tau$ 满足 $\tau<\pi/\omega_{\max}$ 时, $P$ 是可重构的, 因为使用上界可以确定集合 $\mathrm{Eig}_\tau$ 只包含 $n$ 个元. 这就是我们陈述的扩展奈奎斯特 — 香农采样定理. 因此, 如果没有其他信息 (如系统极点位置), 连续时间系统 $P$ 是不可能从其对应的单个离散时间模型 $P_\tau$ 唯一确定. 这里的单个离散时间模型指等间隔周期采样的传统离散时间系统模型 $P_\tau$.

最近的研究表明 [5], 对于特别选择的 $n+1$ 个采样周期 $\tau_1,\ \tau_2,\ \cdots,\ \tau_{n+1}$, 连续时间模型 $P$ (可能包含复数参数) 可以唯一地从其对应的 $n+1$ 个离散时间模型 $P_{\tau_i}$ $(i=1,2,\cdots,n+1)$ 重构, 从 $n+1$ 个独立离散模型恢复连续模型的原理如图 9.1.2 所示.

使用离散时间系统辨识技术, 利用系统的离散输入输出数据, 容易辨识出不同采样周期时的离散模型的参数, 进而可以从 $n+1$ 个特定采样周期的离散时间模型 $P_{\tau_i}$ 恢复连续时间系统模型. 尽管这个方法可行, 但代价是需要 $n+1$ 次辨识试验获得观测数据, 执行 $n+1$ 次辨识算法估计参数. 为了简化这个过程, 一个自然的问题是, 能否采用特殊的采样方式, 从一次辨识试验中获得的观测数据, 通过辨识得到的离散模型, 就可以恢复连续时间模型? 答案是肯定的, 这就是下面要讨论的非均匀周期采样离散时间系统.

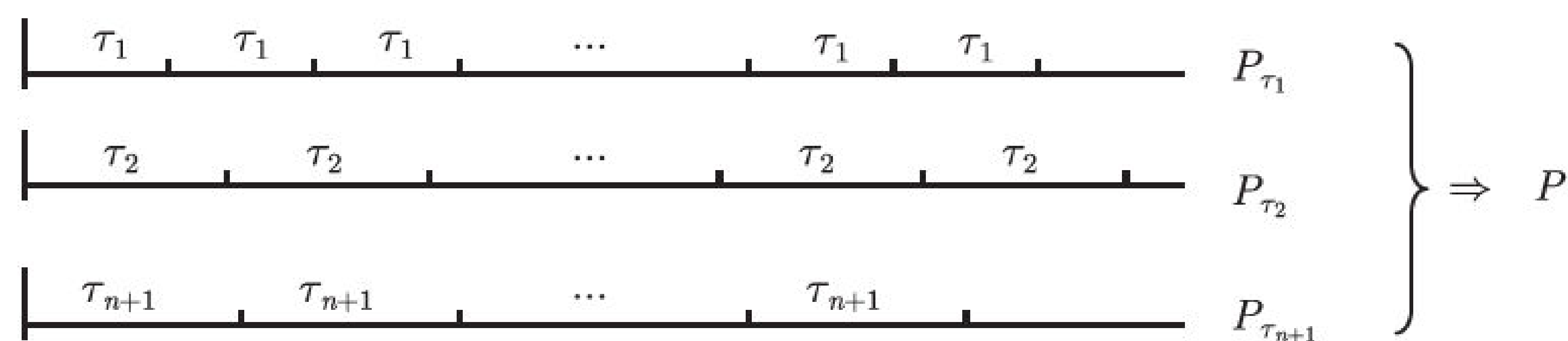



图 9.1.2 $n+1$ 个独立不同采样周期离散模型恢复连续时间模型 $P$

我们提出的非均匀周期采样方案 (Non-uniformly Periodically Sampling Pattern) 如图 9.1.3 所示, 设定 $n+1$ 个采样间隔为 $\tau_1,\ \tau_2,\ \cdots,\ \tau_{n+1}$, 它们按照图中的方式依次在每个框架周期 $T:=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_{n+1}=t_{n+1}$ 上进行采样. 在这样的采样方案下, 可以从获得单个离散时间模型恢复连续时间模型, 因此不必使用 $n+1$ 次不同的辨识试验.

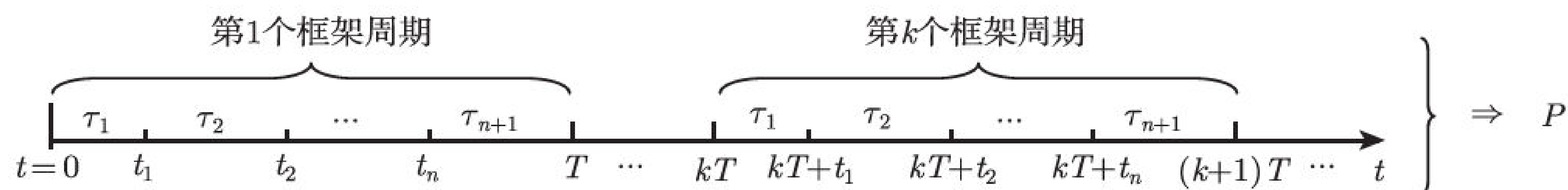



图 9.1.3 周期非均匀采样方案产生连续时间模型 $P$

非均匀采样导致多率采样数据 (Multirate Rate Sampled-Data) 系统, 典型情况是双率采样数据系统, 我们提出了一些双率系统参数辨识方法 [77–79], 如随机梯度算法 [59, 80]、递推最小二乘算法 [81, 82]、递推增广最小二乘算法 [83]、辅助模型随机梯度算法 [56]、辅助模型递推最小二乘算法 [48, 84]、递阶辨识方法 [53, 58, 69, 70], 提出了非均匀多率采样数据系统辨识方

法 [6,71,85,86]、自适应控制算法 [87–89] 等.

## 9.2 非均匀周期采样数据系统模型

非均匀周期采样数据系统的建模就是找出模型 $P_n$ 的输入 $\boldsymbol{u}(kT+t_i)$ 到输出 $\boldsymbol{y}(kT+t_i)$ 的映射关系. 非均匀周期采样数据系统原理如图 9.2.1 所示, 其输入刷新输出采样方案如图 9.1.3 所示, $P$ 是一个连续时间过程, 见定义式 (9.1.1), $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{S}$ 分别为非均匀零阶保持器和非均匀采样器. 非均匀零阶保持器 $\mathcal{H}$ 具有下列特性:

$$\boldsymbol{u}(t)=\begin{cases}\boldsymbol{u}(kT), & kT\leqslant t<kT+t_1,\\ \boldsymbol{u}(kT+t_1), & kT+t_1\leqslant t<kT+t_2,\\ \quad\vdots & \\ \boldsymbol{u}(kT+t_n), & kT+t_n\leqslant t<(k+1)T,\end{cases}$$

非均匀采样器 $\mathcal{S}$ 实现采样 $\boldsymbol{y}(kT+t_i)=\boldsymbol{y}(t)|_{t=kT+t_i}$, $i=0,1,\cdots,n$, $k=0,1,2,\cdots$. 刷新和采样间隔 (Updating and Sampling Intervals) 依次为 $\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_{n+1}\}$, 刷新和采样点为 $t=kT+t_i$, $T=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_{n+1}=t_{n+1}$ 为框架周期 (Frame Period), $t_0=0$, $t_i=t_{i-1}+\tau_i=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_i$. 控制输入 $\boldsymbol{u}$ 在第 $k$ 个框架周期 $[kT,(k+1)T)$ 上, 在时刻 $t=kT+t_i$ $(i=0,1,\cdots,n)$ 刷新 $n+1$ 次, 输出 $\boldsymbol{y}$ 在第 $k$ 个框架周期 $[kT,(k+1)T)$ 上, 在时刻 $t=kT+t_i$ 采样 $n+1$ 次. 这就是非均匀周期刷新采样方案.

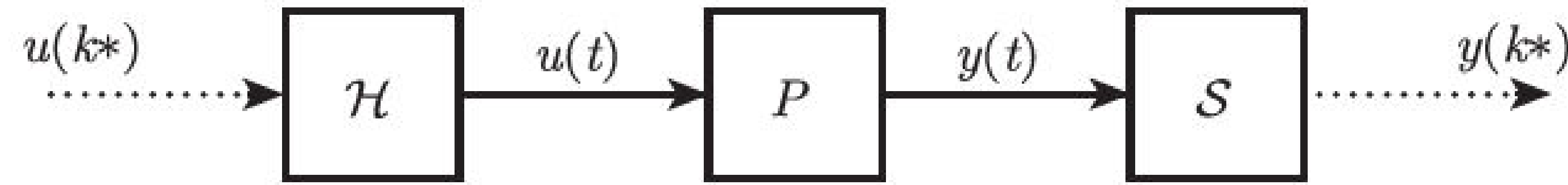



图 9.2.1 非均匀周期刷新采样方案

下面推导图 9.2.1 中非均匀采样数据系统的数学模型, 即建立非均匀采样输入 $\boldsymbol{u}(kT+t_i)$ 与输出 $\boldsymbol{y}(kT+t_i)$ 间的映射关系 [6,85,90].

借鉴 8.2.4 节的连续系统离散化方法, 令 $t_0=kT$, $t=kT+t_i$, 从式 (9.1.1) 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(kT+t_i)&=\exp(\boldsymbol{A}t_i)\boldsymbol{x}(kT)+\int_{kT}^{kT+t_i}\exp[\boldsymbol{A}(kT+t_i-s)]\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s\\&=\exp(\boldsymbol{A}t_i)\boldsymbol{x}(kT)+\sum_{j=1}^{i}\int_{kT+t_{j-1}}^{kT+t_j}\exp[\boldsymbol{A}(kT+t_i-s)]\boldsymbol{B}\mathrm{d}s\boldsymbol{u}(kT+t_{j-1}).\end{aligned}$$

进行变量置换 $t=kT+t_j-s$ 得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(kT+t_i)&=\exp(\boldsymbol{A}t_i)\boldsymbol{x}(kT)+\sum_{j=1}^{i}\exp[\boldsymbol{A}(t_i-t_j)]\int_0^{\tau_j}\exp(\boldsymbol{A}t)\mathrm{d}t\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(kT+t_{j-1})\\&=\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{x}(kT)+\sum_{j=1}^{i}\exp[\boldsymbol{A}(t_i-t_j)]\boldsymbol{F}_{\tau_j}\boldsymbol{u}(kT+t_{j-1}),\end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{G}_i:=\exp(\boldsymbol{A}t_i)\in\mathbb{R}^{n\times n},\quad i=1,2,\cdots,n+1,$$

$$\boldsymbol{G} := \boldsymbol{G}_{n+1} = \exp(\boldsymbol{A}T) = \exp(\boldsymbol{A}t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$\boldsymbol{F}_{\tau_i} := \int_0^{\tau_i} \exp(\boldsymbol{A}t)\mathrm{d}t\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}.$$

定义有关变量:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_i &:= \exp(\boldsymbol{A}(T-t_i))\boldsymbol{F}_{\tau_i} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}_i^{-1}\boldsymbol{F}_{\tau_i} \in \mathbb{R}^{n\times r}, \\ \boldsymbol{F} &:= [\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_{n+1}] \in \mathbb{R}^{n\times(n+1)r},\end{aligned} \tag{9.2.1}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}(kT) := \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}(kT) \\ \boldsymbol{u}(kT+t_1) \\ \boldsymbol{u}(kT+t_2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}(kT+t_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)r} \ (\text{非均匀堆积输入向量}).$$

对于 $i = n+1$, 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(kT+T) &= \boldsymbol{x}(kT+t_{n+1}) \\ &= \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(kT) + \sum_{j=1}^{n+1} \exp[\boldsymbol{A}(T-t_j)]\boldsymbol{F}_{\tau_j}\boldsymbol{u}(kT+t_{j-1}) \\ &= \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{F}\bar{\boldsymbol{u}}(kT),\end{aligned}$$

采样点的输出为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(kT+t_i) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(kT+t_i) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(kT+t_i) \\ &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{C}[\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{G}_1^{-1}\boldsymbol{F}_{\tau_1}, \boldsymbol{G}_i\boldsymbol{G}_2^{-1}\boldsymbol{F}_{\tau_2}, \cdots, \boldsymbol{G}_i\boldsymbol{G}_i^{-1}\boldsymbol{F}_{\tau_i}] \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}(kT) \\ \boldsymbol{u}(kT+t_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}(kT+t_{i-1}) \end{pmatrix} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(kT+t_i) \\ &=: \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{x}(kT) + [\boldsymbol{D}_{i1}, \boldsymbol{D}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{D}_{ii}, \boldsymbol{D}] \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}(kT) \\ \boldsymbol{u}(kT+t_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}(kT+t_{i-1}) \\ \boldsymbol{u}(kT+t_i) \end{pmatrix} \\ &=: \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{H}_i\bar{\boldsymbol{u}}(kT),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_{ij} &:= \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{G}_j^{-1}\boldsymbol{F}_{\tau_1} \in \mathbb{R}^{m\times r}, \quad j = 1, 2, \cdots, i, \\ \boldsymbol{H}_i &:= [\boldsymbol{D}_{i1}, \boldsymbol{D}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{D}_{ii}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{0}, \cdots, \boldsymbol{0}] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)r}.\end{aligned}$$

于是得到非均匀周期采样数据系统的离散数学模型:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}((k+1)T) \\ \hline \boldsymbol{y}(kT) \\ \boldsymbol{y}(kT+t_1) \\ \boldsymbol{y}(kT+t_2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}(kT+t_n) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cccccc} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{F}_1 & \boldsymbol{F}_2 & \cdots & \boldsymbol{F}_n & \boldsymbol{F}_{n+1} \\ \hline \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{D}_{22} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C}_n & \boldsymbol{D}_{n1} & \boldsymbol{D}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{D}_{nn} & \boldsymbol{D} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(kT) \\ \hline \boldsymbol{u}(kT) \\ \boldsymbol{u}(kT+t_1) \\ \boldsymbol{u}(kT+t_2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}(kT+t_n) \end{pmatrix},$$

或

$$P_n: \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(kT+T) \\ \hline \bar{\boldsymbol{y}}(kT) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{G} & \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{H} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(kT) \\ \hline \bar{\boldsymbol{u}}(kT) \end{pmatrix}, \tag{9.2.2}$$

其中

$$\boldsymbol{\Gamma} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}_1 \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\exp(\boldsymbol{A}t_1) \\ \boldsymbol{C}\exp(\boldsymbol{A}t_2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\exp(\boldsymbol{A}t_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)m\times n},$$

$$\boldsymbol{H} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_0 \\ \boldsymbol{H}_1 \\ \boldsymbol{H}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{D}_{22} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{D}_{n1} & \boldsymbol{D}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{D}_{nn} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)m\times(n+1)r},$$

$$\bar{\boldsymbol{y}}(kT) := \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}(kT) \\ \boldsymbol{y}(kT+t_1) \\ \boldsymbol{y}(kT+t_2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}(kT+t_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)m} \text{ (非均匀堆积输出向量)}.$$

为了利用离散观测数据辨识这个模型的参数, 离散模型 (9.2.2) 必须是能控和能观测的. 下面研究离散模型 (9.2.2) 的能控性和能观测性 (Controllability and Observability).

## 9.3 离散时间系统的能控性和能观测性

传统单率采样数据系统离散化模型保证能控性和能观测性的条件是采样周期是非病态的. 对非均匀周期采样数据系统 (9.2.2) 而言, 结论是类似的, 这可总结为如下定理.

**定理 9.3.1** 对于非均匀周期采样离散时间系统 $P_n$, 如果连续时间系统的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 没有两个特征值 $\lambda_i$ 和 $\lambda_j$ 满足等式

$$\lambda_i - \lambda_j = \pm\frac{2l\pi\sqrt{-1}}{T}, \quad l = 1, 2, 3, \cdots \tag{9.3.1}$$

那么 $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A})$ 能观测意味着 $(\boldsymbol{\Gamma},\boldsymbol{G})$ 能观测, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 能控意味着 $(\boldsymbol{G},\boldsymbol{F})$ 能控.

**证明** 证明类似于文献 [33] 中的单率采样数据系统的证明. 相关双率采样数据系统和非均匀采样数据系统的能控性与能观测性证明可参见文献 [70, 91, 92].

根据定理 5.2.4 中 PBH 能观测性判据可知, $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A})$ 能观测意味对 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值 $\lambda$, 下式成立:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}=n. \tag{9.3.2}$$

定义函数

$$f(s):=\frac{\exp(Ts)-\exp(T\lambda)}{s-\lambda},$$

它是一个解析函数, 因为在 $s=\lambda$ 处的极点与零点对消了. 根据式 (9.3.1), 能够推断 $f(s)$ 的零点不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 因为矩阵 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$ 的特征值等于函数 $f(s)$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的特征值处的值, 所以 $s=0$ 不是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$ 的特征值, 那么 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$ 是可逆的. 根据等式

$$\exp(Ts)-\exp(T\lambda)=f(s)(s-\lambda),$$

则有

$$\boldsymbol{G}-\exp(T\lambda)\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}_n),$$

注意到 $\boldsymbol{G}$ 的特征值是 $\exp(T\lambda)$. 因此有

$$\begin{pmatrix}\exp(T\lambda)\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{G}\\ \boldsymbol{\Gamma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{(n+1)m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}_n\end{pmatrix}.$$

因为

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{(n+1)m}\end{pmatrix}=(n+1)m+n,$$

使用式 (9.3.2), 可得

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\exp(T\lambda)\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{G}\\ \boldsymbol{\Gamma}\end{pmatrix}=n.$$

这意味着 $(\boldsymbol{\Gamma},\boldsymbol{G})$ 能观测. 能控性证明是类似的, 这里从略.

定理 9.3.1 说明框架采样周期 $T$ 的选择对保证非均匀周期采样系统的能控性和能观测性是十分重要的. 然而, 即使定理 9.3.1 的条件不满足 (即 $T$ 是病态的), 我们也可以适当选择采样点 $t_i$ 来保证 $P_n$ 的能控性和能观测性. 这可以通过下面的例子加以说明.

考虑一个二阶连续系统 $(n=2)$, 其参数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=[1,\ 0],\ \omega>0.$$

$(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A})$ 是能观测的, $\boldsymbol{A}$ 有两个特征值 $\pm\omega\sqrt{-1}$, 所以 $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ 是一个病态采样周期. 这个系统的转移矩阵为

$$\exp(\boldsymbol{A}t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega} \\ -\omega\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

取采样周期 $\tau = \dfrac{\pi}{\omega}$, 我们有

$$\boldsymbol{G}_\tau = \exp(\boldsymbol{A}\tau) = \begin{pmatrix} \cos\left(\omega\dfrac{\pi}{\omega}\right) & \dfrac{\sin\left(\omega\dfrac{\pi}{\omega}\right)}{\omega} \\ -\omega\sin\left(\omega\dfrac{\pi}{\omega}\right) & \cos(\omega\dfrac{\pi}{\omega}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}_\tau \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 < n = 2.$$

容易看到对于均匀采样方案, 传统等周期采样离散时间系统 $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{G}_\tau)$ 是不可观测的, $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$ 是一个病态采样周期. 对于非均匀采样方案, 取 $\tau_1 < \dfrac{\pi}{\omega}$、$\tau_2 = \dfrac{\pi}{\omega} - \tau_1$、$\tau_3 = \dfrac{\pi}{\omega}$, 有 $t_1 = \tau_1$、$t_2 = \tau_1 + \tau_2 = \dfrac{\pi}{\omega}$、$t_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \dfrac{2\pi}{\omega} = T$. 注意到框架周期 $T$ 是病态的, $\tau_3$, $t_2$和 $t_3$ 都是病态的. 考查非均匀周期采样离散系统的能观测性, 计算

$$\boldsymbol{G} = \exp(\boldsymbol{A}T) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi) & \dfrac{\sin(2\pi)}{\omega} \\ -\omega\sin(2\pi) & \cos(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_1 = \exp(\boldsymbol{A}\tau_1) = \begin{pmatrix} \cos(\omega\tau_1) & \dfrac{\sin(\omega\tau_1)}{\omega} \\ -\omega\sin(\omega\tau_1) & \cos(\omega\tau_1) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_2 = \exp(\boldsymbol{A}t_2) = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & \dfrac{\sin(\pi)}{\omega} \\ -\omega\sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

计算非均匀周期采样离散系统 $P_n$ 的能观测性矩阵:

$$\boldsymbol{Q}_o = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Gamma} \\ \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}_1 \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}_2 \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\omega\tau_1) & \dfrac{\sin(\omega\tau_1)}{\omega} \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \cos(\omega\tau_1) & \dfrac{\sin(\omega\tau_1)}{\omega} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

使用假设 $0 < \tau_1 < \dfrac{\pi}{\omega}$, 有 $\mathrm{rank}[\boldsymbol{Q}_o] = 2 = n$, 即

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Gamma}\\ \boldsymbol{\Gamma G}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}\exp(\boldsymbol{A}t_1)\\ \boldsymbol{C}\exp(\boldsymbol{A}t_2)\\ \boldsymbol{C}\exp(\boldsymbol{A}T)\\ \boldsymbol{C}\exp(\boldsymbol{A}t_1)\exp(\boldsymbol{A}T)\\ \boldsymbol{C}\exp(\boldsymbol{A}t_2)\exp(\boldsymbol{A}T)\end{pmatrix} = 2 = n.$$

因此 $(\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{G})$ 是能观测的.

这个定理说明, 即使框架周期 $T$ 是病态的, 也可以通过选择采样间隔 $\tau_i$ 来保证离散模型 $P_n$ 的能控性和能观测性. 换句话说, 假设连续时间系统是能控的、能观测的, 采样间隔 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n+1}$ 中有一个是非病态的, 那么非均匀周期采样离散时间系统能保留能控性和能观测性. 一个更一般的结果如下.

**定理 9.3.2** 假设连续时间系统 $P$ 是能控和能观测的, 对于图 9.1.3 的非均匀周期采样方案和任意的框架周期 $T$, 令 $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_n =: \tau_0$, 如果比值 $\dfrac{\tau_{n+1}}{\tau_0}$ 是无理数, 那么离散时间系统 $P_n$ 总是能控的和能观测的, 不管框架周期 $T$ 和采样间隔 $\tau_0$ 是否是病态的.

这个定理可以采用与文献 [93] 中类似的方法加以证明. 定理 9.3.2 可以解读为, 只要 $n+1$ 个采样间隔 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n+1}$ 中有一个是非病态的, 或者有两个采样间隔的比值是无理数, 那么离散系统保留能控性和能观测性.

## 9.4 不同采样间隔单率离散模型的计算

一旦我们利用非均匀采样数据 $\{\boldsymbol{u}(kT+t_i), \boldsymbol{y}(kT+t_i)\colon i = 1, 2, \cdots, n+1,\ k = 0, 1, 2, \cdots\}$, 采用某种方法辨识非均匀采样离散时间系统 $P_n$ 的参数矩阵 $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{H})$, 那么一个自然的问题是根据 $P_n$ 确定采样周期为 $\tau_i$ 的单率模型, 共有 $n+1$ 个单率模型 $P_{\tau_i}$.

为了从离散状态空间模型 $P_n$ 得到模型 $P_{\tau_i}$, 我们需要根据式 (9.1.4), 从 $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{H})$ 计算矩阵 $(\boldsymbol{G}_{\tau_i}, \boldsymbol{F}_{\tau_i}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$, 现分述如下.

### 9.4.1 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的计算

根据矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的结构, 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可以直接从 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的前 $m$ 行读出, $\boldsymbol{D}$ 从 $\boldsymbol{H}$ 的 $(1,1)$ 块 (即前 $m$ 行前 $r$ 列) 读出. 然而, 矩阵 $\boldsymbol{D}$ 在 $\boldsymbol{H}$ 中出现了 $(n+1)$ 次, 为了减小数值误差, 我们取它们的平均值作为 $\boldsymbol{D}$ 的估计:

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\boldsymbol{H}(im-m+1:im, ir-r+1:ir),$$

其中 $\boldsymbol{H}(i:j, p:q)$ 代表 $\boldsymbol{H}$ 的第 $i$ 到 $j$ 行, 第 $p$ 到 $q$ 列的子矩阵.

### 9.4.2 矩阵 $\boldsymbol{G}_{\tau_i}$ 的计算

使用 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 构造增广能观测性矩阵, 或使用 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 构造增广能控性矩阵, 那么使用移位不变结构 (Shift Invariance Structure) 就可以计算出矩阵 $\boldsymbol{G}_{\tau_i}$. 下面讨论计算 $\boldsymbol{G}_{\tau_i}$ 的方法.

定义增广能观测性矩阵 (Extended Observability Matrix)

$$\boldsymbol{Q}_o := \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Gamma} \\ \hline \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{G} \\ \hline \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{G}^2 \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{G}^N \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}^N\exp(\boldsymbol{A}t_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\exp(\boldsymbol{A}t_1) \\ \boldsymbol{C}\exp(\boldsymbol{A}t_2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\exp(\boldsymbol{A}t_n) \\ \hline \boldsymbol{C}\boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}\exp(\boldsymbol{A}t_1) \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}\exp(\boldsymbol{A}t_2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}\exp(\boldsymbol{A}t_n) \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}^N \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}^N\exp(\boldsymbol{A}t_1) \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}^N\exp(\boldsymbol{A}t_2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}^N\exp(\boldsymbol{A}t_{n+1}) \end{pmatrix},$$

它由用辨识获得的矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 构成. 进一步使用矩阵 $\boldsymbol{Q}_o$ 中的元构造矩阵

$$\boldsymbol{\Gamma}_i := \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}\exp(\boldsymbol{A}t_i) \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}\exp(\boldsymbol{A}t_i) \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}^2\exp(\boldsymbol{A}t_i) \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}^N\exp(\boldsymbol{A}t_i) \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n+1,$$

它可以计算得到. 注意到 $\boldsymbol{G} = \exp(\boldsymbol{A}t_{n+1})$, 所以容易得到

$$\boldsymbol{\Gamma}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}^N \end{pmatrix}\exp(\boldsymbol{A}t_i) = \boldsymbol{\Gamma}_0\exp(\boldsymbol{A}t_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n+1,$$

和

$$\boldsymbol{\Gamma}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}\exp(\boldsymbol{A}t_{i-1})\exp(\boldsymbol{A}\tau_i) \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}\exp(\boldsymbol{A}t_{i-1})\exp(\boldsymbol{A}\tau_i) \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}^2\exp(\boldsymbol{A}t_{i-1})\exp(\boldsymbol{A}\tau_i) \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}^N\exp(\boldsymbol{A}t_{i-1})\exp(\boldsymbol{A}\tau_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}\exp(\boldsymbol{A}t_{i-1}) \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}\exp(\boldsymbol{A}t_{i-1}) \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}^2\exp(\boldsymbol{A}t_{i-1}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}^N\exp(\boldsymbol{A}t_{i-1}) \end{pmatrix}\exp(\boldsymbol{A}\tau_i)$$
$$= \boldsymbol{\Gamma}_{i-1}\exp(\boldsymbol{A}\tau_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n+1.$$

使用能观测性假设, 以及采样间隔 $\tau_i$ 是非病态的, 矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_i$ 是列满秩的 (Full Column-Rank), $N \geqslant n-1$, 可以计算出 $\exp(\boldsymbol{A}t_i)$ 和 $\exp(\boldsymbol{A}\tau_i)$:

$$\exp(\boldsymbol{A}t_i) = (\boldsymbol{\Gamma}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_0)^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{9.4.1}$$

和

$$G_{\tau_i} = \exp(A\tau_i) = (\Gamma_{i-1}^{\mathrm{T}}\Gamma_{i-1})^{-1}\Gamma_{i-1}^{\mathrm{T}}\Gamma_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n+1,$$

其中上标 T 表示转置.

### 9.4.3 矩阵 $F_{\tau_i}$ 的计算

根据式 (9.2.1) 中 $F_i$ 定义, $F_{\tau_i}$ 的计算式如下:

$$F_{\tau_i} = \exp(-AT)G_iF_i = G^{-1}\exp(At_i)F_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$F_{\tau_{n+1}} = G^{-1}\exp(At_{n+1})F_{n+1} = F_{n+1},$$

其中 $G$ 和 $F = [F_1, F_2, \cdots, F_{n+1}]$ 可以通过辨识得到, $\exp(At_i)$ 通过式 (9.4.1) 计算得到.

值得指出的是, 从非均匀采样离散模型 $P_n$ 计算得到单率模型 $P_{\tau_i}$, 要求能观测性和 $\Gamma_i$ 列满秩或 $\tau_i$ 和 $T$ 的非病态假设, 因为我们期望单率模型 $P_{\tau_i}(G_{\tau_i}, F_{\tau_i}, C, D)$ 也是能控的, 尽管 $P_n$ 能控性不需要这一条件.

## 9.5 连续时间系统的重构

通过辨识获得非均匀周期离散时间模型 $P_n$, 使用上节方法可以得到不同采样周期的单率模型, 这里研究如何从这些单率离散模型 $P_{\tau_j}(G_{\tau_j}, F_{\tau_j}, C, D)$ 重构连续时间系统 $P$, 以及能够重构 $P$ 的条件.

如何选择采样间隔 $\tau_j$ 对于用 $P_{\tau_j}$ 重构 $P$ 十分重要. 适当选择采样间隔 $\tau_j, j = 1, 2, \cdots, l$, 我们可以从离散时间模型的参数矩阵 $G_{\tau_j}$ 唯一地确定连续系统 $P$ 的极点, 即矩阵 $A$ 的特征值.

根据式 (9.1.6) 可知, $G_{\tau_j}$ 给出 $A$ 的可能特征值的集合:

$$\mathrm{Eig}_{\tau_j} = \left\{\frac{1}{\tau_j}\ln\{\lambda_i[G_{\tau_j}]\} + \frac{\mathrm{j}2k\pi}{\tau_j},\ i = 1, 2, \cdots, n,\ k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad j = 1, 2, \cdots, l. \tag{9.5.1}$$

它们中的每一个包含了无穷多个 $A$ 的特征值. 如果通过适当选择采样间隔 $\tau_j$, 它们的交集 (Intersection Set)

$$\mathrm{Eig}_{\tau_1} \cap \mathrm{Eig}_{\tau_2} \cap \cdots \cap \mathrm{Eig}_{\tau_l} \tag{9.5.2}$$

正好包含 $n$ 个元, 那么 $A$ 的特征值能够重构, 问题就得到解决. 很明显, 采样间隔在连续系统重构中起着十分重要的作用. 这可总结为如下定理.

**定理 9.5.1** 对于至多 $n+1$ 个采样间隔 $\tau_j, j = 1, 2, \cdots, n+1$, 连续系统的特征值 $\lambda_i[A]$ 可以唯一地从式 (9.5.2) 重构的条件是存在两个采样间隔之比 $\tau_j/\tau_i$ 是无理数.

**证明** 如果我们能证明 $A$ 的特征值交集

$$\mathrm{Eig}_{\tau_1} \cap \mathrm{Eig}_{\tau_2} \cap \cdots \cap \mathrm{Eig}_{\tau_{n+1}},$$

正好包含 $n$ 个元 $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$, 那么定理 9.5.1 的结论成立. 所以用反证法, 假设不成立, 存在一个特征值 $\mu$ 不在这个集里面, 也就是它不同于集 $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$ 里的任意一个. 根

据 $\mathrm{Eig}_{\tau_j}$ 的定义, 存在 $i_1, i_2, \cdots, i_{n+1} \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 和 $k_1, k_2, \cdots, k_{n+1} \in \mathbb{Z}$ 满足

$$\mu = \mu_{i_1} + \mathrm{j}\frac{2\pi k_1}{\tau_1} = \mu_{i_2} + \mathrm{j}\frac{2\pi k_2}{\tau_2} = \cdots = \mu_{i_{n+1}} + \mathrm{j}\frac{2\pi k_{n+1}}{\tau_{n+1}}.$$

因此有

$$\mathrm{Re}(\mu_{i_1}) = \mathrm{Re}(\mu_{i_2}) = \cdots = \mathrm{Re}(\mu_{i_{n+1}}).$$

这说明 $\mu_{i_j}$ 中有两个必须相等, 不失一般性, 假设 $\mu_{i_1} = \mu_{i_2}$, 所以有

$$\frac{2\pi k_1}{\tau_1} = \frac{2\pi k_2}{\tau_2}.$$

由于假设 $\mu$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 因此 $k_1$ 和 $k_2$ 不可能是零, 这意味着比值

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{k_1}{k_2},$$

是一个有理数. 这是相矛盾的, 所以定理 9.5.1 成立.

一旦获得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i[\boldsymbol{A}]$, 从 $\boldsymbol{G}_\tau$ 计算 $\boldsymbol{A}$ 就容易了. 下面给出一种从 $\boldsymbol{G}_\tau$ 计算 $\boldsymbol{A}$ 的方法. 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 $n$ 个不同的特征值, 那么 $\boldsymbol{G}_\tau$ 也有 $n$ 个不同的特征值, 因为 $\tau$ 是非病态的, $\boldsymbol{G}_\tau$ 和 $\boldsymbol{A}$ 分享相同的特征向量. 令 $\boldsymbol{T}$ 是由 $\boldsymbol{G}_\tau$ 的特征向量构成的矩阵, 用 $\boldsymbol{G}_\tau$ 的特征值 $\lambda_1[\boldsymbol{G}_\tau]$ 构成对角矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda} := \begin{pmatrix} \lambda_1[\boldsymbol{G}_\tau] & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n[\boldsymbol{G}_\tau] \end{pmatrix}.$$

则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \frac{1}{\tau}\mathrm{Ln}[\boldsymbol{G}_\tau] = \frac{1}{\tau}\mathrm{Ln}[\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{-1}] = \frac{1}{\tau}\boldsymbol{T}\mathrm{Ln}[\boldsymbol{\Lambda}]\boldsymbol{T}^{-1} \\ &= \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} \mathrm{Ln}\{\lambda_1[\boldsymbol{G}_\tau]\}^{1/\tau} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{Ln}\{\lambda_n[\boldsymbol{G}_\tau]\}^{1/\tau} \end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}. \end{aligned}$$

用 $\lambda_i[\boldsymbol{A}]$ 代替 $\mathrm{Ln}\{\lambda_i[\boldsymbol{G}_\tau]\}^{1/\tau}$ 得到

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} \lambda_1[\boldsymbol{A}] & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n[\boldsymbol{A}] \end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}.$$

因为 $\boldsymbol{G}_\tau$ 可以使用上面的方法得到 ($\tau$ 可以是 $\tau_j$ 中任何一个), $\boldsymbol{T}$ 可以根据 $\boldsymbol{G}_\tau$ 求得.

如果 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化, 但是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{G}_\tau$ 有相同的约当结构, 在这种情况下, 读者可以研究从 $\boldsymbol{G}_\tau$ 求 $\boldsymbol{A}$ 的算法.

下面通过例子给出一种从 $\boldsymbol{G}_\tau$ 求 $\boldsymbol{A}$ 的方法. 假设连续系统的参数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

对应的离散模型的参数矩阵为

$$\boldsymbol{G}_\tau = \exp(\boldsymbol{A}\tau) = \begin{pmatrix} \cos(\tau) & -\sin(\tau) \\ \sin(\tau) & \cos(\tau) \end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{I}_2 := \mathrm{diag}[1,1]$ 是一个 2 阶单位阵. 使用凯莱 — 哈密尔顿定理 3.4.1, 把矩阵 $\mathrm{Ln}\boldsymbol{G}_\tau$ 表示为

$$\mathrm{Ln}\boldsymbol{G}_\tau = \alpha_0\boldsymbol{I}_2 + \alpha_1\boldsymbol{G}_\tau.$$

用 $\boldsymbol{G}_\tau$ 的特征值 $\lambda_{1,2} = \cos(\tau) \pm \mathrm{j}\sin(\tau) = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\tau}$ 代替上式中的 $\boldsymbol{G}_\tau$ 得到

$$2k_1\pi\mathrm{j} + \mathrm{j}\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau}) = \alpha_0 + \alpha_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau}, \quad -\pi < \arg(*) \leqslant \pi,$$

$$2k_2\pi\mathrm{j} + \mathrm{j}\arg(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\tau}) = \alpha_0 + \alpha_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\tau}, \quad k_i \in \mathbb{Z}.$$

上两式分别相加、相减得到

$$2k_3\pi\mathrm{j} = 2\alpha_0 + 2\alpha_1\cos(\tau),$$

$$[2k_4\pi + 2\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau})]\mathrm{j} = 2\alpha_1\sin(\tau)\mathrm{j}.$$

求得

$$\alpha_0 = k_3\pi\mathrm{j} - \cos(\tau)\frac{k_4\pi + \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau})}{\sin(\tau)},$$

$$\alpha_1 = \frac{k_4\pi + \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau})}{\sin(\tau)},$$

以及

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \frac{1}{\tau}\mathrm{Ln}\boldsymbol{G}_\tau = \frac{1}{\tau}\left(\alpha_0\boldsymbol{I}_2 + \alpha_1\boldsymbol{G}_\tau\right) \\ &= \frac{1}{\tau}\left[k_3\pi\mathrm{j} - \cos(\tau)\frac{k_4\pi + \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau})}{\sin(\tau)}\right]\boldsymbol{I}_2 + \frac{k_4\pi + \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau})}{\tau\sin(\tau)}\begin{bmatrix} \cos(\tau) & -\sin(\tau) \\ \sin(\tau) & \cos(\tau) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} k_3\pi\mathrm{j} & -[k_4\pi + \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau})] \\ k_4\pi + \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau}) & k_3\pi\mathrm{j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{k_3\pi\mathrm{j}}{\tau} & -\dfrac{k_4\pi + \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau})}{\tau} \\ \dfrac{k_4\pi + \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau})}{\tau} & \dfrac{k_3\pi\mathrm{j}}{\tau} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 是一个实矩阵, 所以 $k_3 = 0$. 因此有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{k_4\pi + \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau})}{\tau} \\ \dfrac{k_4\pi + \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau})}{\tau} & 0 \end{pmatrix}.$$

取 $\tau = \tau_1 = 10$、$\tau = \tau_2 = 10\pi + \dfrac{\pi}{6}$, 它们之比为无理数, 满足定理 9.5.1 的条件, 我们有

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{k_5\pi + \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau_1})}{\tau_1} \\ \dfrac{k_5\pi + \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau_1})}{\tau_1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{k_6\pi+\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau_2})}{\tau_2} \\ \dfrac{k_6\pi+\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau_2})}{\tau_2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.5.3}$$

因为它们表示同一个系统, 故 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2$, 即

$$\frac{k_5\pi+\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{j}10})}{10}=\frac{k_6\pi+\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(10\pi+\pi/6)})}{10\pi+\pi/6}$$

或

$$\frac{k_5\pi+10-3\pi}{10}=\frac{k_6\pi+\pi/6}{10\pi+\pi/6}.$$

这个方程有唯一的整数解 $k_5=3$、$k_6=10$. 因此有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 9.6 离散系统的参数辨识算法

前两节假设非均匀周期采样离散模型参数矩阵 $(\boldsymbol{G},\boldsymbol{F},\boldsymbol{\Gamma},\boldsymbol{H})$ 已知时, 讨论了不同采样间隔单率模型参数的计算方法. 本节利用非均匀采样数据, 研究离散模型 $P_n$ 的参数辨识方法, 包括状态已知和未知两种情形. 相关工作见文献 [6,34,66,69–71].

### 9.6.1 状态已知情形

考虑到实际系统经常受到各种因素的干扰, 引入干扰噪声向量 $\{\boldsymbol{w}(kT),\boldsymbol{v}(kT)\}$, 离散模型 (9.2.2) 变为

$$P_n:\quad \left(\frac{\boldsymbol{x}(kT+T)}{\bar{\boldsymbol{y}}(kT)}\right)=\left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{G} & \boldsymbol{F}\\ \hline \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{H}\end{array}\right)\left(\frac{\boldsymbol{x}(kT)}{\bar{\boldsymbol{u}}(kT)}\right)+\left(\frac{\boldsymbol{w}(kT)}{\boldsymbol{v}(kT)}\right). \tag{9.6.1}$$

定义待辨识的参数矩阵 $\boldsymbol{\theta}$, 信息向量 $\boldsymbol{\varphi}_0(kT)$, 广义输出向量 $\boldsymbol{Z}_0(kT)$ 和噪声向量 $\boldsymbol{E}(kT)$ 如下:

$$\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{G} & \boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{H}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(mn+m+n)\times(nr+n+r)},\quad \boldsymbol{\varphi}_0(kT)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(kT)\\ \bar{\boldsymbol{u}}(kT)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{nr+n+r},$$

$$\boldsymbol{Z}_0(kT)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(kT+T)\\ \bar{\boldsymbol{y}}(kT)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{mn+m+n},\quad \boldsymbol{E}(kT)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}(kT)\\ \boldsymbol{v}(kT)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{mn+m+n}.$$

离散系统 (9.6.1) 可以写为线性回归模型,

$$\boldsymbol{Z}_0(kT)=\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_0(kT)+\boldsymbol{E}(kT). \tag{9.6.2}$$

在输入数据 $\bar{\boldsymbol{u}}(kT+t_i)$、输出数据 $\bar{\boldsymbol{y}}(kT+t_i)$、状态数据 $\boldsymbol{x}(kT)$ 都可测量得到, 且信息向量 $\boldsymbol{\varphi}_0(kT)$ 是持续激励的前提下, 则可以通过极小化二次准则函数

$$J(\boldsymbol{\theta}):=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}[\boldsymbol{Z}_0(jT)-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_0(jT)]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Z}_0(jT)-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_0(jT)],$$

令其对 $\boldsymbol{\theta}$ 的偏导数为零得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} &= -\sum_{j=1}^{k}[\boldsymbol{Z}_0(jT) - \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_0(jT)]\boldsymbol{\varphi}_0^{\mathrm{T}}(jT) \\ &= -\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{Z}_0(jT)\boldsymbol{\varphi}_0^{\mathrm{T}}(jT) + \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}_0(jT)\boldsymbol{\varphi}_0^{\mathrm{T}}(jT) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

由此可以得到参数矩阵 $\boldsymbol{\theta}$ 的 **最小二乘估计** (Least Squares Estimate, **LSE**):

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT) = \left[\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}_0(jT)\boldsymbol{\varphi}_0^{\mathrm{T}}(jT)\right]^{-1}\left[\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}_0(jT)\boldsymbol{Z}_0^{\mathrm{T}}(jT)\right]. \tag{9.6.3}$$

为了避免出现矩阵不可逆, 这里假设数据长度 $k \geqslant L_e$, $L_e \gg \dim\boldsymbol{\theta}$ ($L_e$ 为数据长度, $\dim\boldsymbol{\theta}$ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 的维数). 在观测数据可得到时, 即 $\boldsymbol{Z}_0(kT)$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_0(kT)$ 已知时, 数据长度为 $L_e$, 取 $k = L_e$, 由上式可以计算出最小二乘估计. 进一步可以推导出辨识参数矩阵 $\boldsymbol{\theta}$ 的 **递推最小二乘算法** (Recursive Least Sqaures algorithm, **RLS 算法**)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT+T) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(kT) + \boldsymbol{P}_0(kT+T)\boldsymbol{\varphi}_0(kT)[\boldsymbol{Z}_0^{\mathrm{T}}(kT) - \boldsymbol{\varphi}_0^{\mathrm{T}}(kT)\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT)], \tag{9.6.4}$$

$$\boldsymbol{P}_0(kT+T) = \boldsymbol{P}_0(kT) - \frac{\boldsymbol{P}_0(kT)\boldsymbol{\varphi}_0(kT)\boldsymbol{\varphi}_0^{\mathrm{T}}(kT)\boldsymbol{P}_0(kT)}{1 + \boldsymbol{\varphi}_0^{\mathrm{T}}(kT)\boldsymbol{P}_0(kT)\boldsymbol{\varphi}_0(kT)}, \tag{9.6.5}$$

其中 $\boldsymbol{P}_0(kT)$ 为参数估计误差向量的 **协方差阵** (Covariance Matrix), $\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT)$ 为参数矩阵 $\boldsymbol{\theta}$ 在时刻 $t = kT$ 的估计. 根据 $\boldsymbol{\theta}$ 的定义式, 以及获得的参数估计矩阵 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT)$, 可以从 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT)$ 中读出离散模型 $P_n$ 参数矩阵 $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{H})$ 的估计 $(\hat{\boldsymbol{G}}(kT), \hat{\boldsymbol{F}}(kT), \hat{\boldsymbol{\Gamma}}(kT), \hat{\boldsymbol{H}}(kT))$, 即

$$\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{G}}(kT) & \hat{\boldsymbol{F}}(kT) \\ \hat{\boldsymbol{\Gamma}}(kT) & \hat{\boldsymbol{H}}(kT)\end{pmatrix} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}(kT).$$

在递推算法中, 初值通常选择为

$$\boldsymbol{P}(T) = \text{很大对称正定阵, 如 } \boldsymbol{P}(T) = p_0\boldsymbol{I}_{nr+n+r}, \quad p_0 = 10^6 \gg 1,$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(T) = \text{很小的实矩阵, 如 } \hat{\boldsymbol{\theta}}(T) = \mathbf{1}_{(nr+n+r)\times(mn+m+n)}/p_0.$$

### 9.6.2 状态未知情形

如果状态 $\boldsymbol{x}(kT)$ 不可测, 辨识表达式 (9.6.2) 中信息向量 $\boldsymbol{\varphi}_0(kT)$ 包含了未知状态向量 $\boldsymbol{x}(kT)$, 所以最小二乘算法 (9.6.4)~(9.6.5) 就无法计算出 $\boldsymbol{\theta}$ 的估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT)$. 这里采用递阶辨识原理, 联合状态向量与参数矩阵一起进行估计. 基本思想是在递推计算参数估计时, 信息向量 $\boldsymbol{\varphi}_0(kT)$ 中的未知状态 $\boldsymbol{x}(kT)$ 用其估计 $\hat{\boldsymbol{x}}(kT)$ 代替, 进而定义 $\boldsymbol{\varphi}_0(kT)$ 和 $\boldsymbol{Z}_0(kT)$ 的估计:

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(kT) := \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}(kT) \\ \bar{\boldsymbol{u}}(kT)\end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{Z}}(kT) := \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}(kT+T) \\ \bar{\boldsymbol{y}}(kT)\end{pmatrix}.$$

同样地, 在计算状态估计 $\boldsymbol{x}(kT+T)$ 时, 状态估计算法中未知参数矩阵 $\boldsymbol{\theta}$ 也用其估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT)$ 代替. 基于这个思想, 我们容易推导出联合参数与状态估计算法, 它包含了两个耦合的子算法: 基于状态估计的参数辨识算法和基于参数估计的状态估计算法, 二者进行参数和状态的交互估计. 这可称为基于状态估计的递阶参数辨识算法.

**1. 基于状态估计参数辨识算法**

系统的量测输入输出数据为 $\bar{\boldsymbol{u}}(kT)$ 和 $\bar{\boldsymbol{y}}(kT)$, 由于采用递推计算方案, 设在时刻 $t=kT$ 的参数估计矩阵 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT)$ 已经得到, $t=kT+T$ 及过去的状态估计向量 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ 已经在状态估计算法中得到, 因此式 (9.6.4)～ 式 (9.6.5) 中未知的 $\boldsymbol{\varphi}_0(kT)$ 和 $\boldsymbol{Z}_0(kT)$ 用其估计 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(kT)$ 和 $\hat{\boldsymbol{Z}}(kT)$ 代替, 便得到估计参数矩阵 $\boldsymbol{\theta}$ 的基于状态估计的参数辨识算法:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT+T)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT)+\boldsymbol{P}_1(kT+T)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(kT)[\hat{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}(kT)-\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(kT)\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT)], \tag{9.6.6}$$

$$\boldsymbol{P}_1(kT+T)=\boldsymbol{P}_1(kT)-\frac{\boldsymbol{P}_1(kT)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(kT)\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(kT)\boldsymbol{P}_1(kT)}{1+\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(kT)\boldsymbol{P}_1(kT)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(kT)}, \tag{9.6.7}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(kT)=\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}(kT)\\ \bar{\boldsymbol{u}}(kT)\end{pmatrix}, \tag{9.6.8}$$

$$\hat{\boldsymbol{Z}}(kT)=\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}(kT+T)\\ \bar{\boldsymbol{y}}(kT)\end{pmatrix}, \tag{9.6.9}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}(kT)=\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{G}}(kT) & \hat{\boldsymbol{F}}(kT)\\ \hat{\boldsymbol{\Gamma}}(kT) & \hat{\boldsymbol{H}}(kT)\end{pmatrix}. \tag{9.6.10}$$

**2. 基于参数估计的状态估计算法**

根据 Kalman 滤波原理, 在系统参数矩阵 $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{H})$ 已知时, 下列 Kalman 滤波算法可以估计状态向量:

$$\hat{\boldsymbol{x}}(kT+T)=\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}(kT)+\boldsymbol{F}\bar{\boldsymbol{u}}(kT)+\boldsymbol{L}_2(kT)[\bar{\boldsymbol{y}}(kT)-\boldsymbol{\Gamma}\hat{\boldsymbol{x}}(kT)-\boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{u}}(kT)], \tag{9.6.11}$$

$$\boldsymbol{L}_2(kT)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{P}_2(kT)\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{R}_v+\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{P}_2(kT)\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}]^{-1}, \tag{9.6.12}$$

$$\boldsymbol{P}_2(kT+T)=[\boldsymbol{G}-\boldsymbol{L}_2(kT)\boldsymbol{\Gamma}]\boldsymbol{P}_2(kT)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_w. \tag{9.6.13}$$

对于未知参数矩阵 $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{H})$, 我们用参数辨识算法 (9.6.6)~(9.6.10) 中获得的参数估计

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}(kT)=\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{G}}(kT) & \hat{\boldsymbol{F}}(kT)\\ \hat{\boldsymbol{\Gamma}}(kT) & \hat{\boldsymbol{H}}(kT)\end{pmatrix}$$

代替式 (9.6.11)～ 式 (9.6.13) 中的未知参数矩阵 $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{H})$, 未知协方差阵 $\boldsymbol{R}_v$ 和 $\boldsymbol{R}_w$ 用其估计 $\hat{\boldsymbol{R}}_v(kT)$ 和 $\hat{\boldsymbol{R}}_w(kT)$ 代替, 便得到估计状态向量 $\boldsymbol{x}(kT+T)$ 的 **基于参数估计的状态估计算法**:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}(kT+T)=&\hat{\boldsymbol{G}}(kT)\hat{\boldsymbol{x}}(kT)+\hat{\boldsymbol{F}}(kT)\bar{\boldsymbol{u}}(kT)\\ &+\boldsymbol{L}_2(kT)[\bar{\boldsymbol{y}}(kT)-\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(kT)\hat{\boldsymbol{x}}(kT)-\hat{\boldsymbol{H}}(kT)\bar{\boldsymbol{u}}(kT)],\end{aligned} \tag{9.6.14}$$

$$\boldsymbol{L}_2(kT)=\hat{\boldsymbol{G}}(kT)\boldsymbol{P}_2(kT)\hat{\boldsymbol{\Gamma}}^{\mathrm{T}}(kT)[\hat{\boldsymbol{R}}_v(kT)+\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(kT)\boldsymbol{P}_2(kT)\hat{\boldsymbol{\Gamma}}^{\mathrm{T}}(kT)]^{-1}, \tag{9.6.15}$$

$$\boldsymbol{P}_2(kT+T)=[\hat{\boldsymbol{G}}(kT)-\boldsymbol{L}_2(kT)\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(kT)]\boldsymbol{P}_2(kT)\hat{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{T}}(kT)+\hat{\boldsymbol{R}}_w(kT), \tag{9.6.16}$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{R}}_w(kT+T)=&\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}[\hat{\boldsymbol{x}}(iT+T)-\hat{\boldsymbol{G}}(kT+T)\hat{\boldsymbol{x}}(iT)-\hat{\boldsymbol{F}}(kT+T)\bar{\boldsymbol{u}}(iT)]\\ &\times[\hat{\boldsymbol{x}}(iT+T)-\hat{\boldsymbol{G}}(kT+T)\hat{\boldsymbol{x}}(iT)-\hat{\boldsymbol{F}}(kT+T)\bar{\boldsymbol{u}}(iT)]^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{9.6.17}$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{R}}_v(kT+T)=&\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}[\bar{\boldsymbol{y}}(iT)-\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(kT+T)\hat{\boldsymbol{x}}(iT)-\hat{\boldsymbol{H}}(kT+T)\bar{\boldsymbol{u}}(iT)]\\ &\times[\bar{\boldsymbol{y}}(iT)-\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(kT+T)\hat{\boldsymbol{x}}(iT)-\hat{\boldsymbol{H}}(kT+T)\bar{\boldsymbol{u}}(iT)]^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{9.6.18}$$

其中 $\boldsymbol{L}_2(kT) \in \mathbb{R}^{n\times(mn+m)}$ 和 $\boldsymbol{P}_2(kT) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 分别为状态估计算法的增益向量和协方差阵.

联合参数与状态估计算法 (9.6.6)~(9.6.10) 和 (9.6.14)~(9.6.18) 计算状态估计和参数估计的计算步骤如下.

(1) 初始化: 令 $k=1$, 置参数估计矩阵初值

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(T) = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{G}}(T) & \hat{\boldsymbol{F}}(T) \\ \hat{\boldsymbol{\Gamma}}(T) & \hat{\boldsymbol{H}}(T) \end{pmatrix} = \mathbf{1}_{(nr+n+r)\times(mn+m+n)}/p_0,$$

状态估计向量初值 $\hat{\boldsymbol{x}}(T) = \mathbf{1}_n/p_0$, 协方差阵初值 $\boldsymbol{P}_1(T) = p_0\boldsymbol{I}_{nr+n+r}$, $\boldsymbol{P}_2(T) = \boldsymbol{I}_n$, $\hat{\boldsymbol{R}}_v(T) = \boldsymbol{I}_{mn+n}$, $\hat{\boldsymbol{R}}_w(T) = \boldsymbol{I}_n/p_0$, $p_0$ 是一个很大的常数, 如 $p_0 = 10^6$. 给定参数估计精度 $\varepsilon$.

(2) 采集输入输出数据 $\bar{\boldsymbol{u}}(kT)$ 和 $\bar{\boldsymbol{y}}(kT)$.

(3) 由式 (9.6.15) 计算增益向量 $\boldsymbol{L}_2(kT)$, 由式 (9.6.16) 计算协方差阵 $\boldsymbol{P}_2(kT+T)$, 由式 (9.6.14) 计算状态估计向量 $\hat{\boldsymbol{x}}(kT+T)$.

(4) 通过式 (9.6.8) 和式 (9.6.9) 构成估计的信息向量 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(kT)$ 和估计的广义输出向量 $\hat{\boldsymbol{Z}}(kT)$, 由式 (9.6.7) 计算协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_1(kT+T)$, 通过式 (9.6.6) 刷新参数估计矩阵 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT+T)$.

(5) 由式 (9.6.17) 和式 (9.6.18) 计算未知协方差阵的估计 $\hat{\boldsymbol{R}}_w(kT+T)$ 和 $\hat{\boldsymbol{R}}_v(kT+T)$.

(6) 比较 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT+T)$ 和 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT)$, 若 $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT+T) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(kT)\| \leqslant \varepsilon$, 结束计算, 得到参数估计矩阵 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT+T)$; 否则 $k$ 增加 1, 即令 $k := k+1$, 从式 (9.6.10) 中参数估计矩阵 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT)$ 中读取参数估计 $(\hat{\boldsymbol{G}}(kT), \hat{\boldsymbol{F}}(kT), \hat{\boldsymbol{\Gamma}}(kT), \hat{\boldsymbol{H}}(kT))$, 转到第 (2) 步, 继续进行递推计算.

联合参数与状态估计算法 (9.6.6)~(9.6.10) 和 (9.6.14)~(9.6.18) 是随 $k$ 增加执行递阶计算, 因为参数估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT+T)$ 不仅依赖先前参数估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT)$, 而且依赖时刻 $t = kT+T$ 的状态估计 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$; 同样地, 状态估计 $\hat{\boldsymbol{x}}(kT+T)$ 不仅依赖先前状态估计 $\hat{\boldsymbol{x}}(kT)$, 而且依赖先前的参数估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT)$. 因此, 这可称为非均匀周期采样系统的递阶辨识 (Hierarchical Identification) 算法.

状态估计器 (9.6.14)~(9.6.18) 是利用参数估计代替真参数, 根据 Kalman 滤波原理推导出来的, 它需要计算协方差阵, 计算量大. 为减小计算量, 借助状态观测器设计思想和梯度搜索, 我们能够得到不涉及协方差阵的基于参数估计的随机梯度状态估计算法:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}(kT+T) = {} & \hat{\boldsymbol{G}}(kT)\hat{\boldsymbol{x}}(kT) + \hat{\boldsymbol{F}}(kT)\bar{\boldsymbol{u}}(kT) \\ & + \rho(kT)\hat{\boldsymbol{\Gamma}}^{\mathrm{T}}(kT)[\bar{\boldsymbol{y}}(kT) - \hat{\boldsymbol{\Gamma}}(kT)\hat{\boldsymbol{x}}(kT) - \hat{\boldsymbol{H}}(kT)\bar{\boldsymbol{u}}(kT)],\end{aligned} \tag{9.6.19}$$

其中收敛因子 $\rho(kT)$ 满足

$$\rho(kT) \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\rho(kT) = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\rho^2(kT) < \infty. \tag{9.6.20}$$

例如, 当所有变量有界时, 可取

$$\rho(kT) = \frac{1}{(k+n_0)^{\varepsilon}}, \quad \rho(kT) = \frac{c_1}{(c_2k+c_3)^{\varepsilon}}, \quad \frac{1}{2} < \varepsilon \leqslant 1. \tag{9.6.21}$$

状态估计在系统分析、设计和综合中是十分有用的, 如状态反馈. 这里非均匀周期采样系统的参数与状态估计算法是传统单率采样系统 [34, 36, 37, 67, 68, 94] 和双率采样数据系统的直接推广 [53, 66, 69, 70], 相关的非线性状态空间系统的辨识方法可参见文献 [95–98].

## 9.7 数值仿真例子

考虑图 9.2.1 的连续系统, 其连续过程 $P$ 的传递函数为

$$P(s)=\frac{s+0.8}{s^2+0.8s+0.8},$$

对应的状态空间实现为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}-0.8 & -0.8\\ 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=[1,\ 0.8]\boldsymbol{x}(t).\end{cases}$$

取 $t_1=\sqrt{2}-1$ s、$t_2=1=T$ s, 即 $\tau_1=t_1$ s, $\tau_2=2-\sqrt{2}$ s. 离散化这个例子系统, 并引入干扰噪声向量, 得到离散时间模型:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(kT+T)=&\begin{pmatrix}0.22659 & -0.48086\\ 0.60107 & 0.70745\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(kT)\\ &+\begin{pmatrix}0.15443 & 0.44665\\ 0.22129 & 0.14440\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(kT)\\ u(kT+t_1)\end{pmatrix}+\boldsymbol{w}(kT),\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}y(kT)\\ y(kT+t_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0.8\\ 0.93905 & 0.47557\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(kT)+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0.40553 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(kT)\\ u(kT+t_1)\end{pmatrix}+\boldsymbol{v}(kT).$$

仿真辨识步骤如下.

(1) 使用 MATLAB 中的 idinput 函数产生零均值、单位方差的可测随机输入信号序列作为输入信号, 产生两个不相关零均值、方差为 $\sigma^2=0.10^2$ 的噪声序列作为 $\boldsymbol{w}(kT)$ 和 $\boldsymbol{v}(kT)$, 计算系统的输出和状态变量.

(2) 基于获得的输入输出和状态数据, 应用上节的方法辨识这个例子中系统离散模型 $P_n$ 的参数, 参数估计误差 $\delta:=\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT)-\boldsymbol{\theta}\|/\|\boldsymbol{\theta}\|$ 随 $t=kT$ 变化曲线如图 9.7.1 所示, $\|\boldsymbol{X}\|^2:=\mathrm{tr}[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]$, $\boldsymbol{\theta}$ 为真参数, $\hat{\boldsymbol{\theta}}(kT)$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 在时刻 $t=kT$ 的估计, 数据长度为 $L_e=1000$ 时的参数估计矩阵 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(L_eT)$ 为

$$\hat{\boldsymbol{G}}=\begin{pmatrix}0.23336 & -0.47827\\ 0.60267 & 0.71027\end{pmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{F}}=\begin{pmatrix}0.15635 & 0.44578\\ 0.22443 & 0.14320\end{pmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}=\begin{pmatrix}1.00020 & 0.79904\\ 0.93456 & 0.47766\end{pmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{H}}=\begin{pmatrix}0.00466 & 0.00037\\ 0.40294 & 0.00125\end{pmatrix}.$$

矩阵 $\hat{\boldsymbol{G}}$ 的特征值为

$$\lambda[\hat{\boldsymbol{G}}]=\{0.79877+\mathrm{j}0.26836,\ 0.79877-\mathrm{j}0.26836\}.$$

变化矩阵为

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}-0.29544+\mathrm{j}0.59596 & -0.29544-\mathrm{j}0.59596\\ 0.74669 & 0.74669\end{pmatrix}.$$

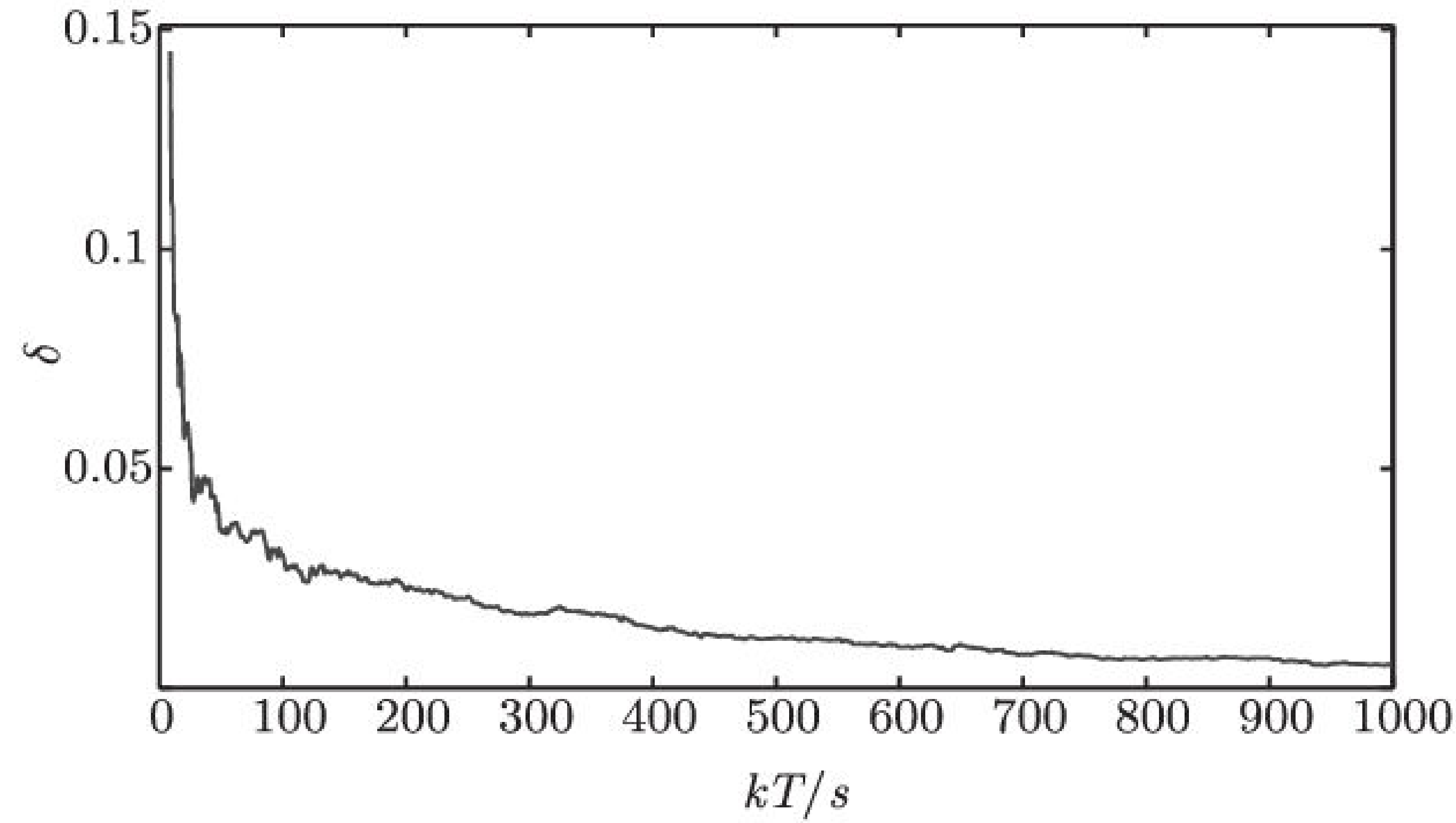



图 9.7.1 参数估计误差 $\delta$ 随 $t=kT$ 变化曲线

矩阵 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的特征值为

$$\{\lambda_1[\hat{\boldsymbol{A}}],\lambda_2[\hat{\boldsymbol{A}}]\}=\{-0.39484+\mathrm{j}0.79505,\ -0.39484-\mathrm{j}0.79505\}.$$

计算得到连续时间系统的参数矩阵为

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\lambda_1[\hat{\boldsymbol{A}}] & \\ & \lambda_2[\hat{\boldsymbol{A}}]\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix}-0.78897 & -0.79050\\ 0.99613 & -0.00071\end{pmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}=\left[\int_0^T\exp(\hat{\boldsymbol{A}}t)\mathrm{d}t\right]^{-1}[\hat{\boldsymbol{F}}(:,1)+\hat{\boldsymbol{F}}(:,2)]=\begin{pmatrix}0.99652\\ 0.00358\end{pmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{C}}=\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(1,:)=[1.00020,\ 0.79904],$$

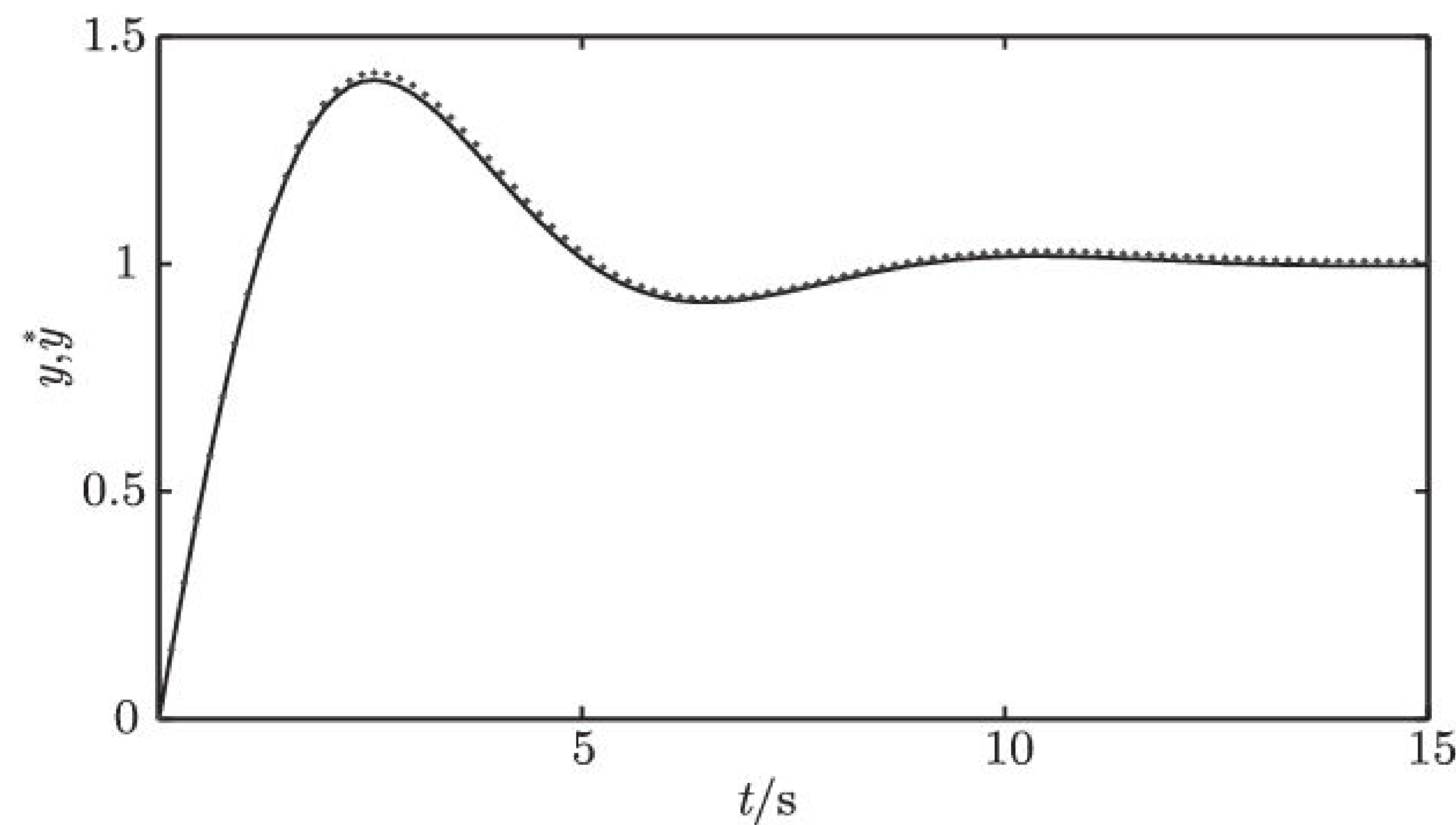
$$\hat{D}=[\hat{\boldsymbol{H}}(1,1)+\hat{\boldsymbol{H}}(2,2)]/2=0.00296.$$

辨识得到的传递函数为

$$\hat{P}(s)=\hat{\boldsymbol{C}}[s\boldsymbol{I}-\hat{\boldsymbol{A}}]^{-1}\hat{\boldsymbol{B}}+\hat{D}$$

$$=\frac{0.00296s^2+1.002s+0.7956}{s^2+0.7897s+0.788}.$$

图 9.7.2 绘出了两个系统 $P(s)$ 和 $\hat{P}(s)$ 的阶跃响应曲线.




实线：$P(s)$的输出，点：辨识出的$\hat{P}(s)$的输出

图 9.7.2 原系统 $P(s)$ 与辨识出的模型 $\hat{P}(s)$ 的阶跃响应

从图 9.7.1 和图 9.7.2 可知, 参数估计误差 $\delta$ 一般随数据长度 $k = L_e$ 的增加而减小, 辨识得到的传递函数 $\hat{P}(s)$ 的阶跃响应很接近原系统 $P(s)$ 的阶跃响应. 这说明辨识得到的模型能够很好地捕捉系统动态, 能够获得满意的效果.

对于未知参数的系统, 通常不可能事先知道 $D$ 是否为零, 所以在这个例子中我们必须估计 $D$. 相反, 如果知道 $D$, 辨识算法就不必估计 $D$. 在这种情形下, 辨识得到的传递函数为

$$\hat{P}_0(s) = \frac{s + 0.7933}{s^2 + 0.7897s + 0.788}.$$

$P(s)$ 和 $\hat{P}_0(s)$ 的阶跃响应如图 9.7.3 所示, 它们是很接近的.

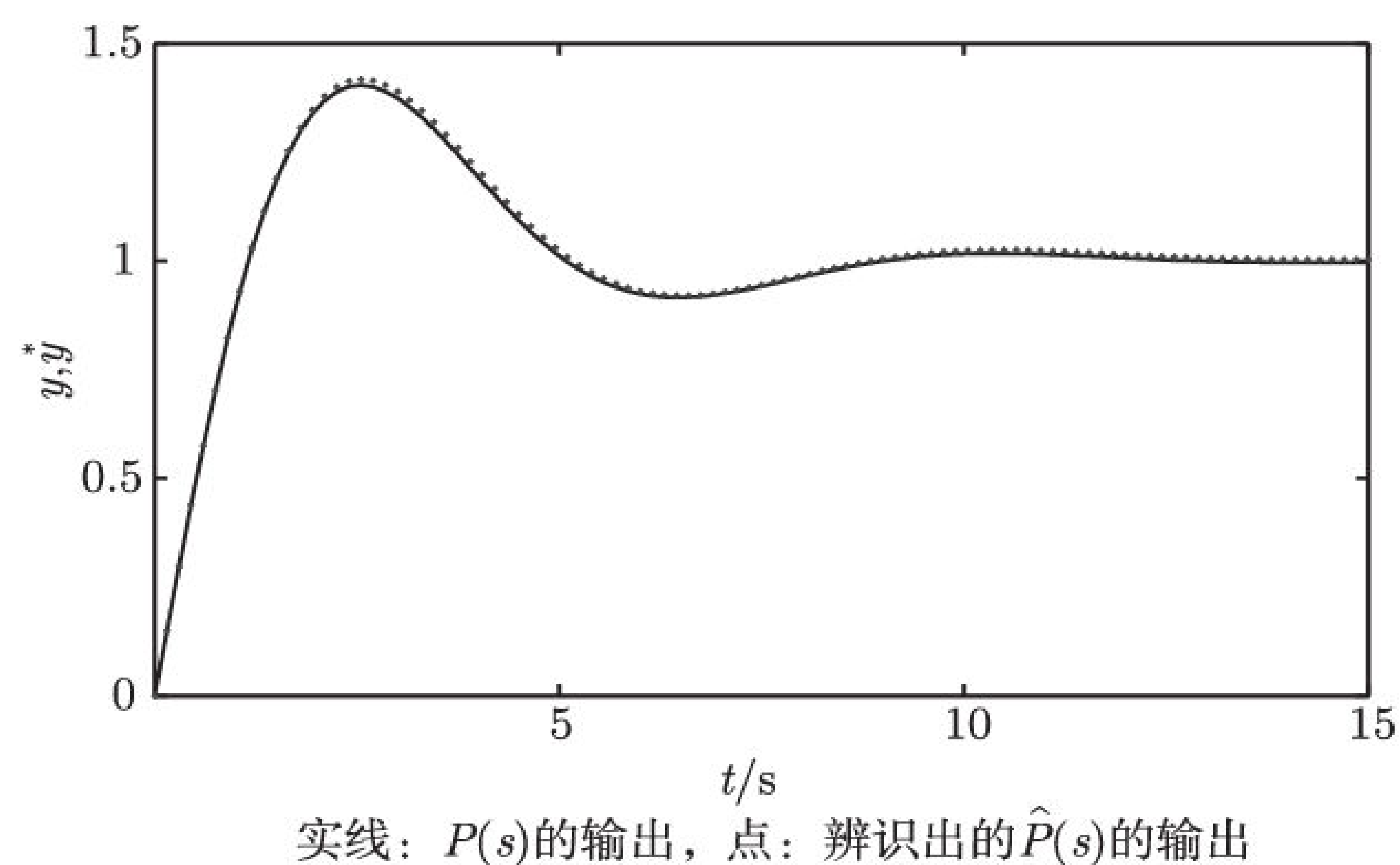



图 9.7.3　原系统 $P(s)$ 与辨识出的模型 $\hat{P}_0(s)$ 的阶跃响应 ($D = 0$ 时)

# 英汉术语对照
# COMPARISON OF ENGLISH AND CHINESE TERMS

| 符号 | 说明 |
|---|---|
| **A** | |
| adjoint matrix | 伴随 (矩) 阵 |
| aggregation matrix | 集结矩阵 |
| anti-symmetric matrix | 反对称 (矩) 阵 |
| associate matrix | 共轭转置 (矩) 阵 |
| augmented matrix | 增广矩阵 |
| auxiliary matrix | 辅助矩阵 |
| **B** | |
| band matrix | 带状矩阵 |
| bidiagonal matrix | 两对角线矩阵 |
| bounded matrix | 有界矩阵 |
| **C** | |
| canonical form | 规范型 |
| canonical matrix | 典型矩阵, 正则矩阵, 典型阵, 正则阵 |
| characteristic matrix | 特征矩阵, 本征矩阵 |
| circulant matrix | 轮换矩阵 |
| coefficient matrix | 系数矩阵 |
| companion matrix | 相伴 (矩) 阵, 友 (矩) 阵 |
| complex matrix | 复矩阵 |
| complex conjugate matrix | 复共轭 (矩) 阵 |
| control matrix | 控制矩阵 |
| controllability matrix | 可控性矩阵 |
| correlation matrix | 相关系数矩阵, 相关矩阵 |
| covariance matrix | 协方差矩阵 |
| cross-products matrix | 交叉乘积矩阵 |
| **D** | |
| derivative matrix | 导数矩阵 |
| diagonal matrix | 对角矩阵 |
| diagonally dominant matrix | 对角占优矩阵 |
| doubly stochastic matrix | 双随机矩阵 |
| dynamic feedback matrix | 动态反馈矩阵 |
| **E** | |
| echelon matrix | 梯 (矩) 阵 |
| elementary matrix | 初等 (矩) 阵 |
| **F** | |
| first-moment matrix | 一阶矩矩阵 |

| | |
|---|---|
| function matrix | 功能阵; 函数 (矩) 阵 |
| **G** | |
| generalized inverse matrix | 广义逆矩阵 |
| **I** | |
| idempotent matrix | 幂等矩阵 |
| identity matrix | 恒等矩阵 (单位阵) |
| ill-conditioned matrix | 病态 (矩) 阵 |
| impulse response matrix | 脉冲响应矩阵, 冲击响应阵 |
| indefinite matrix | 不定 (矩) 阵 |
| information matrix | 信息矩阵 |
| input matrix | 输入矩阵 |
| inverse matrix | 逆矩阵, 反矩阵 |
| **M** | |
| mean matrix | 平均矩阵 |
| mean ergodic matrix | 平均遍历矩阵, 平均各态历经矩阵 |
| measurement matrix | 测量矩阵 |
| moment matrix | - 矩矩阵, 如 second order moment matrix, 二阶矩矩阵 |
| monomial matrix | 单项 (矩) 阵 |
| monotone matrix | 单调矩阵 |
| **N** | |
| negative matrix | 负定矩阵 |
| negative definite matrix | 负定 (矩) 阵 |
| nilpotent matrix | 幂零 (矩) 阵 |
| nonnegative matrix | 非负 (矩) 阵 |
| nonsingular matrix | 【数】非奇异矩阵 |
| non-square matrix | 非方 (形) 矩阵 |
| normal matrix | 正规 (矩) 阵 |
| null matrix | 零矩阵 |
| **O** | |
| observability matrix | 可观测性矩阵 |
| orthogonal matrix | 正交矩阵 |
| output matrix | 输出矩阵 |
| **P** | |
| partial matrix | 子 (矩) 阵 |
| partitioned matrix | 分块矩阵 |
| permutation matrix | 置换矩阵 (排列矩阵) |
| positive matrix | 正 (矩) 阵 |
| positive definite matrix | 正定 (矩) 阵 |
| product matrix | 积 (矩) 阵 |
| projection matrix | 投影矩阵, 射影矩阵 |
| **R** | |
| random matrix | 随机矩阵 |

| | |
|---|---|
| real matrix | 实 (矩) 阵 |
| rectangular matrix | 矩形 (矩) 阵, 长方 (形矩) 阵 |
| reflection matrix | 反射矩阵 |
| regression matrix | 回归 (矩) 阵 |
| resolvent matrix | 预解矩阵 |
| resultant matrix | 结式矩阵 |
| rotated factor matrix | 旋转因子矩阵 |
| **S** | |
| sample variance matrix | 样本方差矩阵 |
| scalar matrix | 纯量 (矩) 阵 |
| semi-definite matrix | 半定 (矩) 阵 |
| similar matrix | 相似矩阵 |
| singular matrix | 退化 (矩) 阵, 降秩 (矩) 阵 |
| skew symmetric matrix | 斜对称矩阵 |
| sparse matrix | 稀疏 (矩) 阵 |
| spectral density matrix | 谱密度矩阵 |
| square matrix | 方矩阵, 矩形矩阵 |
| stability [stable] matrix | 【力】稳定矩阵 |
| standard form | 标准形 |
| state space system matrix | 状态空间系统矩阵 |
| state transition matrix | 状态转移矩阵 |
| symmetric matrix | 对称矩阵 |
| symplectic matrix | 辛 (矩) 阵 |
| system matrix | 系数矩阵 |
| **T** | |
| transfer matrix | 传递矩阵 |
| transfer function matrix | 传递函数矩阵 |
| transformation matrix | 变换矩阵 |
| transition matrix | 转移矩阵 |
| transposed matrix | 转置矩阵 |
| triangular matrix | 三角阵, 三角形矩阵 |
| triple diagonal matrix | 三对角线矩阵 |
| **U** | |
| unimodular matrix | 幺模 (矩) 阵 |
| unipotent matrix | 幂幺矩阵, 幂单矩阵 |
| unitary matrix | 酉 (矩) 阵 |
| upper triangular matrix | 上三角矩阵 |
| **W** | |
| weight [weighing] matrix | (加) 权矩阵 |
| zero matrix | 零 (矩) 阵 |

# 索 引
# INDEX

**Y**



**Z**

**其他**

# 后　记
# POSTSCRIPT

古人十年磨一剑, 而我研究《现代控制理论》已有二十余载. 三十余年来, 在学习和翻阅我国现代控制理论教材时, 总感到惋惜和不完美, 一些措辞不准、不妥和错误时常出现, 所以我决定编写一部《现代控制理论》教材. 在准备写作素材时, 查阅了一些国内外资料, 吸取其中精华, 在撰写与发表自己研究之所见时 [6, 24, 26–28, 30], 一部书即将成型, 在与众多学生多年交互教学实践中, 几经修改、补充、完善, 时至今日定稿之时, 每当我拿起细读, 总感到学界认为如此成熟的现代控制理论要准确表达起来时又是那么难 (书中一些不当之处在所难免, 敬请读者批评指正). 这也使我对如此成熟的《现代控制理论》教材存在的一些错误能给予更多的理解, 同时希望本书能吸取众书所长, 在准确表达现代控制理论上尽己微薄之力.

在逝去的岁月里, 在学术的道路上, 作者得到了很多学术前辈、学术朋友的支持和帮助, 本书的出版得到江南大学领导和同事的支持, 在此表示感谢. 在该书出版之际, 作者要感谢江南大学《现代控制理论》课程任课教师崔宝同教授、楼旭阳博士、刘艳君博士、姜顺博士提出的宝贵意见, 感谢湖北工业大学武明虎教授、廖冬初教授、赵熙临博士、常雨芳博士、徐光辉博士、潘健教授、青岛科技大学刘喜梅教授、赵彤教授、北京石油化工学院戴波教授、北京工商大学魏伟博士等提出的宝贵意见. 感谢作者的博士生和硕士研究生徐玲、李俊红、王艳娇、马兴云、汪菲菲、沈冰冰、汪学海、刘沁瑶、张霄、陈梦婷、徐欢、崔婷等为本书所做的工作和校对. 同时向那些默默无闻的支持者表示感谢!

本书的出版得到国家特色专业、江苏省品牌专业建设经费的支持, 得到“十三五”江苏省高等学校重点教材立项资助. 最后感谢江南大学物联网工程学院院长谢林柏教授、副院长熊伟丽教授对出版专著和教材的大力支持. 本书的出版得到作者家人的支持. 特别是母亲卢立珍那种朴素、勤劳、贤惠的伟大形象永远铭记在我心中, 父亲丁国佐那种吃苦耐劳的精神, 以及他的远见卓识和博大胸怀一直感染着我, 他对儿女的教育和对报效祖国的理解令人钦佩, 他是中国教师、中国农民和所有劳动者的楷模!

下面以作者对科学的感受作为后记的结束语.

1. **科学生命**

   科学是我的第一生命.

   2013 年 10 月 07 日星期一

2. **人生醒悟**

   为科学进步、为国家发展、为人类幸福、为爱人所爱.

   2004 年 04 月 15 日星期四

3. **兴趣乐趣**

   科学研究是一件很快乐的事.

   2005 年 04 月 18 日星期一

4. **科学与追求**

   科学是我最崇高的事业 —— 一生的追求就是您, 是您使我忘我、使我享受快乐和幸福、使我享受激情与爱.

2007 年 11 月 20 日星期二

5. **永恒的真理**

长久和专注地对同一个问题的深入思考是科学发现的源泉.

2010 年 01 月 05 日星期二

6. **Beauty and love**

Papers are the carrier of passion and innovation!

Papers can nourish your heart like roses and loves!

Writing papers is enjoyable just like making loves!

You come here, and then joy and happiness will surround you!

Writing papers is a very simple thing!

2013 年 03 月 28 日星期四

7. Z–S **变换小插曲**

有关 Z–S 变换要追溯笔者大学时期的 1983 年, 源于文献 [40] 和教笔者电路课的严炳南老师的工作 "拉氏变换和 Z 变换间的一个反演公式及其应用" [41], 笔者对这个重要的反演公式特别有兴趣, 经过多年思考, 将其发展为 Z–S 变换, 初步结果写进了笔者 1994 年的博士学位论文 "时变参数系统辨识及其应用" 中 [29], 1995 年部分结果 "Z–S 变换及其应用" 发表在《控制与决策》上 [30]. 这个 Z–S 变换十分完美, 在脉冲信号输入下连续系统在采样点的输出等于离散系统的输出, 但致命的是离散时间系统的增益不等于连续时间系统的增益, 因为这个离散化是采用脉冲输入的缘故, 所以后来我们将这个变换称为脉冲不变 Z–S 变换.

实际中计算机控制系统经常采用的是基于零阶保持器的阶跃不变离散化, 它能保证离散时间系统的增益等于连续时间系统的增益. 又经过多年思考和研究, 于 2005 年 9 月 26 日周一, 在加拿大埃德蒙顿阿尔伯塔大学 (University of Alberta, Edmonton) 办公室工作到凌晨 1:00 才回家休息, 到 2 点多还难以入睡, 又打开床头台灯, 拿起备在床边的纸和笔, 开始推导一个思考了 20 余年的有关 Z–S 变换问题, 推导了脉冲输入的 Z–S 变换; 那天的推导有了重大突破, 终于证明了阶跃响应不变的 Z–S 变换. 十分高兴, 大约到凌晨 4 点才休息, 睡了 2 个多小时, 很兴奋, 到 6 点多醒来, 继续 ……

后来将系列研究结果总结为脉冲不变 Z–S 变换、阶跃不变 Z–S 变换, 还有斜坡不变 Z–S 变换等, 使这些变换得到统一, 明确了其适用范围. 又在过了 10 余年的今天, 我们首次将这些结果写进即将出版的《现代控制理论》中, 一些相关结果将陆续公布到国内外学术刊物上 [31, 32].

2017 年 05 月 18 日星期四

8. **写作经验分享**

在这里我们简要回顾一下几个重要成果在国际期刊上发表的历程. 尽管笔者是清华大学优秀博士论文获得者, 在攻读博士学位期间, 也先后提出了一些重要辨识理念和方法, 可将其公布到国际著名期刊上还是博士毕业 10 年后 2004 年的事情. 笔者 2002 年 6 月 28 日从清华大学赴加拿大 Edmonton 的 University of Alberta (阿尔伯塔大学) 作博士后和研究员, 开始全身心从事系统辨识研究、英文论文写作, 于

2004 年和 2005 年先后将“辅助模型辨识思想”和“递阶辨识原理”的 4 篇研究论文发表在国际权威期刊 *Automatica* [48, 49] 和 *IEEE Transactions on Automatic Control* [55, 56] 上. 为了让“多新息辨识理论”能以 Regular Paper 论文形式发表在国际权威期刊上, 笔者在 2005 年 10 月 22 日离开加拿大前夕, 才开始撰写这篇多新息辨识论文, 因为那时英文写作训练已有 3 年多, 写作水平有大幅度提高, 已经具备 20 篇 SCI 国际期刊论文的写作经验和写作技巧, 撰写的多新息辨识论文“Performance analysis of multi-innovation gradient type identification methods”最终以 Regular Paper 形式发表在国际权威期刊 *Automatica* 2007 年第 1 期上 [51]. 这说明写作技巧和论文内容都同等重要.

尽管多新息辨识方法是笔者独创的, 但要在国际权威期刊上发表, 在写作上必须下一番大工夫, 必须在论文的引言 (Introduction) 中陈述论文写作的动机 (Motivation) 和重要性, 写作动机与论文内容一样重要, 这是论文发表的基本要求, 国际权威期刊上 Regular Paper 更是如此. 为此, 我们思考了很久, 为这篇多新息辨识论文写了 Introduction, 写这个 Motivation 的难度不亚于论文内容.

2015 年 8 月 26 日星期三

9. **奇妙公式**

$$\frac{1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}}{\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}}=1.$$

10. **欧拉常数**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma=0.577215\cdots$$

11. **交错级数**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)=\ln 2=0.693147\cdots$$

12. **奇妙三角形**

$$\begin{array}{rr}
 & 0\times 9+1\ =1 \\
1\times 8+1=9 & 1\times 9+2\ =11 \\
12\times 8+2=98 & 12\times 9+3\ =111 \\
123\times 8+3=987 & 123\times 9+4\ =1111 \\
1234\times 8+4=9876 & 1234\times 9+5\ =11111 \\
12345\times 8+5=98765 & 12345\times 9+6\ =111111 \\
123456\times 8+6=987654 & 123456\times 9+7\ =1111111 \\
1234567\times 8+7=9876543 & 1234567\times 9+8\ =11111111 \\
12345678\times 8+8=98765432 & 12345678\times 9+9\ =111111111 \\
123456789\times 8+9=987654321 & 123456789\times 9+10=1111111111
\end{array}$$

13. **奇妙三角形**

$$
\begin{array}{c}
9\times 9+7=88\\
98\times 9+6=888\\
987\times 9+5=8888\\
9876\times 9+4=88888\\
98765\times 9+3=888888\\
987654\times 9+2=8888888\\
9876543\times 9+1=88888888\\
98765432\times 9+0=888888888
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1\times 1=1\\
11\times 11=121\\
111\times 111=12321\\
1111\times 1111=1234321\\
11111\times 11111=123454321\\
111111\times 111111=12345654321\\
1111111\times 1111111=1234567654321\\
11111111\times 11111111=123456787654321\\
111111111\times 111111111=12345678987654321
\end{array}
$$

# 参 考 文 献


[1] 丁锋. 系统辨识新论 [M]. 北京: 科学出版社, 2013.

[2] 丁锋. 系统辨识 —— 辨识方法性能分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2014.

[3] 丁锋. 系统辨识 —— 辅助模型辨识思想与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[4] 丁锋. 系统辨识 —— 多新息辨识理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2016.

[5] Chen T, Miller D. Reconstruction of continuous-time systems from their discretizations [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(10): 1914-1917.

[6] Ding F, Qiu L, Chen T. Reconstruction of continuous-time systems from their non-uniformly sampled discrete-time systems [J]. Automatica, 2009, 45(2): 324-332.

[7] Kailath T. Linear Systems [J]. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs., Newjersey, 1980.

[8] Ljung L, Söderström T. Theory and Practice of Recursive Identification [M]. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1987.

[9] Ljung L. System Identification: Theory for the User. [M]. 2nd ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1999.

[10] Chen H F, Guo L. Identifiation and Stochastic Adaptive Control [M]. Boston, MA: Birkhäuser, 1991.

[11] 方崇智, 萧德云. 过程辨识 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1988.

[12] 萧德云. 系统辨识理论及应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2014.

[13] Goodwin G C, Sin K S. Adaptive Filtering, Prediction and Control [M]. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.

[14] Ding F, Chen T. Gradient based iterative algorithms for solving a class of matrix equations [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(8): 1216-1221.

[15] Ding F, Chen T. Iterative least squares solutions of coupled Sylvester matrix equations [J]. Systems & Control Letters, 2005, 54(2): 95-107.

[16] Ding F, Chen T. On iterative solutions of general coupled matrix equations [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2006, 44(6): 2269-2284.

[17] Ding F, Liu X P, Ding J. Iterative solutions of the generalized Sylvester matrix equations by using the hierarchical identification principle [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 197(1): 41-50.

[18] Xie L, Liu Y J, Yang H Z. Gradient based and least squares based iterative algorithms for matrix equations AXB+CX$^{\mathrm{T}}$D=F [J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 217(5): 2191-2199.

[19] Xie L, Ding J, Ding F. Gradient based iterative solutions for general linear matrix equations [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2009, 58(7): 1441-1448.

[20] Ding J, Liu Y J, Ding F. Iterative solutions to matrix equations of the form AiXBi=Fi [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 59(11): 3500-3507.

[21] Ding F, Zhang H M. Gradient-based iterative algorithm for a class of the coupled matrix equa-

tions related to control systems [J]. IET Control Theory and Applications, 2014, 8(15): 1588-1595.

[22] Zhang H M, Ding F., A property of the eigenvalues of the symmetric positive definite matrix and the iterative algorithm for coupled Sylvester matrix equations [J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351(1): 340-357.

[23] Zhang H M, Ding F. Iterative algorithms for X+ATX-1A=I by using the hierarchical identification principle [J]. Journal of the Franklin Institute, 2016, 353(5): 1132-1146.

[24] Ding F. Transformations between some special matrices [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 59(8): 2676-2695.

[25] 谢新民, 丁锋. 自适应控制系统 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.

[26] Ding F. Computation of matrix exponentials of special matrices [J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 223: 311-326.

[27] 丁锋, 刘艳君, 于丽. 基于卡尔曼滤波思想的时变增益最优观测器设计 [J]. **科学技术与工程**, 2008, 8(15): 4346-4348.

[28] 丁锋, 谢新民. 鲁棒观测器 — 控制器的设计 [J]. **控制理论与应用**, 1992, 9(4): 404-409.

[29] 丁锋. 时变参数系统辨识及其应用 [J]. 北京: 清华大学自动化系**博士学位论文**, 1994.

[30] 王治祥, 丁锋. Z–S 变换及其应用 [J]. **控制与决策**, 1995, 10(1): 89-92.

[31] 丁锋, 徐玲. 阶跃不变 Z–S 变换 [J]. **控制与决策**, 2018.

[32] Ding F, Xu L. Z–S transform between continuous-times systems and discrete-time systems [J]. Automatica, 2018.

[33] Chen T, Francis B. Optimal Sampled-Data Control Systems [M]. Springer-Verlag, London, 1995.

[34] Ding F. Combined state and least squares parameter estimation algorithms for dynamic systems [J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 38(1): 403-412.

[35] Ding F. State filtering and parameter estimation for state space systems with scarce measurements [J]. Signal Processing, 2014, 104: 369-380.

[36] Ma X Y, Ding F. Gradient-based parameter identification algorithms for observer canonical state space systems using state estimates [J]. Circuits Systems and Signal Processing, 2015, 34(5): 1697-1709.

[37] Ma X Y, Ding F. Recursive and iterative least squares parameter estimation algorithms for observability canonical state space systems [J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(1): 248-258.

[38] Ding F, Liu X M, Ma X Y. Kalman state filtering based least squares iterative parameter estimation for observer canonical state space systems using decomposition [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2016, 301: 135-143.

[39] 丁锋, 徐玲. 连续时间状态空间系统从其离散时间系统重构 [J]. **控制与决策**, 2018.

[40] Ogata K. Modern Control Engineering [M]. Prentice-Hall, Inc. Englrwood Cliffs, New Jersey, 1970.

[41] 严炳南, 袁绪平. 拉氏变换和 Z 变换间的一个反演公式及其应用 [J]. 华中工学院学报, 1983, 11(2): 95-98.

[42] 杨丹. 控制系统模型变换及其输出误差分析 [D]. 江南大学硕士论文, 2015.

[43] Yang D, Ding R. Transforms from differential equations to difference equations and vice-versa applied to computer control systems [J]. Applied Mathematics Letters, 2014, 31: 18-24.

[44] 丁锋, 谢新民, 方崇智. 时变系统辨识的多新息方法 [J]. **自动化学报**, 1996, 22(1): 85-91.

[45] 丁锋, 杨家本. 大系统的递阶辨识 [J]. **自动化学报**, 1999, 25(5): 647-654.

[46] 丁锋, 杨慧中, 刘飞. 弱条件下随机梯度算法性能分析 [J]. **中国科学 E 辑: 信息科学**, 2008, 38(12): 2173-2184.

[47] Ding F, Yang H Z, Liu F. Performance analysis of stochastic gradient algorithms under weak conditions [J]. Science in China Series F – Information Sciences, 2008, 51(9): 1269-1280.

[48] Ding F, Chen T. Combined parameter and output estimation of dual-rate systems using an auxiliary model [J]. Automatica, 2004, 40(10): 1739-1748.

[49] Ding F, Chen T. Hierarchical gradient-based identification of multivariable discrete-time systems [J]. Automatica, 2005, 41(2): 315-325.

[50] Ding F, Chen T. Identification of Hammerstein nonlinear ARMAX systems [J]. Automatica, 2005, 41(9): 1479-1489.

[51] Ding F, Chen T. Performance analysis of multi-innovation gradient type identification methods [J]. Automatica, 2007, 43(1): 1-14.

[52] Ding F, Liu G, Liu X P. Parameter estimation with scarce measurements [J]. Automatica, 2011, 47(8): 1646-1655.

[53] Liu Y J, Ding F, Shi Y. An efficient hierarchical identification method for general dual-rate sampled-data systems [J]. Automatica, 2014, 50(3): 962-970.

[54] Wang Y J, Ding F. Novel data filtering based parameter identification for multiple-input multiple-output systems using the auxiliary model [J]. Automatica, 2016, 71: 308-313.

[55] Ding F, Chen T. Hierarchical least squares identification methods for multivariable systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(3): 397-402.

[56] Ding F, Chen T. Parameter estimation of dual-rate stochastic systems by using an output error method [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(9): 1436-1441.

[57] Ding F, Liu G, Liu X P. Partially coupled stochastic gradient identification methods for non-uniformly sampled systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(8): 1976-1981.

[58] Ding J, Ding F, Liu X P, Liu G. Hierarchical least squares identification for linear SISO systems with dual-rate sampled-data [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(11): 2677-2683.

[59] Ding F, Liu X P, Yang H Z. Parameter identification and intersample output estimation for dual-rate systems [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, 2008, 38(4): 966-975.

[60] Ding F, Liu X P, Liu G. Multi-innovation least squares identification for system modeling [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2010, 40(3): 767-778.

[61] Ding F. Hierarchical multi-innovation stochastic gradient algorithm for Hammerstein nonlinear system modeling [J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(4): 1694-1704.

[62] 丁锋. 辨识方法的计算效率 (1): 递推算法 [J]. **南京信息工程大学学报** (自然科学版), 2012, 4(4): 289-300.

[63] 丁锋. 辨识方法的计算效率 (2): 迭代算法 [J]. **南京信息工程大学学报** (自然科学版), 2012, 4(5): 385-401.

[64] 丁锋. 辨识方法的计算效率 (3): 信息向量耦合算法 [J]. **南京信息工程大学学报** (自然科学版), 2012, 4(6): 481-495.

[65] Golub G H, Van Loan C F. Matrix Computations [M]. 3rd ed. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 1996.

[66] 丁锋, 萧德云. 多变量系统状态空间模型的递阶辨识 [J]. **控制与决策**, 2005, 20(8): 848-853+859.

[67] Ding F, Liu X M, Gu Y. An auxiliary model based least squares algorithm for a dual-rate state space system with time-delay using the data filtering [J]. Journal of the Franklin Institute, 2016, 353(2): 398-408.

[68] 丁锋, 谢新民. 系统参数和状态联合估计 [J]. **控制与决策**, 1994, 9(3): 223-225.

[69] 丁锋, 陈通文, 萧德云. 一般双率系统状态空间模型及其递阶辨识 [J]. **自动化学报**, 2004, 30(5): 652-663.

[70] Ding F, Chen T. Hierarchical identification of lifted state-space models for general dual-rate systems [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems–I: Regular Papers, 2005, 52(6): 1179-1187.

[71] 丁锋, 陈通文, 萧德云. 非均匀周期采样多率系统的一种辨识方法 [J]. **电子学报**, 2004, 32(9): 1414-1420.

[72] 刘艳君, 丁锋. 通过极小化参数估计误差协方差阵的递推最小二乘算法 [J]. **科学技术与工程**, 2008, 8(11): 2941-2944.

[73] Zhuang L F, Pan F, Ding F. Parameter and state estimation algorithm for single-input single-output linear systems using the canonical state space models [J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(8): 3454-3463.

[74] Gu Y, Ding F. Parameter estimation for a multivariable state space system with d-step state-delay [J]. Journal of the Franklin Institute, 2013, 350(4): 724-736.

[75] Gu Y, Ding R. A least squares numerical algorithm for a state space model with multi-state delays [J]. Applied Mathematics Letters, 2013, 26(7): 748-753.

[76] Gu Y, Lu X L, Ding R F. Parameter and state estimation algorithm for a state space model with one unit time-delay [J]. Circuits, Systems and Signal Processing, 2013, 32(5): 2267-2280.

[77] Ding F, Chen T. Modeling and identification for multirate systems [J]. Acta Automatica Sinica (自动化学报), 2005, 31(1): 105-122.

[78] Ding F, Chen T. Identification of dual-rate systems based on finite impulse response models [J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2004, 18(7): 589-598.

[79] Ding F. Generalized Yule-Walker and two-stage identification algorithms for dual-rate systems [J]. Journal of Control Theory and Applications, 2006, 4(4): 338-342.

[80] Ding J, Shi Y, Wang H G, Ding F. A modified stochastic gradient based parameter estimation algorithm for dual-rate sampled-data systems [J]. Digital Signal Processing, 2010, 20(4): 1238-1247.

[81] Ding F, Liu X P, Shi Y. Convergence analysis of estimation algorithms of dual-rate stochastic systems [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 176(1): 245-261.

[82] Ding F, Chen T. Parameter estimation for dual-rate systems with finite measurement data [J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B: Applications and Algorithms, 2004, 11(1): 101-121.

[83] Ding J, Ding F. The residual based extended least squares identification method for dual-rate

systems [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2008, 56(6): 1479-1487.

[84] Ding J, Fan C X, Lin J X. Auxiliary model based parameter estimation for dual-rate output error systems with colored noise [J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(6): 4051-4058.

[85] Liu Y J, Xie L, Ding F. An auxiliary model based recursive least squares parameter estimation algorithm for non-uniformly sampled multirate systems [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 2009, 223(4): 445-454.

[86] Liu Y J, Ding F, Shi Y. Least squares estimation for a class of non-uniformly sampled systems based on the hierarchical identification principle [J]. Circuits, Systems and Signal Processing, 2012, 31(6): 1985-2000.

[87] Ding F, Chen T. Least squares based self-tuning control of dual-rate systems [J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2004, 18(8): 697-714.

[88] Ding F, Chen T. A gradient based adaptive control algorithm for dual-rate systems [J]. Asian Journal of Control, 2006, 8(4): 314-323.

[89] Ding F, Chen T. Adaptive digital control of Hammerstein nonlinear systems with limited output sampling [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2007, 45(6): 2257-2276.

[90] Xie L, Liu Y J, Yang H Z, Ding F. Modelling and identification for non-uniformly periodically sampled-data systems [J]. IET Control Theory and Applications, 2010, 4(5): 784-794.

[91] Francis B A, Georgiou T T. Stability theory for linear time-invariant plants with periodic digital controllers [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1988, 33(9): 820-832.

[92] Sheng J, Chen T, Shah S L. Generalized predictive control for non-uniformly sampled systems [J]. Journal of Process Control, 2002, 12(8), 875-885.

[93] Kreisselmeier G. On sampling without loss of observability/controllability [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44(5): 1021-1025.

[94] 丁锋, 马兴云. 规范状态空间系统辨识方法 [J]. **南京信息工程大学学报** (自然科学版), 2014, 6(6): 481-504.

[95] Ding F, Wang X H, Mao L, Xu L. Joint state and multi-innovation parameter estimation for time-delay linear systems and its convergence based on the Kalman filtering [J]. Digital Signal Processing, 2017, 62: 211-223.

[96] Ding F, Wang F F, Xu L, Wu M H. Decomposition based least squares iterative identification algorithm for multivariate pseudo-linear ARMA systems using the data filtering [J]. Journal of the Franklin Institute, 2017, 354(3): 1321-1339.

[97] Wang X H, Ding F, Hayat T, Alsaedi A. Combined state and multi-innovation parameter estimation for an input nonlinear state space system using the key term separation [J]. IET Control Theory and Applications, 2016, 10(13): 1503-1512.

[98] Wang X H, Ding F. Joint estimation of states and parameters for an input nonlinear state space system with colored noise using the filtering technique [J]. Circuits, Systems and Signal Processing, 2016, 35(2): 481-500.